



## Un Esquema de Transformación Lineal asociado al concepto Base

Doris Evila **González** Rojas

Universidad Industrial de

Santander Colombia

[dorevigonroj@gmail.com](mailto:dorevigonroj@gmail.com)

Solange **Roa** Fuentes

Universidad Industrial de

Santander Colombia

[sroa@matematicas.uis.edu.co](mailto:sroa@matematicas.uis.edu.co)

### Resumen

En este documento presentamos una propuesta de investigación que tiene por objetivos primero construir en términos de la Teoría APOE un esquema validado de transformación lineal que tome como elementos fundamentales su representación matricial y geométrica a partir del concepto de base. Y segundo, diseñar con base en el análisis teórico propuesto un modelo de clase que incluya elementos curriculares y didácticos que motiven la construcción exitosa de los estudiantes del esquema de transformación lineal en cursos regulares de álgebra lineal. El análisis del rol de la base ordenada en el momento de construir una de las representaciones mencionadas de la transformación lineal, nos permitirá establecer la evolución del esquema de este concepto a través de la descripción de los niveles inter, intra y trans.

*Palabras clave:* Transformación Lineal, Base, Representación matricial, Teoría APOE, Descomposición genética.

### Introducción

Los estudiantes de ingenierías, matemáticas, licenciatura en matemáticas, entre otros, se enfrentan por primera vez con ella en el primer año de universidad. Para Dorier (2000), y otros investigadores franceses (Dorier, 1998; Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997; Strang, 1998) los estudiantes tienen serias dificultades para el aprendizaje del álgebra lineal, sobre todo por su naturaleza abstracta y formal. La enseñanza del álgebra lineal, en particular las dificultades presentadas en los estudiantes cuando intentan aprender los conceptos abstractos de esta, han

recibido la atención de varios investigadores en los últimos años. Las dificultades que se han reportado han motivado el trabajo de grupos de investigación en el mundo, que buscan explicar cómo los individuos construyen los conceptos básicos de álgebra lineal. Por ejemplo Dubinsky (1991) y otros miembros de *Research Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés), han diseñado teorías con miras con el objetivo de plantear propuestas didácticas y metodológicas que buscan ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades al enfrentarse con los conceptos de combinación lineal, espacio vectorial, base, conjunto generador, espacio generado, transformación lineal, entre otros.

Por ejemplo Oktaç y Trigueros (2010), presentan los resultados de un proyecto realizado en México, cuyo propósito es profundizar en la forma en que los estudiantes universitarios aprenden álgebra lineal. En particular, las autores, presentan los resultados obtenidos para los conceptos de espacio vectorial, transformación lineal, base y sistemas de ecuaciones lineales.

Las autoras manifiestan que todos los estudios del proyecto involucrados revelan que el aprendizaje del álgebra lineal requiere un gran esfuerzo, también muestra la necesidad de realizar estudios que no se queden en identificar las dificultades de los estudiantes, sino que ayuden a remediarlas. Por otra parte se muestra que a través de los distintos trabajos del proyecto se puede verificar que el uso de la *descomposición genética* (constructo de la Teoría APOE) constituye una herramienta poderosa para explicar las construcciones mentales involucradas en la obtención de los distintos conceptos del álgebra lineal.

En nuestro proyecto nos interesa estudiar la construcción del esquema de transformación lineal tomando como elemento principal el concepto de base ordenada. De la información obtenida en este estudio, esperamos diseñar actividades didácticas que permitan a los estudiantes una construcción más sólida de los conceptos del álgebra lineal, que les permita observar que estos conceptos están fuertemente relacionados.

Recordemos que si se conoce el efecto de la transformación lineal sobre los vectores de la base, se conoce el efecto sobre cualquier otro vector; como lo muestra Grossman (2008, p. 473)

Sea  $V$  un espacio de dimensión finita con base  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Sea  $W$  un espacio vectorial que contiene los vectores  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Entonces existe una transformación lineal única  $T: V \rightarrow W$  tal que  $T(v_i) = w_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

En el presente escrito está dividido en cinco partes, esta introducción para dar paso a una la sección que nos muestra algunos trabajos que se han realizado, desde diferentes contextos, sobre el concepto de transformación lineal y que hemos llamado: El concepto de transformación lineal en Matemática Educativa. Seguido nos encontramos con el planteamiento de nuestro problema de investigación, allí mostramos las preguntas de investigación y los objetivos propuestos. Posteriormente, nos encontramos con La Teoría, en esta sección hablamos de aspectos básicos de esta y finalizamos con un apartado de conclusiones, donde expresamos los resultados que esperamos alcanzar en nuestro proyecto.

