



Análisis lingüístico de errores en la solución de problemas geometría euclidiana

Marisol **Radillo** Enríquez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Guadalajara
México

marisol.radillo@red.cucei.udg.mx

Vladimir **Efremov**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Guadalajara
México

efremov@cencar.udg.mx

Resumen

Se reportan los resultados de una investigación exploratoria cualitativa cuyo objetivo consistió en identificar y clasificar los errores relacionados con los procesos de traducción entre los códigos del lenguaje matemático, en la solución de problemas de la geometría euclidiana. El estudio se llevó a cabo con estudiantes de licenciatura del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara. La base teórica del análisis lingüístico consiste en los códigos o conjuntos de normas que rigen los diversos tipos de representación utilizados en la materia; la metodología se centra en una descripción sobria de las diferencias demostrables entre el tipo de texto que requiere la solución de cada tipo de problema y las respuestas redactadas por los estudiantes, consideradas éstas como registros lingüísticos y objetivos de su actividad cognitiva al resolver un problema.

Palabras clave: lenguaje matemático, representación, procesos de traducción, geometría, lingüística

Introducción

El interés sobre la naturaleza y las consecuencias de los errores que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas no es reciente, pues los primeros antecedentes se remontan a principios del siglo XX, durante el auge de la Psicología Experimental (Rico, 1995). En esa época el conductismo predominaba en la enseñanza y el error era considerado como una falla o

equivocación, lo cual era inaceptable en el proceso de aprendizaje de los alumnos; por lo tanto los esfuerzos didácticos se orientaron a evitar su aparición en el proceso educativo.

Sin embargo, la revisión histórica del desarrollo del conocimiento científico se encuentra plena de conocimientos que inicialmente fueron rechazados por ser considerados falsos o erróneos, ya que contradecían las teorías establecidas (Khun, 2004; Kline, 1985). Al paso del tiempo y a la luz de los nuevos descubrimientos, algunas de las antiguas teorías científicas son ahora catalogadas como errores, mientras que otras han sido ampliadas. Ante esta evidencia se puede concluir que el error es una realidad y una posibilidad permanente en el desarrollo del conocimiento científico, el cual a su vez es presentado de manera sistematizada en el aprendizaje escolar.

En consideración al desarrollo del conocimiento científico, para los teóricos constructivistas del aprendizaje, los errores no son solo equivocaciones, como se consideraba desde los inicios de la pedagogía empírica, sino “oportunidades de aprendizaje”; los errores no necesariamente revelan un error o deficiencia en el aprendizaje, pues existen evidencias de situaciones en las cuales se aplican conocimientos correctos pero inadecuados para la situación por resolver (Brousseau, 2001; Astolfi, 2003). Bajo esta premisa se recomienda a los profesores diseñar situaciones que partan de los errores detectados para propiciar nuevo aprendizaje, en lugar de tratar de erradicarlos y surgió el interés por la investigación científica de errores.

Al analizar las publicaciones existentes sobre el estudio de errores en la Didáctica de las Matemáticas, Rico y Castro (1994) identificaron cuatro líneas principales en la investigación de los errores en aprendizaje escolar: (1) análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, y taxonomías o clasificaciones de los errores detectados; (2) tratamiento curricular de los errores en el aprendizaje de las Matemáticas; (3) planes de formación de profesores, dedicados a la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores; (4) trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores, con un tratamiento estadístico.

El trabajo que se reporta pertenece a la primera línea de investigación, ya que su objetivo consistió en identificar cuáles son los errores relacionados con el dominio del lenguaje matemático que enfrentan los estudiantes de Geometría Euclideana del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México, y cuál es su influencia en la solución de problemas de esta disciplina matemática.

En la primera parte de este trabajo se presentan la discusión teórica acerca del lenguaje matemático y la conformación de los códigos verbal, simbólico y gráfico. A continuación se da cuenta de la metodología del análisis lingüístico y en la tercera parte se reportan algunas respuestas de los estudiantes, los resultados de su análisis lingüístico y una clasificación tentativa de los errores detectados. Finalmente se presentan las conclusiones y se plantean algunas reflexiones para futuros trabajos relacionados.

Lenguajes especializados

La base teórica de la presente investigación proviene de la Lingüística Aplicada, en la cual se considera que un *lenguaje especializado* está conformado por mucho más que un simple listado de términos técnicos (léxico) creados *ex profeso* para referirse a la temática específica de un campo del conocimiento humano, pues se tienen recursos léxicos, sintácticos, morfológicos y

textuales especiales para comunicarse adecuadamente en un contexto profesional determinado (Cabre, s/f). Tal es el caso del *lenguaje especializado de las matemáticas* o *lenguaje matemático*, el cual tiene además el propósito de caracterizar los hechos y las reglas de razonamiento con precisión, así como las relaciones y conexiones entre los objetos matemáticos y sus propiedades.

