XIV CIAEM 2015
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Interamerican Conference on Mathematics Education
3-7 mayo
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

El continuo numérico en el último siglo: de las axiomáticas a los estructuralismos

Maribel **Anacona**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
maribel.anacona@correounivalle.edu.co
Guillermo **Ortiz** Rico
Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle
Colombia
guillermo.ortiz@correounivalle.edu.co
Luis Carlos **Arboleda**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
luis.carlos.arboleda@correounivalle.edu.co

Resumen

El propósito fundamental del presente taller es presentar algunos de los aspectos más relevantes del proceso de constitución de los números reales como objeto matemático durante el último siglo. En este ambicioso proyecto, hemos identificado tres momentos claves que van desde la presentación axiomática de los reales por Hilbert hasta su construcción en el marco de los estructuralismos de las matemáticas modernas y contemporáneas. En la primera parte del taller mostraremos cómo se aborda el continuo en cada momento histórico, determinando las técnicas y métodos más relevantes que garantizan la completez del conjunto de los números reales. En la segunda parte, se trabajará con los asistentes en unas preguntas específicas, direccionadas a identificar conjuntamente algunas de las ventajas y limitaciones que ofrece cada momento histórico de constitución, con sus técnicas y métodos propios, en la enseñanza de los números reales.

Palabras clave: continuo numérico, números reales, axiomática, estructuralismo, análisis real, topología, teoría de categorías, enseñanza universitaria, educación matemática.

Introducción

La problemática alrededor de la enseñanza de los números reales es un tema de gran sensibilidad y actualidad en la comunidad educativa a nivel internacional. Pocos aspectos de su extenso y productivo proceso de constitución como objeto matemático se pueden dilucidar en las propuestas de enseñanza de los primeros años de universidad. Por tanto, consideramos de suma importancia que los profesores de matemáticas reconozcan algunos de los momentos más relevantes del proceso de constitución del conjunto de los números reales como objeto matemático durante el último siglo; y puedan identificar en el marco de esta reflexión histórico-epistemológica algunas de las dificultades inherentes a su enseñanza; así como posibles aportes en la elaboración de experiencias de aula.

En nuestra propuesta investigativa hemos fijado como un primer momento de estudio, el conformado por las tres primeras décadas del siglo XX. Este período inicia con la presentación axiomática de los números reales por Hilbert en 1900, cuya noción de completez aparece fuertemente influenciada por la obra de Dedekind y el pensamiento filosófico de la época, muy particularmente de Husserl. La axiomática de Hilbert marca un derrotero y un nuevo estilo de hacer matemáticas, que posteriormente da lugar a la aparición de las teorías axiomáticas. Entre estas teorías se destaca la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y la axiomatización abstracta de los espacios de convergencia, en los años 1920 por Hausdorff y Frechet. Como se conoce, esta axiomatización posibilita el surgimiento de los espacios topológicos. De forma paralela, en este período se consolida el álgebra moderna, a través de la obra de van der Waerden, en los años 1930.

Los años 1940-1970 constituyen un segundo período. En esta época el grupo Bourbaki presenta su programa uniformador de las matemáticas introduciendo las denominadas *estructuras madres* en el interior de las axiomáticas básicas. La construcción de los números reales por Bourbaki, constituye una generalización de los reales por Cantor en el entrecruce de cuatro estructuras. Mientras Cantor completa el cuerpo **Q** de los racionales, Bourbaki completa el grupo topológico **Q** dotado de una estructura uniforme. En ambos procesos se requiere del concepto de convergencia. Mientras en Cantor se trata de la convergencia de sucesiones de Cauchy de números racionales, en Bourbaki se trata de la convergencia de filtros de Cauchy sobre **Q**. En ambos procesos se requiere del concepto de convergencia. Mientras en Cantor se trata de la convergencia de sucesiones de Cauchy de números racionales, en Bourbaki se trata de la convergencia de filtros de Cauchy. Es importante recordar que los filtros se definen en espacios topológicos y los filtros de Cauchy se establecen en espacios uniformes. Por tanto las estructuras topológicas y uniformes ocupan un papel sustancial en la construcción.

