Álgebra na Educação Básica Brasileira e a transição entre as diferentes etapas escolares

Valdir **Bezerra**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
vadir.bezerra@gmail.com
Renato **Ignácio**
Universidade Federal de Campina Grande
Brasil
renatosignacio@gmail
Marlene Alves **Dias**
Universidade Anhanguera
Brasil
alvesdias@ig.com.br

Resumo

Neste trabalho, apresentamos parte da pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra na educação básica no Brasil considerando a transição entre as três etapas que compõem o ensino obrigatório, ou seja, do inicio da alfabetização até o final do ensino médio. O objetivo é identificar as relações institucionais existentes e as relações pessoais esperadas dos estudantes para compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes, em particular, aqueles que terminam o ensino secundário. Para tal, utilizamos a TAD de Chevallard e as noções de quadro e mudança de quadros de Douady e níveis de conhecimento esperado dos estudantes segundo definição de Robert. O estudo realizado segue a metodologia das pesquisas qualitativa, documental e estudo de multiplos casos, esse último analisado por meio de um teste diagnóstico. Os resultados mostram que a tendência em tratar a álgebra como aritmética generalizada conduz os estudantes a um confinamento no quadro da aritmética.

Palabras chave: álgebra, ensino, aprendizagem, relações institucionais, relações pessoais, ostensivos, não ostensivos.

Introdução

Questões referentes às dificuldades, potencialidades e desafios do ensino e aprendizagem da álgebra originam um grande número de publicações em eventos e revistas científicas. Cremos que há ainda muito para se explorar, principalmente, devido às inúmeras mudanças que ocorrem na sociedade, fazendo com que repensemos continuamente a abordagem dos conteúdos matemáticos no processo de ensino aprendizagem.

Partimos de uma situação vivenciada e relatada por um dos autores desse artigo, a saber: para uma turma uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental anos iniciais, o então professor propos uma tarefa como desafio para que os alunos resolvessem. O desafio era baseado em um problema muito comum no ensino de sistemas de equações, que ocorre com frequência, no 8º ano do Ensino Fundamental anos finais. O desafio versava sobre uma fazenda que entre os animais que lá habitavam, tinham coelhos e galinhas. Informou-se aos alunos que haviam 35 animais, entre galinhas e coelhos, e que, além disso, haviam 94 pés. Logo, perguntou-se quantos coelhos e galinhas haviam na fazenda.

A hipótese do professor é que tal problema não seria resolvido com facilidade pelos alunos do 4o ano, pois não tinham os conhecimentos algébricos necessários para desenvolver a solução com facilidade, mas o mesmo foi surpreendido com as respostas dos alunos e também com a técnica de resolução dos mesmos. Os alunos mostraram que era possível resolver o desafio proposto apenas com contagens e ideias aritméticas e utilizando representações gráficas (desenhos dos animais). Uma das soluções que podemos citar é o desenho de 35 animais, para os quais foram colocados dois pés em todos e após isso foram distribuídos os restantes podendo então verificar quais eram coelhos e quais eram galinhas.

No entanto, fomos surpreendidos com outros tipos de resoluções, as quais não estamos habituados, pois, em geral, não trabalhamos com os alunos do ensino fundamental anos iniciais e raramente são proporcionalizados espaços de discussão entre os professores das diferentes etapas escolares.

Nosso interesse por estudar a álgebra na educação básica, em particular, na transição entre os ensinos fundamental anos iniciais (6 – 10 anos), fundamental anos finais (11 – 14 anos) e médio (15- 17 anos), é de compreender as dificuldades dos estudantes ao aprender álgebra básica.

Uma das possibilidades para a compreensão das dificuldades, potencialidades e desafios no processo de ensino aprendizagem da álgebra é entender a evolução histórica deste domínio, em particular, como se deu o desenvolvimento da linguagem algébrica desde seu início até a forma como a mesma é utilizada atualmente.

A álgebra antes e pós Viéte

Descrever a evolução histórica da álgebra demandaria grande estudo, o que não seria possível concluir neste trabalho, por isso optamos por fazer uma exposição breve da história do desenvolvimento do conhecimento algébrico divindo em dois momentos: antes e após Viète.

Essa breve descrição da evolução histórica da álgebra segundo texto de Robinet (1989) e o estudo do artigo de Radford (1991) sobre a álgebra pré simbólica nos conduziu a uma reflexão sobre as dificuldades que encontramos atualmente quando no ensino superior precisamos utilizar elementos da álgebra elementar que não são disponíveis e que levam nossos estudantes a um grande desinteresse pelos cursos superiores em que a matemática se apresenta como uma ferramenta importante para o seu desenvolvimento.

Baseado na divisão citada acima, iniciamos com a exposição da situação da álgebra antes de Viète, que corresponde a vários séculos da antiga Babilônia e Egito, nos quais foram encontrados problemas de resolução algébrica. Um exemplo de problema algébrico no Egito (por volta de 1700 antes de Cristo) seria "Pães de 10, 1000 trocados por pães de 20 e 30. Quantos?" (Problema 76 do Papirus de Rhind), que na linguagem algébrica atual podemos escrever: $1000/10 = x/20 + x/30$. É interessante observar que neste período o discurso era utilizado na resolução de problemas, logo existia pouca formalização. Essa formalização aparecerá nos trabalhos de Diophante 300 anos depois de Cristo conforme Robinet (1989).