La ventaja principal de considerar la perspectiva teórica de los lenguajes especializados consiste en que permite especificar la gramática que rige al lenguaje matemático, y en consecuencia se definen los recursos necesarios para su aprendizaje y enseñanza. Por ejemplo, los códigos que se reportan en este trabajo constituyen la base para realizar un análisis lingüístico de las producciones escritas de los estudiantes de Geometría; los resultados del análisis permitieron identificar algunas causas y consecuencias de los errores cometidos por los alumnos y, posteriormente, modificar el diseño instruccional del curso (Radillo, 2009).

Representación de las proposiciones matemáticas

El concepto de representación que se utiliza en la Didáctica de las Matemáticas se aproxima a una “señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas” (Rico, 2000). En la opinión de Duval (1998), “ningún objeto real” se puede considerar como un representante perfecto de los objetos matemáticos, si se tiene acceso a ellos por medio de la percepción, por lo que es necesario referirse a ellos a través de alguna de sus formas de representación; se necesitan por lo menos dos representaciones diferentes, el lenguaje natural y el lenguaje matemático, para tener una idea de dicho objeto (Duval, 1998).

Representación de las proposiciones matemáticas en la Geometría Euclideana. Desde la Lingüística, es posible establecer que el lenguaje matemático está conformado por diversos conjuntos de normas o códigos que rigen las diversas formas de representación utilizadas: (a) *Verbal*. Descripción de un objeto o enunciado matemático expresado solo en palabras, ya sea de manera oral o escrita; (b) *Simbólica*. Descripción de uno o más objetos matemáticos, sus propiedades y/o relaciones, expresada únicamente con la notación matemática tradicional (SIM); (c) *Gráfica*. Imagen de uno o más conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos. Suele incluir letras que asignan nombres específicos a los componentes de la figura (GRAF). El pasaje de una forma de representación a otra se denomina proceso de traducción.

La relación entre estas tres formas de representación se pone de manifiesto en diferentes tipos de problemas de la Geometría Euclidiana. Por ejemplo, el planteamiento de una demostración requiere el pasaje de una representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica.

Los códigos del lenguaje matemático

Las partes de la Lingüística aplicables a los códigos del lenguaje matemático son la sintaxis, el léxico y la morfología (Leal, 2000), por lo que para llevar a cabo el análisis lingüístico de la solución a un problema, se establecieron los códigos lingüísticos para cada tipo de representación utilizada en la materia: simbólica, gráfica y verbal. Estos códigos no fueron creados con propósitos docentes, sino para contrastar las respuestas de los estudiantes con las

normas estructuradas conforme a la Lógica Teórica y el desarrollo axiomático propio de la geometría euclidiana.

El código verbal. La construcción del código verbal consistió en (a) una lista de términos geométricos que constituyen el léxico de la geometría euclidiana, con las normas institucionales que se proporcionan a los estudiantes y (b) la clasificación de los sustantivos y un listado de adjetivos con los que pueden ser utilizados en la formación de proposiciones y enunciados. Por ejemplo, el adjetivo “perpendiculares” solamente se aplica al sustantivo “rectas”, es decir no se utiliza con otros sustantivos como “puntos” o “círculos” puesto que constituyen un “sin sentido”; el adjetivo “circular” puede ser aplicado a sustantivos tales como “arco”, “sector”, “segmento”, “sección”, “cilindro”, “cono” y “trapezio”. El sustantivo “recta”, en singular, admite la utilización de adjetivos diferentes (oblicua, ‘perpendicular a’, secante, tangente) que su expresión en plural, “rectas” (concurrentes, determinadas, distintas, oblicuas, paralelas, ‘perpendiculares entre sí’).

Aunque los autores de la Didáctica de las Matemáticas se refieren a las “palabras” del lenguaje matemático (Pimm, 1999; Alcalá, 2002), desde el punto de vista lingüístico es preferible referirse a *términos*, los cuales pueden estar compuestos por una o más “palabras”, v. gr. la expresión *ángulos alternos internos* es un término formado por tres “palabras” que al aparecer juntas en ese orden tienen un significado determinado y pueden ser considerados *grosso modo* como “sintagmas nominales”.