Desde los años 1970 hasta los albores del siglo XXI, se identifica un tercer momento, caracterizado por la emergencia de diversos estructuralismos que posibilitan el desarrollo de aspectos matemáticos que no necesariamente se fundamentan en la teoría de conjuntos. Se trata fundamentalmente de la teoría de la teoría de categorías de Mac Lane que encontró seguidores cercanos al grupo Bourbaki como Eilenberg y Grothendieck. En los últimos años la teoría de categorías se entrecruza con el álgebra universal, a través de la noción de coálgebra, la cual constituye un novedoso formalismo que permite caracterizar los números reales como coálgebras finales.

Estos tres momentos muestran que las matemáticas se han desarrollado a la luz de paradigmas axiomáticos y estructuralistas, con un énfasis muy fuerte en los estructuralismos desde mediados del siglo pasado. Se trata entonces de identificar los aspectos conceptuales y metodológicos más relevantes en cada período, en aras de aportar a una reflexión de carácter educativo.

Los tres momentos históricos de constitución de los reales

Los tres momentos históricos de constitución de los reales en el último siglo, se resumen en los siguientes: i) la presentación axiomática de Hilbert en 1900 y la contribución de Fréchet al análisis general y a los fundamentos del análisis funcional (1903-1928); ii) la importancia de la incorporación de las estructuras uniforme y topológica en la construcción de Bourbaki de los números reales; y iii) los desarrollos del álgebra universal y la teoría de categorías durante los últimos años, a fin de estudiar las caracterizaciones co-algebraicas de los números reales.

Primer momento: las axiomáticas como marco fundacional de los reales

Los reales de Hilbert (1900) constituyen la gran síntesis de las construcciones de los números reales realizadas en el siglo XIX: su exhibición axiomática da cuenta del concepto de estructura en **R**. Hilbert exhibe los axiomas de conexión, axiomas para las operaciones y axiomas de orden para objetos de naturaleza cualquiera. Estos son los axiomas que satisface una estructura de cuerpo totalmente ordenado. Con el axioma de Arquímedes y el axioma de completitud, denominados axiomas de continuidad, garantiza que este conjunto de objetos sea completo. Es decir, Hilbert parte de los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados y desde allí captura la estructura de **R** como el objeto más grande (salvo isomorfismos) que verifica los axiomas enunciados.

La axiomatización de la topología de espacios abstractos constituye otro instante significativo del desarrollo de las matemáticas del siglo XX. En el presente taller se examinarán comparativamente dos momentos históricos decisivos: la introducción en los trabajos de Fréchet preparatorios de su tesis doctoral (1904-1906) y las primeras estructuras topológicas determinadas por la convergencia de sucesiones y la métrica, así como la caracterización de la topología del espacio abstracto por la axiomática de las vecindades (Arboleda, 2012), la cual es formulada por Hausdorff en sus conferencias de Bonn de 1912 y finalmente en su célebre obra *Mengenlehre* de 1914.

En el caso de Fréchet nos interesa caracterizar el enfoque estructural propio al análisis general (Arboleda, 1980); es decir, el programa de la escuela de Hadamard que consistía en extender las propiedades fundamentales del cálculo infinitesimal al dominio de las funciones generalizadas o funcionales. Se intentará explorar la hipótesis que el mismo Fréchet formula sobre la influencia filosófica de la analiticidad”leibniziana en lo que podría llamarse la categoricidad de los espacios abstractos en Fréchet (Fréchet, 1928).

En cuanto a Hausdorff se refiere, se examinarán las condiciones de formación del estilo estructural moderno de los *Mengenlehre* en sus trabajos filosóficos tempranos (Hausdorff, 1904), y en su determinación de escoger, entre varias presentaciones generales de la topología del espacio, aquélla con la axiomática más sencilla y menos redundante posible. Este programa conducirá a Hausdorff (y curiosamente al mismo Fréchet y otros matemáticos) a preferir las vecindades porque le permiten desembarazarse de las dificultades de lo numerable que conlleva el uso de la convergencia secuencial. Se mostrará que este punto de vista fue adoptado por Bourbaki para seleccionar y organizar las estructuras de la topología general que mejor convenían al estudio fecundo de los problemas más importantes de la teoría de funciones.

En las cercanías de Artin y Noether aparece Oystein Ore, quien después de participar junto a Noether en la recopilación de los trabajos sobre *ideales* de Dedekind, propone un nuevo estructuralismo en las matemáticas. La teoría de estructuras que aparece en manos de Birkhoff en 1940 como la teoría de *lattices* (retículos). El desarrollo del álgebra moderna como estudio de estructuras algebraicas en sí mismas y la axiomatización de los espacios topológicos, influenciaron enormemente el punto de vista de Bourbaki, quien explícitamente expuso una versión conjuntista del estructuralismo. Este tipo de estructuralismo, especialmente orientado hacia una suerte de estructuralismo algebraico, ha sido ampliamente estudiado por Corry (2004) y por Krömer (2007).