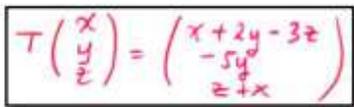
### **El concepto de Transformación Lineal en Matemática Educativa**

La transformación lineal ha sido uno de los temas que presenta mayor obstáculo en el estudio del álgebra lineal. Algunas de las investigaciones se han centrado en el estudio de este concepto, desde diferentes miradas. Por ejemplo, Molina y Oktaç (2007) encontraron evidencias sobre la problemática del aprendizaje de la transformación lineal considerando la teoría sobre la intuición y los modelos intuitivos; los autores se plantearon la hipótesis que : *los modelos intuitivos*

detectados en todos los estudiantes sobre la TL son una serie de casos particulares de transformaciones lineales; ellos advierten que algunos estudiantes reconocen las transformaciones lineales como expansiones, contracciones, reflexiones, rotaciones y composiciones de estos. Siendo esta una dificultad ya que por ejemplo, la transformación identidad no es una transformación lineal.

Molina y Oktaç (2007), también observan que algunos estudiantes tienden a relacionar las transformaciones lineales con líneas rectas, y que si un objeto no es una línea recta, este no puede ser el resultado de una transformación lineal. Por otro lado, los autores resaltan la importancia de trabajar las transformaciones lineales sobre espacios de diferentes dimensiones ya que esto podría ayudar al estudiante a percibir que las transformaciones lineales pueden representar situaciones diferentes a movimientos simples.

Por su parte, Ramírez, Romero y Oktaç (2014), analizan la coordinación de registros de representación de los estudiantes y su relación con el éxito y la eficiencia al resolver situaciones planteadas referentes a la transformación lineal. Estos autores para lograr un análisis significativo, no solo estudian las representaciones utilizadas por los estudiantes sino que además, sus explicaciones verbales. Por ejemplo, un estudiante presenta la siguiente definición de transformación lineal:



$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-3z \\ -5y \\ z+x \end{pmatrix}$$

Figura 1. Ramírez, Romero y Oktaç (2014, p.15).

Los autores muestran que además que el estudiante proporciona un ejemplo de transformación lineal, decidió demostrar por qué lo es y expuso la coordinación de los registros algebraicos y matriciales eficazmente.

Mientras que Roa-Fuentes y Oktaç (2010; 2012), proporcionan una descomposición genética del concepto, que consideró la interpretación funcional del concepto de transformación lineal. Estas autoras consideraron dos formas de construcción, una considerando el concepto de transformación (general) para después construir el concepto de transformación lineal como un caso específico. Es decir, *una transformación lineal como una función que va de un espacio vectorial en otro*. Y la segunda, donde el concepto de transformación lineal se puede ver como un caso particular del concepto de función. En este caso, se puede decir que un estudiante puede empezar a construir el concepto de transformación lineal realizando acciones que consisten en comprobar las dos condiciones de linealidad. Reflexionar sobre las acciones puede dar lugar a dos procesos que corresponden a cada una de las propiedades de linealidad. Luego de que estos dos procesos se coordinan, se construye un nuevo proceso **linealidad**. Cuando surge la necesidad de realizar acciones sobre el proceso construido, éste se encapsula para dar lugar al objeto de transformación lineal (Ver Figura 2).