El código simbólico. Otro aspecto del lenguaje matemático que merece especial atención se relaciona con las normas o convenciones no escritas que se tienen en el ámbito escolar, las cuales debilitan el rigor del código simbólico y dan origen a polisemia o ambigüedad. Tal es el caso de escribir *sen 2x*, en vez de *sen (2x)*, de uso frecuente en los textos y cursos de cálculo, aunque el hecho de eliminar los paréntesis propicia que el estudiante inexperto interprete de dos maneras diferentes la expresión mencionada a saber: *sen(2)x* o bien *sen(2x)* (Díaz, 06). Este tipo de situaciones conflictivas se solucionan si se conoce el código o conjunto de reglas de sintaxis, semántica y morfología que se utiliza a partir de un léxico dado. Ahí estriba la importancia de definir los códigos utilizados en la Geometría Euclidiana para realizar un análisis lingüístico de los textos producidos por los estudiantes y detectar los posibles obstáculos en la solución de problemas que están relacionados con el lenguaje matemático.

Las normas establecidas para la representación simbólica en la Geometría Euclidiana se reorganizaron desde una perspectiva de Lingüística y Lógica Teórica. Se consideran las reglas aprobadas para su uso por la academia de geometría euclidiana del CUCEI. El código comienza con la definición de términos, los cuales se clasifican en constantes numéricas y variables individuales tanto en expresiones simples como en las expresiones compuestas. Se finaliza con las reglas de formación de enunciados a partir de las variables individuales. Algunas de las reglas de sintaxis de la representación simbólica en la geometría euclidiana son las siguientes:

- A, B, C, ... letras latinas mayúsculas designan puntos (excepto ‘R’ en las expresiones de medidas angulares)
- α , β , ... letras griegas representan planos o ángulos (excepto ‘ π ’ en las expresiones de medidas angulares)
- a, b, c... letras latinas minúsculas con el diacrítico superpuesto ‘ $\leftrightarrow$ ’ representan rectas.

- $AB, CD, PQ \dots$ pares de letras latinas mayúsculas representan longitudes.
- $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{PQ} \dots$ pares de letras latinas mayúsculas con el diacrítico superpuesto '—' representan segmentos de recta.
- $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{PQ} \dots$ pares de letras latinas mayúsculas con el diacrítico superpuesto '↔' representan rectas.
- $\zeta \perp \xi$ es enunciado si y sólo si ζ y ξ representan segmentos, rayos, rectas o planos.
- $\zeta \parallel \xi \parallel \eta$ es enunciado si y sólo si ζ, ξ y η representan segmentos, rayos, rectas o planos.
- $\zeta \cap \xi = \eta$ es un enunciado si y sólo si ζ y ξ representan segmentos, rectas, rayos o circunferencias y η representa un conjunto de puntos

La reformulación de las reglas de la notación simbólica de acuerdo a la Lingüística y a la Lógica Teórica se hizo con propósitos de investigación, ya que la lista de símbolos y su uso, elaborada por los profesores del CUCEI se hizo como una referencia para unificar el lenguaje, pero no es adecuada para el análisis lingüístico de los textos producidos por los alumnos. Por ejemplo, las reglas para la formación de enunciados simbólicos no se explicitan en tal documento, sino que se proporcionan ejemplos que cada profesor deberá explicar en clase, pero para el análisis y clasificación de los errores detectados en el trabajo de campo es indispensable explicitar todas estas reglas.

El código gráfico. En el ámbito escolar es inusual encontrar el planteamiento de problemas que utilicen solamente el código gráfico, pues este se usa para complementar la información dada en expresiones simbólicas y/o verbales; por esta razón se detecta poco rigor en el cumplimiento de las normas de este código. Un ejemplo muy común es la marca especial de los ángulos rectos, que suele omitirse en los esquemas y se deja a la percepción visual, lo cual es completamente inaceptable en los códigos simbólico o verbal.

Otra dificultad para establecer un código gráfico es la falta de rigor en la representación de los elementos básicos, como la línea recta. En la figura 1 se aprecian tres formas de la representación gráfica de una línea recta. La característica esencial en este caso es la longitud indefinida de una recta, que suele ser representada con puntas de flecha en los extremos (inciso a), aunque no existe una convención universal al respecto; suele añadirse nombre a dos puntos sobre la recta para referirse a ella en los códigos verbal y/o simbólico. En el inciso b la recta se representa con prolongaciones punteadas, aunque dichas prolongaciones también suelen representarse en línea continua después de los puntos marcados sobre la recta.