Segundo momento: los reales en el estructuralismo bourbakista

Bourbaki constituye no sólo un referente epistemológico fundamental para las matemáticas del siglo XX, sino que además su propuesta estructuralista de construcción de los reales, realza precisamente aquello que se esconde en las exposiciones axiomáticas: la topología. En las presentaciones tradicionales de **R**, se parte de **Q** como cuerpo ordenado y se completa con el axioma de continuidad, para llenar las "lagunas" algebraicas y topológicas. Bourbaki escoge otro camino, en primer lugar define una topología sobre **Q** compatible con su estructura de grupo aditivo, y completa este grupo topológico a través de la estructura uniforme; sólo al final hace la extensión algebraica de grupo a cuerpo. Esta apuesta en la que ingresa primero lo topológico y se deja para el final lo algebraico, es la que consideramos merece ser analizada para efectos educativos.

Bourbaki parte de la consideración de **Q** como grupo aditivo, en el cual se define una relación de orden compatible con la estructura de grupo. Es decir, una relación que verifique la siguiente condición: $x \leq y \leftrightarrow x + z \leq y + z,\ \forall z \in \mathbf{Q}$. Esto significa que el orden es invariante bajo traslación. Tenemos entonces los racionales con las estructuras de grupo y de orden compatibles entre sí. En símbolos: $\langle \mathbf{Q}, +, \leq \rangle$. Con esta relación de orden, Bourbaki define sobre **Q** una topología compatible con su estructura de grupo aditivo, a través de un *sistema fundamental de vecindades* alrededor del origen, que identificamos por $\tau = \{(-a, a): a \in \mathbf{Q}^+\}$. Con la introducción de la topología Bourbaki está garantizando el tratamiento matemático de todos los conceptos relacionados con la noción de proximidad a un punto fijo, tales como continuidad puntual, filtro y convergencia, claves en la construcción de los reales.

Posteriormente, Bourbaki define una estructura uniforme sobre el grupo topológico **Q**, a través del *sistema fundamental de entornos* $\mathcal{U} = \{U_a: a \in \mathbf{Q}^+\}$, donde $U_a = \{(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}: |x-y| < a, a \in \mathbf{Q}^+\}$. Estos *entornos* formalizan la noción de cercanía entre dos puntos cualesquiera del espacio. Con ellos podemos expresar formalmente la idea de que "x_1 está tan cerca de x_2 como y_1 lo está de y_2". Con la introducción de las estructuras uniformes Bourbaki garantiza el tratamiento de los conceptos relacionados con la "cercanía" entre puntos dos a dos, tales como continuidad uniforme, filtros de Cauchy y convergencia de filtros de Cauchy; conceptos esenciales en la construcción de los reales. Las estructuras uniformes son una generalización de la noción de distancia y dotan de una especie de seudométrica a los espacios topológicos. Un espacio uniforme tiene por tanto una estructura más débil que una estructura métrica, pero más rica que una estructura topológica. En símbolos, se tiene el espacio topológico uniforme $\langle \mathbf{Q}, +, \leq, \tau, \mathcal{U} \rangle$.

Una vez **Q** está dotado de estas dos estructuras, Bourbaki completa el conjunto **Q**, a través de los filtros minimales de Cauchy; y finalmente extiende las propiedades algebraicas de grupo a cuerpo, para obtener el cuerpo completo **R**. (Bourbaki, 1965).

El estudio de las estructuras topológicas y uniformes de Bourbaki es fundamental en esta propuesta. El análisis de varias proposiciones y teoremas en Bourbaki (1965), permitirá no sólo disponer del soporte matemático sobre el cual se construyen los reales sino identificar elementos de orden epistemológico que nos permitan diferenciar claramente el lugar y el papel de estas estructuras en la propuesta bourbakista. Particularmente se revisarán muy rápidamente los conceptos de filtro y ultrafiltro introducidos de manera novedosa por H. Cartan, como vehículos para definir la convergencia sin depender de la numerabilidad de las sucesiones; y los espacios uniformes introducidos por A. Weil, sobre los cuales se puede definir la continuidad uniforme y los filtros de Cauchy, claves para establecer la completez. Así mismo, haremos particular diferencia entre las nociones de vecindad (topología) y entorno (uniformidad), y analizaremos la relación que sostienen entre lo abstracto de la formulación conceptual y lo intuitivo de su significado, en pro de encontrar luces para una mejor comprensión de los números reales. Intentamos mostrar que desde el nivel de abstracción y generalidad, característico de la práctica matemática de Bourbaki, es posible identificar el papel que desempeñan ciertos conceptos en la constitución de **R**; lo cual es difícil de observar desde espacios muy particulares.