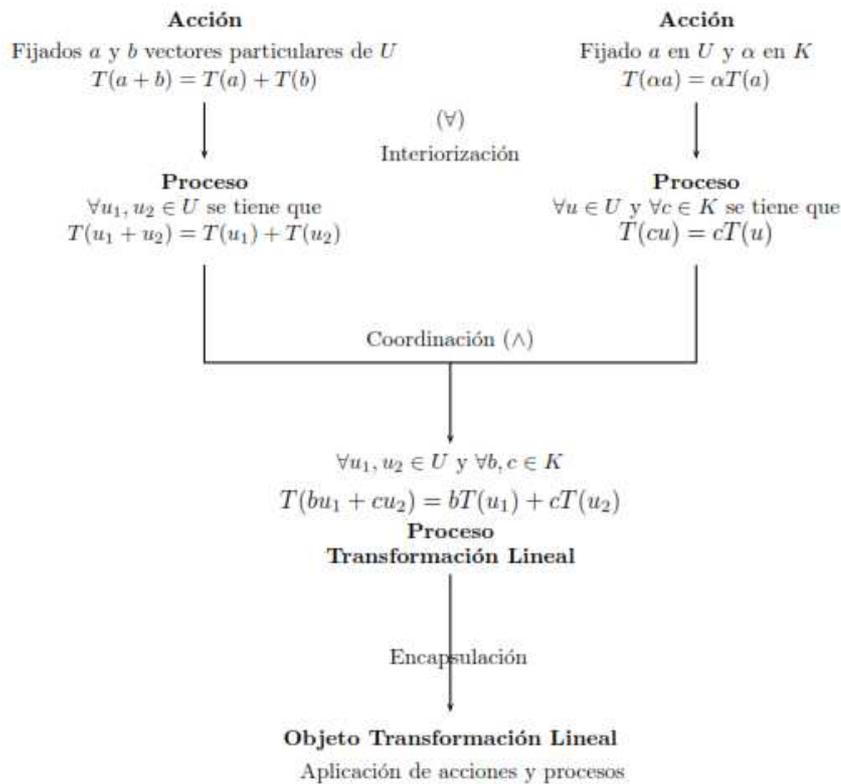


Figura 2. Descomposición Genética Refinada (Roa-Fuentes y Oktaç, 2012, p.226).

Las autoras manifiestan que durante el análisis de los resultados surge la necesidad de construir el concepto de transformación lineal de manera paralela con otros, tales como, el concepto de base. También muestran la importancia de involucrar un análisis más específico sobre la naturaleza del campo sobre el cual están definidos los espacios vectoriales.

### Planteamiento del Problema

El álgebra lineal es una rama de las matemáticas que más aplicabilidad tiene tanto en matemáticas como en otras áreas. En nuestro país, como en muchos otros, los estudiantes de ingenierías, matemáticas, licenciatura en matemáticas, entre otros, se enfrentan por primera vez con ella en el primer año de universidad. Para Dorier (2000), y otros investigadores franceses (Dorier, 1998; Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997; Strang, 1998) los estudiantes tienen serias dificultades para el aprendizaje del álgebra lineal, sobre todo por su naturaleza abstracta y formal.

Las dificultades que se han reportado han motivado el trabajo de grupos de investigación en el mundo, que buscan explicar cómo los individuos construyen los conceptos básicos de álgebra lineal. Por ejemplo Dubinsky (1991) y otros miembros de *Research Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés), han diseñado teorías con miras con el objetivo de plantear propuestas didácticas y metodológicas que buscan ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades al enfrentarse con los conceptos de combinación lineal, espacio vectorial, base, conjunto generador, espacio generado, transformación lineal, entre otros. Consideramos que el uso de la Teoría APOE nos permitirá determinar las estructuras mentales

necesarias para construir un esquema del concepto de transformación lineal, que tome como elementos fundamentales su representación matricial y geométrica a partir del concepto de base ordenada.

Actualmente, se cuenta con descomposiciones genéticas validadas del concepto de transformación lineal y de Base de manera independiente. Roa-Fuentes y Oktaç (2010) proponen un análisis teórico que toma la definición de transformación lineal; el análisis de datos publicados por las mismas autoras en 2012, muestra que los estudiantes utilizan la representación geométrica de la transformación lineal para comprender ciertas situaciones planteadas en un contexto puramente analítico. Además señalan la dependencia de las transformaciones lineales con el concepto de base. Este concepto fue estudiado por Kú, Oktaç y Trigueros (2008) haciendo referencia a la base de un espacio vectorial como un conjunto ordenado de vectores linealmente que lo genera. Por su parte, Maturana, Rodríguez y Parraguez (2013), investigaron las construcciones y mecanismos mentales necesarios para reconstruir el Teorema Matriz Asociada a una transformación lineal.

Por tanto es de nuestro interés estudiar la construcción del esquema de transformación lineal tomando como elemento principal el concepto de base ordenada. A partir de él analizaremos las estructuras y los mecanismos que hacen parte del esquema y que pueden dar lugar a la construcción de la representación matricial y geométrica de la transformación lineal. El análisis del rol de la base ordenada en el momento de construir una de las representaciones mencionadas de la transformación lineal, nos permitirá establecer la evolución del esquema de este concepto a través de la descripción de los niveles inter, intra y trans. Para esto tomaremos como fundamento la primera descripción de estos niveles presentada en Roa-Fuentes (2008).