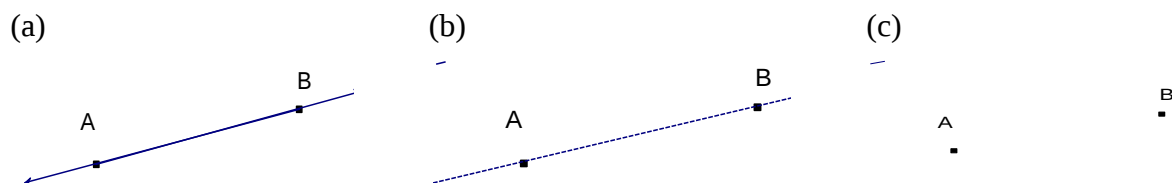


Figura 1. Tres formas equivalentes de representación gráfica de una recta.

El código gráfico se distingue del simbólico y del verbal en que no contiene oraciones en sentido estricto, ya que los trazos no son signos ordenados (n-tuplos de signos), y por ende pueden ser leídos de diversas maneras. Mientras que las oraciones de los otros dos códigos son conjuntos ordenados de signos que no pueden ordenarse de cualquier manera puesto que se altera su significado, en el código gráfico es más adecuado referirse a “combinaciones” de elementos.

Metodología

El objeto de estudio fue construido desde una perspectiva teórica que parte de la Lingüística, la Lógica Teórica y la Axiomática como disciplinas normativas, por lo que la metodología se centra en una descripción sobria de las diferencias demostrables entre el tipo de texto que se requiere en la solución de cada tipo de problema (demostración, solución numérica, traducción entre códigos) y las respuestas redactadas por los estudiantes, consideradas como registros lingüísticos y objetivos de su actividad cognitiva al resolver el problema.

Dado que las tipologías disponibles en la Didáctica de las Matemáticas son insuficientes para analizar los errores desde la Lingüística, pues sus categorías omiten los aspectos específicos relacionados con los códigos lingüísticos y los procesos de traducción entre ellos (Rico y Castro, 1994; Rico, 1997; Socas y Palarea, 1997; Brousseau, 2001; Alcalá, 2002; Astolfi, 2003; Franchi y Hernández, 2004; Pochulu, 2005; Radill Radillo, 2010), se propuso una tipología más adecuada para distinguir entre aquellos errores relacionados con el lenguaje matemático y los relacionados con fallas en el razonamiento deductivo y/o el desarrollo axiomático propio de la Geometría Euclidiana.

Para los propósitos de esta investigación se estableció el supuesto de que los errores que cometen los estudiantes en la solución de problemas de la materia se clasifican en tres tipos, no excluyentes entre sí: (a) *De representación* de objetos y enunciados matemáticos, (b) *Deductivos*, relativos al razonamiento propio de esta disciplina, (c) *Axiomáticos o de aplicación de la teoría* (definiciones, propiedades, axiomas, teoremas, lemas, corolarios, construcciones) en el procedimiento de solución.

Esta clasificación es meramente operacional y tiene como único propósito separar los errores relacionados con el lenguaje matemático de otros errores que suelen presentarse en la solución de problemas de la materia. El objetivo del proyecto consiste en clasificar los errores relacionados con el lenguaje matemático, lo cual se llevó a cabo después del análisis lingüístico

La base teórica se completó con una clasificación de los diferentes tipos de problema que se solucionan en los cursos de geometría euclidiana, sus posibles soluciones y las características del texto que corresponde a la solución correcta. De esta manera fue posible analizar los textos producidos por los estudiantes, detectar los errores cometidos y clasificarlos de acuerdo al factor lingüístico y a las características esenciales de la materia (errores de representación, deductivos y/o axiomáticos).

En la siguiente fase de la investigación se procedió a diseñar los instrumentos de recolección de datos, que consistieron en cuestionarios integrados tanto por problemas típicos de la materia como por planteamientos de traducción entre pares de códigos de la geometría. También se utilizaron algunas tareas y exámenes que los profesores aplicaron a sus estudiantes para evaluar su aprendizaje, sin perder de vista que el propósito de esta investigación es la detección y análisis de errores relacionados con los procesos de traducción intercódigos.

La recolección de datos se llevó a cabo en dos etapas separadas, cada una de las cuales incluyó dos cuestionarios fueron respondidos por dos grupos de estudiantes de un mismo profesor. El primer cuestionario se diseñó para detectar los errores cometidos en ejercicios de traducción entre códigos de la Geometría Euclidiana al inicio de cada curso, mientras que el segundo cuestionario tuvo como propósito identificar los errores cometidos en la solución de los diversos tipos de problemas del curso, y se aplicó en el último mes del ciclo escolar.