Tercer momento: los reales y los diversos estructuralismos contemporáneos

Aunque los números reales se caracterizan de manera estructural a través de los desarrollos de Bourbaki para lograr su completación por medio de las estructuras uniformes, o bien, mediante la caracterización de Hilbert, se relega a un estatuto menor su presentación categorial. Sin embargo, en el marco de la teoría de categorías tenemos tratamientos co-algebraicos en los cuales se caracteriza el continuo matemático como objeto final de ciertas categorías co-algebraicas.

Otros estructuralismos a considerar son los topoi. Entre éstos el dado mediante haces por Dubuc (1986), donde a través de las generalizaciones de cortaduras de Tierney-Joyal se reescribe la construcción de los reales y se muestra que sus puntos son cortaduras de Dedekind, exhibiendo a los topos como interesantes universos para las matemáticas.

De la herencia de la teoría de retículos surge la denominada álgebra universal que se consolida en los años 80 con el texto de Burris y Sankappanavar (1981); teoría que se entrecruza con la teoría de categorías a través de las co-álgebras para proporcionarnos caracterizaciones del continuo matemático como objeto final, al estilo Hilbert, entre las que podemos mencionar (Pavlovic y Pratt, 2002) y (Escardo y Simpson, 2001). Esto nos permitirá acercarnos a los números reales a través de procesos coinductivos**.**

Marco conceptual y consideraciones finales

Recientemente, en filosofía de las matemáticas, varios autores (Benacerraf, Resnik, Shapiro, Chihara, Hellman, Parsons, McLarty, Landry, entre muchos otros) han presentado sus puntos de vista estructuralistas sobre las matemáticas y, sus argumentos a favor y en contra respecto a la toma de partido por algún tipo de estructuralismo particular. Debido a esto, el estructuralismo como corriente en la filosofía de las matemáticas contemporáneas ha ido adquiriendo un papel paradigmático, posicionándose paulatinamente de modo relevante en las discusiones sobre los fundamentos de las matemáticas; aunque la dificultad de definir estructura, ha sido el talón de Aquiles del estructuralismo. De modo muy panorámico, el estructuralismo matemático considera que el objeto de estudio de las matemáticas son las estructuras, considerando estas como una colección (no necesariamente un conjunto) de objetos (estáticos o dinámicos) y una colección de relaciones mutuas que cumplen dichos objetos. El estructuralismo se pregunta entonces qué son las estructuras y cómo se puede entender la ontología de éstas.

El estructuralismo puede ser rastreado desde la obra de Dedekind (1998), cuando introduce lo que es un sistema simplemente infinito. Luego, sin importar la naturaleza de los elementos de un dominio que cumple los axiomas de Dedekind-Peano, estos tienen derecho a ser llamados números naturales, puesto que lo más relevante son las relaciones mutuas que cumplen estos objetos y, no los objetos en sí mismos. En (Ortiz y Valencia, 2010) se explicita que es posible rastrear una suerte de estructuralismo cercano al de Dedekind en Hilbert (1900), a través de la caracterización de los reales como el objeto final de la categoría de los cuerpos totalmente ordenados arquimedianos.

A partir de los años 1930, los *Grundlagen der Analysis* de Edmund Landau, se destaca como uno de los libros más influyentes en la difusión del enfoque estructuralista de Dedekind y del formalismo de Hilbert sobre los sistemas numéricos. Publicado originalmente en 1930 y traducido en 1951 como *Foundations of Analysis* (Landau, 1951), los *Grundlagen* sistematiza las notas de enseñanza de Landau en Göttingen al lado de Hilbert a partir de 1909. Existe una discusión internacional sobre el carácter pedagógico de esta obra con base en los dos prólogos originales de Landau para el profesor y el alumno. Otra referencia obligada la constituye el libro de *Algebra Moderna* de van der Waerden de 1930, por considerarse el primer gran estructuralismo de las matemáticas (van der Waerden, 1949). Este texto surge del interés de recopilar, organizar y exponer sistemáticamente las contribuciones en álgebra, adelantadas por E. Noether y E. Artin, relacionadas fundamentalmente con teoría de anillos e ideales, sistemas hipercomplejos y números p-ádicos. Es también un texto que tiene como propósito actualizar la enseñanza del álgebra e incorporar los últimos resultados obtenidos. Este libro presenta los reales al estilo de Landau. El impacto y la imagen del álgebra producida por este libro son ampliamente analizados por Corry (2004).