Con este panorama en esta investigación nos proponemos analizar las siguientes preguntas:

- ¿Qué estructuras (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, tematización) debe construir un individuo para lograr un esquema de transformación lineal?
- ¿A través de qué mecanismo la base como *proceso*, determina la representación de una transformación lineal?
- ¿Qué clase de situaciones matemáticas deben abordarse en un curso regular de Álgebra Lineal para potenciar la construcción de dicho *esquema*?

De estas preguntas se desprenden los siguientes objetivos: El primero es construir en términos de la Teoría APOE un esquema validado de transformación lineal que tome como elementos fundamentales su representación matricial y geométrica a partir del concepto de base. Y el segundo, diseñar con base en el análisis teórico propuesto un modelo de clase que incluya elementos curriculares y didácticos que motiven la construcción exitosa de los estudiantes del esquema de transformación lineal en cursos regulares de álgebra lineal.

### **Teoría APOE**

La Teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una teoría constructivista que toma como marco de referencia la teoría de Piaget, principalmente en el concepto de *abstracción reflexiva*, logrado para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños; Dubinsky extiende esta idea al análisis cognitivo de conceptos matemáticos que se estudian en un nivel escolar superior (Dubinsky, 1991).

Dubinsky (1991) considera cinco tipos de abstracción reflexiva: la interiorización, la coordinación, la encapsulación, la generalización y la reversión. Para la Teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático está condicionada por el “paso” que un individuo logra dar entre concepciones acciones, procesos y objetos, para lograr finalmente una estructura general de su conocimiento en esquemas. Esta teoría da información acerca de las estructuras mentales y de los mecanismos mediante los cuales éstas se logran cuando una persona construye su conocimiento matemático al tratar de solucionar situaciones matemáticas. En especial es útil para analizar conceptos matemáticos avanzados; así como también puede ser utilizada para explicar las dificultades que los estudiantes presentan al construir un concepto o noción matemática.

En la Teoría APOE, la herramienta que permite describir la manera como se construye el conocimiento es la *Descomposición Genética*, ya que describe aspectos constructivos de una porción de conocimiento matemático, que además se espera determine aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza de dicho conocimiento (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996). La descomposición genética es un camino cognitivo que explica las relaciones que se deberían dar entre las estructuras (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, tematización, generalización y reversión) para que un individuo logre construir un concepto y/o noción matemático.

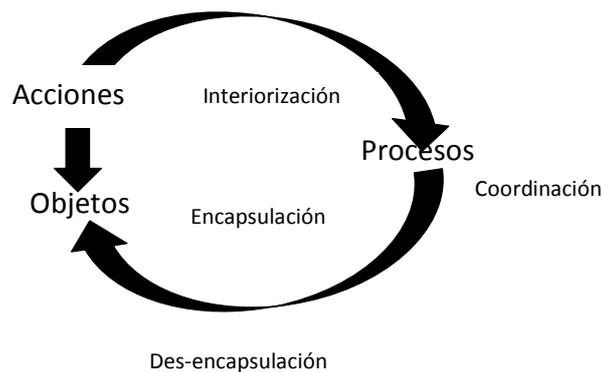


Figura 3. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Asiala et al., 1996, p.9).

Como puede verse en la *Figura 3*, cuando un individuo inicia la construcción de un concepto o noción matemática realiza transformaciones (acciones y procesos) sobre objetos existentes Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014); para la teoría APOE, una Acción es una transformación de un objeto que es el resultado de estímulos externos y por lo general es realizada paso a paso por el individuo.

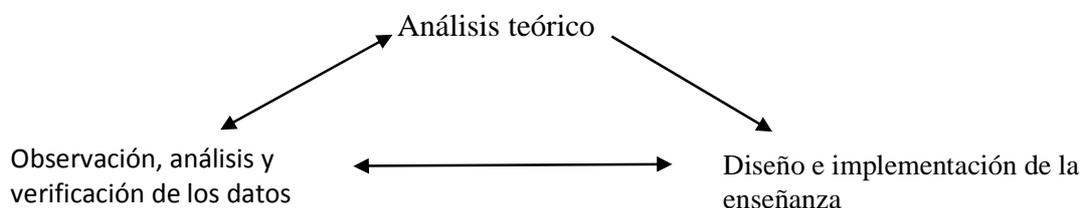
Cuando el individuo puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él, ha empezado a interiorizar dichas acciones en un Proceso. De esta manera, el individuo podrá conocer un resultado sin tener que realizar la totalidad de los cálculos; además será capaz de invertir los pasos de una determinada transformación sin tener que volver a realizarlos.