Dado que la población de estudio es reducida y los sujetos de la investigación no fueron seleccionados mediante un procedimiento aleatorio, las cifras que se proporcionan no pretenden ser representativas respecto al total de estudiantes de la institución en que se llevó a cabo (CUCEI), sino que constituyen una referencia para la parte exploratoria y descriptiva de la investigación.

Resultados

Sobre los resultados del análisis lingüístico fue posible identificar algunas causas y consecuencias de estos errores y establecer una tipología de errores en la solución de problemas de la geometría euclidiana, la cual consta de tres grupos de acuerdo a las características esenciales de esta materia (razonamiento deductivo y desarrollo axiomático) y al factor lingüístico (errores de representación gráfica, simbólica y verbal; errores de traducción entre los códigos correspondientes a cada forma de representación).

Errores de representación

En el análisis de las respuestas se detectaron algunos términos código verbal que condensan mucha información y cuya traducción a alguno de los otros dos códigos representa un obstáculo o dificultad para los estudiantes.

Tal es el caso de la representación simbólica del término “mediatriz de un segmento”, pues es necesario expresar que existe una recta (la mediatriz) perpendicular a un segmento ($\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$) y que lo divide en dos partes iguales ($AM = MB$). También es importante simbolizar cuál es el punto de intersección, lo cual se puede hacer de diversas maneras: $\overleftrightarrow{MN} \cap \overline{AB} = M$, ó $\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$ en M , o con dos enunciados de pertenencia: $M \in \overleftrightarrow{MN}$, $M \in \overline{AB}$. Solamente de esta manera, las traducciones $EE \rightarrow SIM$ y $SIM \rightarrow EE$ darán el mismo resultado de traducción en ambas direcciones (figura 2).

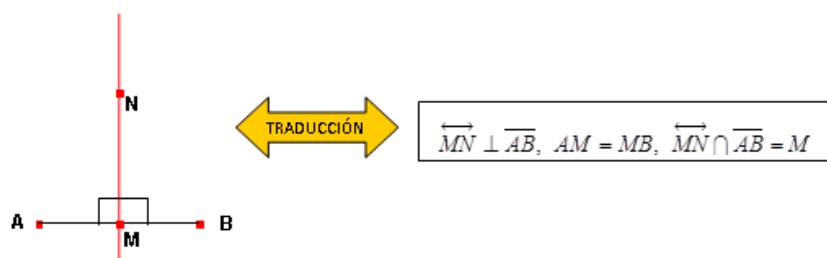


Figura 2. Al planteamiento simbólico dado corresponde la representación gráfica de la mediatriz de un segmento, y viceversa. $SIM \rightarrow GRAF$, $GRAF \rightarrow SIM$.

Si faltase alguna de estas tres expresiones simbólicas, su traducción a gráfica o a enunciado verbal podría ser diferente; esto significa que las funciones de mapeo entre los códigos del lenguaje matemático no siempre son unívocas, como se expone a continuación. En la notación simbólica que aparece en la figura 3 se omite que M es el punto de intersección entre la mediatriz y el segmento; por tanto hay más de un esquema que le corresponde a la traducción, puesto que en ambos casos se cumple la condición $AM = MB$.

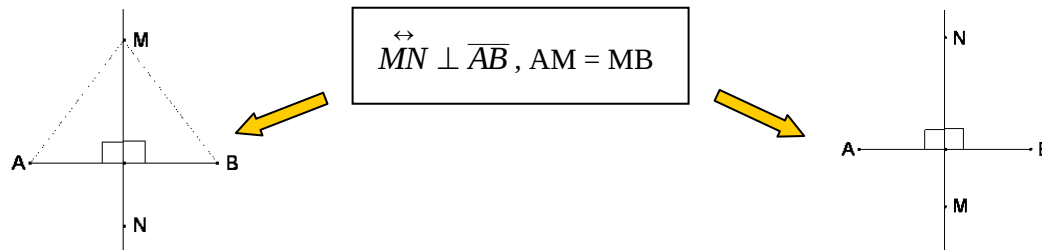


Figura 3. Dos de las posibles representaciones gráficas que corresponden a un mismo planteamiento simbólico. SIM $\rightarrow$ GRAF

Errores en solución de problemas

En la figura 4 se aprecia la respuesta de un estudiante que contiene errores de representación sin consecuencias en los otros dos tipos de error, ya que el resto de la demostración es correcta. El primer error de representación está en la hipótesis (1), pues el texto del problema se refiere a una circunferencia ($\odot$) pero el estudiante utiliza el símbolo de círculo (O) lo cual se cataloga como un error de representación en la traducción EE $\rightarrow$ SIM, de acuerdo a las normas institucionales del CUCEI-U. de G.