Desde la perspectiva actual, se puede rastrear el estructuralismo matemático en Benacerraf (1965), en respuesta al dilema de cómo acceder a los objetos matemáticos si se adopta una postura, o bien realista, o bien idealista. Hellman (1989) considera que las matemáticas se encargan principalmente de la investigación de estructuras de diversos tipos, las cuales resultan de una completa abstracción de la naturaleza de los objetos individuales que se enmarcan en dichas estructuras. Para Parsons (1990), el punto de vista estructuralista de las matemáticas significa que los objetos matemáticos se enmarcan siempre en el contexto de alguna estructura de fondo y, más aún, que los objetos matemáticos son solo aquellos que son expresables en términos de relaciones básicas de una estructura.

No obstante, como menciona Zalamea (2009) la gran mayoría de los trabajos de filosofía de las matemáticas se reducen a filosofía analítica de los fundamentos de las matemáticas en la primera mitad del siglo XX y, el estructuralismo como corriente emergente, no está exento de dicho tratamiento: las diversas alternativas estructuralistas predominantes dependen de la toma de la dicotomía realismo/idealismo presente en la filosofía analítica tanto a nivel ontológico como epistemológico. Quizá el estructuralismo categorial provee una caracterización que, aunque anglosajona, se aleja de diversas tradiciones que han impedido, según Zalamea, la emergencia de nuevas filosofías de las matemáticas. Por otro lado, Zalamea considera que, en efecto, el estructuralismo de Lautman en concatenación con una fundamentación categorial (en el marco de ciertos topoi) brinda una nueva alternativa a la caracterización clásica de la filosofía de las matemáticas y, por ende al estructuralismo predominante (representado por las posturas de Resnik (1997), Parsons (2004), Shapiro (1997) y Chihara (2004)).

La anterior observación cobra sentido en la medida que las caracterizaciones estructuralistas predominantes de los números reales han apelado al estructuralismo conjuntista desde una perspectiva de la filosofía analítica. Se hace imperioso el considerar que en el marco de las diferentes vertientes estructuralistas en matemáticas (teoría de categorías, álgebra universal, estructuralismo bourbakista, teoría de retículos, etc.) se han efectuado desarrollos de gran importancia, aunque casi desconocidos, debido en parte a las visiones predominantes en filosofía de las matemáticas.

Finalmente, es importante manifestar que los estudios históricos y epistemológicos sobre el estructuralismo constituyen uno de los campos de mayor interés en las investigaciones contemporáneas: propician el análisis del que hacer matemático, la constitución de teorías científicas y el análisis de objetos matemáticos a la luz de sus relaciones intrínsecas. A nivel internacional, existen en la actualidad investigaciones de punta sobre la incidencia del estructuralismo en la constitución y consolidación de las matemáticas, como la de Detlfesen-Panza (Universidad de París 7), y sobre posturas opuestas al estructuralismo como la de los neo-fregeanos Hale-Wrigth. Sin embargo, se reconoce que casi todos los desarrollos matemáticos del siglo XX e inicios del XXI están a la luz de las propuestas estructuralistas. Las investigaciones en esta área son relevantes en tanto que dan cuenta de los fundamentos de las matemáticas.

Metodología del taller

En la primera parte del taller (60 minutos aproximadamente), se hace una presentación de los aspectos teóricos y metodológicos más relevantes de los tres momentos históricos escogidos, en el proceso de constitución de los reales durante el último siglo. La segunda parte del taller está destinada a la interacción con los asistentes. La propuesta es identificar, alrededor de unas cuantas preguntas, los conceptos y métodos que caracterizan la construcción de los reales en cada momento histórico. De igual manera se pretende que, de manera conjunta, se identifiquen las ventajas y limitaciones de cada propuesta para la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario. Las preguntas se entregan a los asistentes para que sean discutidas en pequeños grupos (30 minutos). Durante este tiempo se interactúa con cada grupo de trabajo resolviendo inquietudes y orientando cada una de las preguntas. Posteriormente, se realiza una plenaria (30 minutos) para socializar el análisis y las reflexiones de los grupos de trabajo. Al final se recogen las conclusiones y recomendaciones generales.