El Objeto es el resultado de la encapsulación de un proceso. Es decir, el individuo piensa en el proceso como un todo y, realiza y construye transformaciones sobre su totalidad.

Arnon et al. (2014) describen el esquema de un individuo sobre un concepto matemático como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están unidos por algunos principios o relaciones generales para formar una estructura en la mente del individuo que puede ser ejercida sobre una situación problemática que implica ese concepto.

#### **Método: Paradigma de investigación de la Teoría APOE**

La Teoría APOE proporciona un paradigma o ciclo de investigación que consta de tres elementos: Análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y observación, análisis y verificación de los datos. El ciclo de investigación pasa a través de las tres componentes como se muestra en la *Figura 5*. La aplicación de este ciclo nos permitirá obtener una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que deben construir los individuos para lograr un esquema de transformación lineal y de esta manera responder a nuestras preguntas de investigación.



*Figura 4.* Ciclo de investigación (Asiala et al., 1996).

El análisis teórico es la primera componente del ciclo de investigación de la Teoría APOE, se realiza un análisis teórico del concepto a estudiar, y aquí se hace un análisis de las construcciones mentales que debe desarrollar un estudiante para la comprensión de dicho concepto. Este análisis nos lleva a la construcción e implementación de una estrategia de enseñanza, con el fin de que los estudiantes logren alcanzar las construcciones mentales propuestas en el análisis teórico; en base a la descomposición genética obtenida se diseñan unas actividades que se implementarán en la clase y para finalizar, a raíz de la aplicación de diseños de enseñanza se obtienen datos que se analizan desde la Teoría APOE, en algunos casos es necesario refinar la descomposición genética obtenida en el análisis teórico.

A continuación describiremos en más detalle cada una de las componentes:

1. *Análisis teórico:* El ciclo parte de un análisis teórico del concepto matemático y para ello tiene en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores (estudiante y/o profesor), exámenes diagnóstico y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que permitan obtener información sobre cómo se estructura el concepto, para luego determinar un camino posible para la construcción de dicho concepto. De este análisis surge una descomposición genética, que como lo mencionamos anteriormente, es un camino que nos muestra cómo un individuo puede construir un concepto matemático en términos de las construcciones y mecanismos mentales (Roa, 2008).

En nuestro caso, el análisis de libros de texto se basa en estudiar el concepto de Transformación Lineal y en cómo está relacionado con el concepto de base; además de determinar cuál es el rol que juega en dicha relación la representación matricial y la

representación geométrica (en el caso de las transformaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ ). Por otra parte, como hemos mencionado anteriormente, nos basamos principalmente en las descomposiciones genéticas que ya han sido estructuradas sobre los dos conceptos de interés.

Todo esto sumado a la experiencia de las investigadoras como profesoras y estudiantes nos permitirá establecer de manera hipotética las relaciones que se destacan en la construcción del Esquema de Transformación Lineal. De este análisis teórico obtenemos una descomposición genética preliminar que nos permitirá hacer los diseños de los instrumentos que aplicaremos y una vez realizado el ciclo completo se determinará un análisis más refinado teniendo en cuenta el trabajo que logran desarrollar los estudiantes. Damos lugar a la siguiente componente de investigación.

2. *Diseño y aplicación de instrumentos*: La segunda componente del ciclo de investigación tiene que ver con el diseño y la aplicación de instrumentos basados en los análisis teóricos (Asiala, et al., 1996). Después de tener la descomposición genética preliminar necesitamos documentarla para validarla o refinarla. Por ello es necesario diseñar y aplicar instrumentos que permitan identificar las construcciones mentales señaladas en la descomposición genética y aquellas que no se hayan incluido pero que sean necesarias según los procedimientos realizados por los estudiantes (Roa, 2008).

Nuestro interés es realizar el ciclo completo, es por ello que a partir del análisis teórico no solo queremos aportar una descomposición genética del Esquema de Transformación Lineal, sino que además buscamos hacer sugerencias de tipo didáctico sobre cómo se debe desarrollar en un curso de Álgebra Lineal el concepto de Transformación Lineal y además también cuestiones de tipo curricular para que muestre que los conceptos no se construyen de forma lineal sino que hay conexiones entre ellos que deben irse estableciendo previamente y dentro de esas conexiones pensamos que va a jugar un papel importante la representación matricial y en algunos casos su representación geométrica.