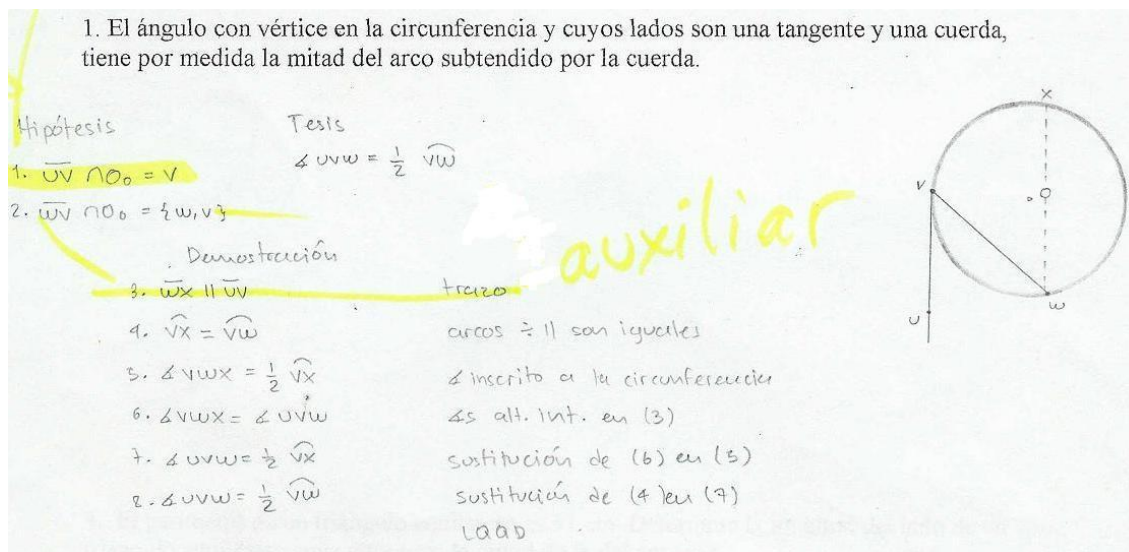


Figura 4. Errores de representación en una demostración (alumno #45).

Otro error de representación en el mismo enunciado consiste en simbolizar la tangente a la circunferencia utilizando un segmento en vez de una recta, lo cual tiene otras interpretaciones. Si se parte de la expresión simbólica utilizada por el estudiante, $\overline{UV} \cap \odot_O = V$ para la traducción

SIM $\rightarrow$ GRAF, se obtendrían las siguientes representaciones gráficas que no corresponden a una tangente (figura 5).

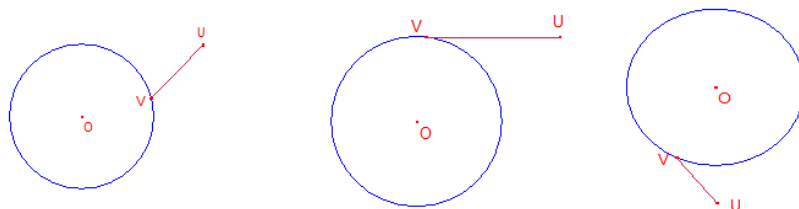


Figura 5. Representaciones gráficas correspondientes a la expresión UU^-

En otro problema planteado a los mismos estudiantes se pide demostrar que “si del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular a la hipotenusa, la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa”. A continuación se muestran algunas respuestas de los estudiantes, su análisis lingüístico y los errores detectados.

La respuesta que se muestra en la figura 6 contiene varios tipos de error:

- Las hipótesis están incompletas, pues no se estipuló que ABC es un triángulo rectángulo; puesto que esta información es indispensable para establecer la semejanza de los triángulos formados, este error cataloga tanto de representación (traducción incompleta $EE \rightarrow SIM$), como de tipo deductivo.
- La tesis está mal planteada, lo cual se considera tanto un error de representación como axiomático. En cuanto a la representación, hay un error de traducción $VERB \rightarrow SIM$, pues no se ha simbolizado una media proporcional como se especifica en el teorema; también es un error axiomático (aplicación de teoría) ya que dicha tesis no es una proporción válida entre los triángulos que se forman en la figura, de los cuales tampoco se puede demostrar que sean semejantes porque falta una hipótesis.
- Otro error está en la justificación de la semejanza de triángulo (paso 4), por el criterio “la”, que no existe. Este último error es de tipo axiomático y está ligado al anterior, de representación y deductivo, ya que forma parte de la cadena de proposiciones que parten de las hipótesis para demostrar la validez de la tesis.