Referencias y bibliografía

Arboleda, L. C. (1980). Las primeras investigaciones sobre los espacios topológicos. *X Coloquio colombiano de matemáticas*. Paipa: Sociedad colombiana de matemáticas.

Arboleda, L.C. (2012). Objetos matemáticos y prácticas constitutivas: La génesis de la topología de vecindades. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, *1*(1), 32-44.

Benacerraf, P. (1965). What Numbers Could Not Be. *The Philosophical Review*, *74,* 47-73.

Bourbaki, N. (1965). Topologie Générale. *Éléments de mathématique* (Chapitre 1-4). Paris: Hermann.

Burris, S., & Sankappanavar, H. P (1981). *A Course in Universal Algebra.* New York: Springer-Verlarg.

Chihara, C. S. (2004). *A structural account of mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Corry, L. (2004). *Modern algebra and the rise of mathematical structures. Second revised edition*. Berlin: Birkhäuser Verlag.

Dedekind, R.(1998). *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de las matemáticas* (Edición e introducción a cargo de José Ferreirós). Madrid: Alianza Editorial.

Dubuc, E. (1986). Logical opens and real numbers in topoi. *Journal of pure and applied algebra*, *43*, 129-143.

Escardo, M., & Simpson, A. (2001). A universal characterization of the closed Euclidean interval. *Proceedings of the 16th annual IEEE symposium on logic in computer science*,115-125.

Fréchet, M. (1928). *Les espaces abstraits*. Paris: Gauthier-Villars.

Hellman, G. (1989). *Mathematics without numbers: Towards a modal-structural interpretation*. Oxford: University Press.

Hilbert, D. (1900). On the concept of number. En W. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert. A source book in the foundations of mathematics* (Vol. II, pp. 1089-1095). New York: Oxford University Press.

Hausdorff, F. (1904). Der Potenzbegriff in der Mengenlehre. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* 13, 569–571.

Krömer, R. (2007) *Tool and object: A history and philosophy of category theory*. Berlin: Birkhäuser.

Landau, E. (1951). *Foundations of analysis. The arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers. A Supplement to Text-Books on the Differential and Integral Calculus* (Translated by F. Steinhardt). Columbia University: Chelsea Publishing Company.

Ortiz, G., & Valencia, S. (2010). La categoricidad de los reales en Hilbert. *Revista Brasileira de Historia da Matemática*, *10*(19), 39-35.

Parsons, Ch. (1990). The Structuralist View of Mathematical Objects. *Synthese*, *84*, 303–346.

Parsons, Ch. (2004). Structuralism and Metaphysics. *The Philosophical Quarterly*, *54*(214), 56-77.

Pavlovic, D., & Pratt, V. (2002). The continuum as a final coalgebra. *Journal theoretical computer science*, *280*(1-2), 105-122.

Resnik, M. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Oxford University Press.

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford: Oxford University Press.

Shapiro, Stuart (ed.) (2005). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press.

van der Waerden, B. L. (1949). *Modern Álgebra*. New York: Frederick Ungar Publishing Co.

Zalamea, F. (2009). *Filosofía Sintética de las Matemáticas Contemporáneas*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

Apéndice

Preguntas para el taller sobre el continuo numérico

Las siguientes preguntas se entregan a los asistentes para que sean discutidas en pequeños grupos (30 minutos). Posteriormente, se realiza una plenaria (30 minutos) para socializar el análisis y las reflexiones de los grupos de trabajo. Al final se recogen las conclusiones y recomendaciones generales.

i) ¿De qué manera la extensión de ciertos teoremas del análisis real condujo a la necesidad de dotar de una topología a los espacios abstractos? ¿Cuál es la razón de ser de esta generalización?

ii) Mencione una característica de los reales por Bourbaki, ya sea conceptual o metodológica, que se constituya en un elemento distinto y sustancial de la construcción. ¿Ofrece alguna ventaja de orden pedagógico?

iv) Muestre que el teorema fundamental del cálculo y/o la serie de Taylor constituyen ejemplos de la naturaleza coinductiva del análisis real.