Entonces, a partir de la descomposición genética preliminar se realizará un diseño de clase y el desarrollo de dichas actividades serán trabajadas por tres profesores dentro de un curso regular, con estudiantes de primer semestre de ingeniería y licenciatura en matemáticas. Como se mencionó anteriormente, nos permitirán evidenciar las construcciones mentales de los estudiantes.

3. *Análisis y verificación de los datos*: Por último, la tercera componente del ciclo de investigación es el análisis y verificación de los datos. En esta componente se analizan los datos empíricos obtenidos en la componente anterior. Los datos obtenidos se analizan desde la descomposición genética preliminar teniendo en cuenta los elementos que no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas en la descomposición genética preliminar no se perciben. Después de este análisis obtenemos una descomposición genética refinada (Roa, 2008).

En esta componente con base en los análisis obtenidos en el aula se hace una reestructuración del análisis teórico, haremos entrevistas a los participantes que estuvieron en esos eventos controlados de acuerdo a los resultados obtenidos en esta se validarán los diseños de clase y como se mencionó anteriormente se obtendrá una descomposición genética refinada del Esquema de Transformación Lineal.

### Consideraciones finales

Los alcances de nuestro proyecto se relacionan con la construcción de materiales de clase, que sean viables en el aula regular de los cursos básicos de Álgebra Lineal. Esto a partir del estudio de las estructuras y mecanismos mentales que propone la Teoría APOE asociados al concepto Transformación Lineal. La aplicación completa del ciclo de investigación propuesto por la teoría, que se constituye en el método de nuestra investigación, permite construir una descomposición genética que apoye el diseño de materiales de clase para potenciar la construcción exitosa de dicho concepto.

Con esta investigación, esperamos obtener un Esquema validado de Transformación Lineal que tome como elementos fundamentales su representación matricial y geométrica a partir del concepto de base. Este a su vez nos dará información clara sobre la forma en que los estudiantes construyen el concepto de Transformación Lineal y la relación de este concepto con otros como el de base ordenada y la matriz de la transformación.

Para ello diseñaremos un modelo de clase que incluya elementos curriculares y didácticos que motiven la construcción exitosa de los estudiantes del Esquema de Transformación Lineal en cursos regulares de Álgebra Lineal. De esta manera también estaremos aportando a la Teoría APOE una forma de estudiar el concepto de Transformación Lineal, por medio de la integración de los conceptos de Transformación Lineal y base ordenada a través de las relaciones entre las diferentes estructuras que determina la construcción del Esquema.

### Bibliografía y referencias

- Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *Apos theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Asiala, et al., 1996, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. Research in Collegiate Mathematics Education, II. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.
- Clark, J. M., F. Cordero, J. Cottrill, B. Czarnocha, D. J. DeVries, D. St. John, G. Toliás, & D. Vidakovic (1997), “Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule”, *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 345-364.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). “Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema”. *The Journal for Mathematical Behavior*, 15, 167-192.
- Dorier, J. (2000). Epistemological analysis of the theory of vector spaces. In J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers (pp. 6-11).
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Holland: Reidel.
- Kú, D., Trigueros, M., & Oktac, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.
- Maturana, I., & Parraguez, M. (2013). APOE: Una perspectiva cognitiva para el aprendizaje de la matriz asociada a una transformación lineal. En *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 1798-1807). CIBEM 2013, ISSN 2301-0797, Montevideo-Uruguay.

- McDonald, M. A., Mathews, D., & Strobel, K. (2000). Understanding Sequences: A Tale of Two Objects. En E. Dubinsky, J. J. Kaput, & A. H. Schoenfeld (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*(8), 7-102. Providence, R.I., AMS y Washington MAA.
- Molina, J., & Oktac, A. (2007). Concepciones de la Transformación Lineal en un Ambiente Geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273.
- Okaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), 373-385.
- Ramírez, O., Romero, C., & Oktac, A. (2014). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de Transformaciones Lineales en el plano. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, xx-xx.
- Roa, S. (2008). Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto de transformación lineal (Tesis de maestría no publicada). CINVESTAV, México.
- Roa-Fuentes, S., & Okaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto Transformación Lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Roa-Fuentes, S., & Okaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199-232.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. In J-L Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209 – 246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Trigueros, M. (2000). Students' conceptions of solution curves and equilibrium in systems of differential equations. In *Proceedings of the 22nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education I* (pp. 93-97). Columbus, OH.
- Trigueros, M. (2005) La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), pp. 5-31.
- Uicab, R., & Okaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 459-490.