Es de llamar la atención que el estudiante “concluye” la demostración con la tesis que planteó.

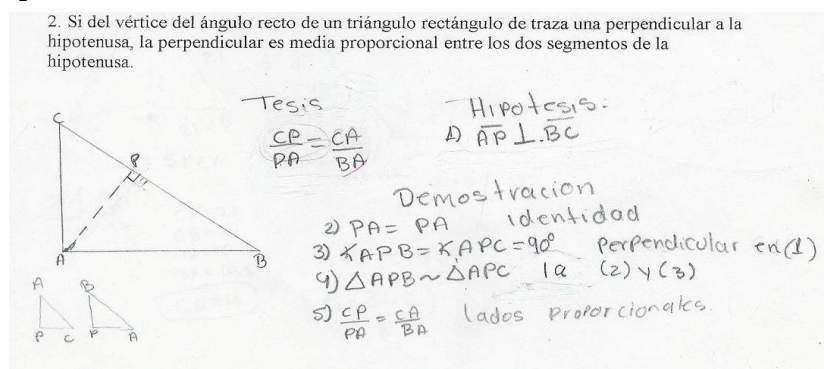


Figura 6. Errores axiomáticos y de aplicación de teoría en la demostración de un teorema (alumno #15).

Conclusiones

Si bien fue posible identificar algunas causas y consecuencias de estos errores, las limitaciones del estudio no son suficientes para hacer generalizaciones. Es necesario continuar la línea de investigación y ampliar la población de estudio.

Aun así, se estableció una tipología de errores en la solución de problemas de la geometría euclidiana, la cual consta de tres grupos de acuerdo a las características esenciales de esta materia (razonamiento deductivo y desarrollo axiomático) y al factor lingüístico (errores de representación gráfica, simbólica y verbal; errores de traducción entre los códigos correspondientes a cada forma de representación).

Aunque los errores detectados corresponden a diferentes categorías de acuerdo al análisis lingüístico, tienen en común los siguientes factores, aunque las causas que los originan pueden ser diversas:

- Al no percatarse de la estructura lógica y el desarrollo axiomático de la geometría, los estudiantes fallan en la estrategia de solución de problemas al no incorporar las definiciones pertinentes ni los teoremas previamente demostrados.
- Otro fallo importante de los estudiantes consiste en no apreciar el carácter “denso” de términos en alguno de los tres códigos, ya que al traducirlos les corresponden varios enunciados en los otros códigos. Tal es el caso de términos como “bisectriz”, “mediatriz”, “equidistar”, “circunscrito”, “inscrito”, “semi-inscrito” y los sintagmas que se forman con ellos en la representación verbal, ya que les corresponden varias proposiciones en los códigos simbólico y gráfico. En el código simbólico también existen términos complejos desde el punto de vista lingüístico, ya que fue creado para condensar mucha información, y puede obtenerse mucha información de ellos. Tal es el caso de expresiones como $\{A, B, C, D\}$
- El tercer factor recurrente en los errores es la dificultad que representa para los estudiantes establecer el caso de la generalidad que involucra un enunciado matemático, lo cual repercute tanto en errores al construir la figura correspondiente como en la comprensión de los cuantificadores, los cuales no siempre están explícitos en el código verbal y suelen no incluirse en las representaciones simbólica y gráfica.

Los dos últimos factores repercuten en errores de representación, los cuales se dividen en aquellas respuestas que quebrantan las normas de algún código en particular y los errores relacionados con los procesos de traducción intercódigos.

La clasificación de los errores relacionados con los procesos de traducción intercódigos consta de los siguientes tipos:

I. Traducción de Español Especializado de la Geometría Euclideana al Código Gráfico (EE → GRAF):

- *Ausente* (no hay figura alguna).

- *Figura incorrecta* (que no corresponde al problema).
- *Figura correcta, pero incompleta*, porque faltan elementos esenciales a la traducción, p.ej. las letras que designan los puntos sobre los que se debe razonar o el símbolo de ángulo recto entre las rectas perpendiculares.
- *Insuficiencia de generalización*, o caso particular de las condiciones expresadas en el problema, como el trazo de triángulos equiláteros o isósceles en lugar de escalenos, o dibujar rectas perpendiculares en vez de oblicuas.

II. Traducción de Español Especializado de la Geometría Euclideana a la Notación Simbólica (EE $\rightarrow$ SIM) en los planteamientos de demostración:

- *Ausente* (no se usa notación simbólica).
- *Ausencia parcial*: (i) no se simboliza la tesis, (ii) no se simboliza una de las hipótesis, (iii) no se simboliza ninguna de las hipótesis.
- *Traducción incorrecta*: (i) de la tesis, (ii) de una de las hipótesis, (iii) de todas las hipótesis.
- *Traducción correcta, pero incompleta de la tesis*.

Por otra parte, los errores en la solución de problemas y demostración, dejando a un lado el planteamiento, son de los siguientes tipos:

- *Ausencia de estrategia*, es decir, afirmaciones válidas pero que no contribuyen a demostrar la tesis (error deductivo); por lo general se aprecia una falta de estrategia influida por un mal planteamiento de la demostración (errores de traducción intercódigos).
- *Errores deductivos "puros"*, por un orden equivocado de las afirmaciones. Por ejemplo, el afirmar que dos longitudes son iguales y justificar por ser "lados homólogos", sin haber demostrado previamente la congruencia de dos polígonos.
- *Errores axiomáticos* relacionados con una mala aplicación de teoría, como justificar una afirmación con un teorema que no corresponde, por ejemplo el justificar la congruencia de triángulos por alguno de los criterios de semejanza.

Esta tipología tiene un carácter práctico que permitirá a los profesores de geometría no solamente identificar los obstáculos lingüísticos en la solución de problemas, sino que también establece una distinción entre los errores relacionados con el lenguaje matemático de aquéllos debidos a fallas en la aplicación de teoría y/o de razonamiento, que es uno de los propósitos del proyecto. La posibilidad de detectar en las respuestas de los estudiantes el tipo de error, es una potente herramienta para el docente, la cual puede ser utilizada para mejorar tanto el diseño instruccional del curso como los procesos de evaluación del aprendizaje.

Otra aportación del presente trabajo es la detección de que la dificultad lingüística del código simbólico y algunos términos complejos del español especializado, v. gr. "equidista", "mediatriz", "bisectriz", "circunscrito", "inscrita", "media proporcional" estriba en su carácter sintético, es decir, cada una de estas expresiones involucra varios conceptos matemáticos y/o condiciones necesarias para operar con ellos. Sería necesario explicar a quienes se inician en el

lenguaje matemático que algunos de sus códigos contienen términos que condensan mucha información aunque su equivalente en otro código puede ser un término simple.

Bibliografía

- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao
- Astolfi, J. P. (2003). *El "error", un medio para enseñar* (2ª Edición). Sevilla: Diada Editora.
- Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. Études dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques. *Petit x*, 57, 5-29
- Cabre, M. T. (s/f). Recursos lingüísticos en la enseñanza de lenguas de especialidad. Consultado el 24 de septiembre de 2011 en <http://cvc.cervantes.es/lengua/aeter/conferencias/cabre.htm>
- Díaz, P. (2006). *Lenguaje matemático y lenguaje audiovisual. Dos componentes de los programas de estudio de la enseñanza de la matemática del siglo XXI*. Consultado el 17 de abril de 2008 en: <http://www.uned.ac.cr/MemEncMate/Ponencias/Aspectosteoricos/Lenguaje%20Matem%C3%A1tico%20y%20Audiovisual-%20Msc.%20Pedro%20D%C3%ADaz.pdf>
- Franchi, L., Hernández de R, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de geometría plana. *Educere, Investigación Arbitrada*, 8(24), 63-71.
- Kline, M. (1985). *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo XXI
- Kuhn, T. (2004). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Leal C., F. (2000). Diez preguntas sobre el lenguaje, y un intento por responderlas desde una perspectiva principalmente sintáctica. En V. Alcaraz (coord.), *Una mirada múltiple sobre el lenguaje* (pp. 33-92), México: Editorial Universidad de Guadalajara.
- Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula* (2ª Edición). Madrid: Ed. Morata.
- Pochulu, M. D. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan en la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación* 35(4).
- Radillo, M. (2009). *Obstáculos relacionados con las deficiencias en la traducción entre códigos en la solución de problemas de la Geometría Euclidiana en el nivel de licenciatura* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Guadalajara, México.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (Eds.). *Educación matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rico, L. (1997). *Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas*. *Épsilon*, 38, 185-198.
- Rico, L., & Castro, E. (1994). *Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico*. Consultado en enero de 2006 en <http://ddm.ugr.es>
- Socas, M, & Palarea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, 7-24.