O que podemos destacar nos trabalhos de Diophante é que ele utilizava o simbolismo para abreviar a escrita, mas não operava sobre o simbolismo para resolver problemas. Além disso, para a demonstração ele utilizava exemplos numéricos e ainda o discurso. Aproximadamente três séculos mais tarde os indianos incluíram suas contribuições ao formalismo, quando elaboram o sistema de numeração decimal. São encontrados, ainda, em alguns documentos a inserção de mais símbolos para representar incógnitas e suas variações, mas não muda muito em relação à utilização destes símbolos para resolver problemas, quando comparado ao período anterior, pois o apoio sobre o discurso ainda está presente na resolução de pequenos problemas.

Na continuidade do estudo sobre as contribuições dos indianos, Robinet (1989) afirma que é possível reconhecer premissas do cálculo algébrico e teoria das equações, uma vez que os mesmos utilizam os números irracionais e negativos. Mas, segundo a autora são os árabes que farão avançar o cálculo algébrico, com a resolução de problemas "teóricos" de álgebra. Alguns árabes se destacaram neste avanço como Al Kwarizmi, Abu Kamil, Al Karagi e Al kayyam, todos trabalhando com teoria das equações, transpondo os cálculos aritméticos para os cálculos com as incógnitas.

Assim, podemos considerar o período de atuação dos árabes como o período transitório para o segundo momento de nosso comentário sobre a evolução histórica da álgebra, que foi indicado por Robinet (1989) como o período após Viète. É oportuno afirmar, que as descobertas de Viète não surgiram do nada, mas foram preparadas por matemáticos antigos e pelos árabes. Ainda segundo Robinet (1989) Viète também foi influenciado por alguns trabalhos de matemáticos europeus do século XV, que de um lado redescobrem os matemáticos gregos e por outro se iniciam nas matemáticas árabes e cujos trabalhos foram desenvolvidos em duas direções, a saber: sobre o simbolismo e sobre a teoria das equações.

Assim sendo, Viète trouxe ganhos ao desenvolvimento da álgebra, pois com ele simbolizar indica identificar coisas indeterminadas e operar sobre as equações algébricas. Inicialmente, a idéia de Viète parece pouco favorável, pois os símbolos não ajudavam em equações de grau muito elevado, mas a simbologia foi evoluindo de forma a possibilitar que o cálculo algébrico atingisse seu pleno desenvolvimento.

Observamos nesse breve trecho, que a gênese da álgebra ocorre por meio do estudo de problemas que eram resolvidos de forma aritmética, mesmo utilizando uma simbologia, que servia apenas de ferramenta para facilitar a escrita do problema. Após vários séculos chegou-se a resolução de problemas utilizando plenamente a simbologia e introduzindo também as operações.

Assim, com base na experiência relatada acima e no recorte histórico que fizemos da evolução da álgebra consideramos que é importante verificar o que acontece atualmente nos livros didáticos em relação aos problemas associados à introdução da álgebra na educação básica.

Dessa forma, nosso objetivo é analisar as praxeologias existentes em livros e materiais didáticos do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental, verificando a necessidade ou não da resolução algébrica dos problemas propostos. Certamente, nesse artigo apresentamos apenas parte desse trabalho uma vez que explicitaremos na metodologia da pesquisa qual o material analisado que fundamenta os resultados e considerações que já somos capazes de avançar.

Assim, para alcançar o objetivo proposto nos baseamos na Teoria Antropológica do Didático Chevalllard (1992, 1994, 1999), mais especificamente, nas noções de relações institucionais e pessoais, praxeologia e objetos ostensivos e não ostensivos, que explicitaremos na seção a seguir e nas noções de quadro e mudança de quadros definidas por Douady (1984, 1992) e de níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1998).

Referencial Teórico

A Teoria Antropológica do Didático de Chevallard é central na pesquisa e para esse trabalho utiizamos as noções de relações institucional e pessoal que são definidas em Chevallard (1992, 1994, 1998, 1999) e Bosch e Chevallard (1999) ao considerarem que a organização do estudo supõe uma modelagem mínima da estática e sobretudo da dinâmica cognitiva, assim, na perspectiva antropológica a primeira noção fundamental é a de objeto, que corresponde a toda entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo. Segundo o autor, a noção de objeto é a mais geral, pois tudo é objeto, inclusive as pessoas. Após explicitar o que significa objeto, Chevallard (1998) introduz a segunda noção fundamental que é a de relação pessoal de um individuo *x* com um objeto *o*, que segundo o autor corresponde a todas as interações, sem exceção, que o individuo *x* pode ter com o objeto *o*, isto é, *x* pode manipulá-lo, utilizá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele, etc. Assim, dizemos que *o* existe para *x* se ele tem uma relação pessoal com *o*, ou ainda se sua relação pessoal com este objeto é não vazia, o que se indica por $R(x, o) \neq \phi$.

Após definir universo cognitivo como o conjunto das relações pessoais não vazias Chevallard (1992, 1998) introduz a noção de instituição *I*, isto é, um dispositivo social que permite e impõe às pessoas que vêm a ocupar diferentes posições oferecidas na mesma, envolvendo maneiras próprias de fazer, e mais amplamente, adotar praxeologias determinadas. Isso conduz o autor a definir relação institucional a *o* em posição *p*, a relação com o objeto *o*, que deveria ser, idealmente, aquela dos sujeitos de *I* em posição *p*. Dizer que *x* é um bom sujeito de *I* em posição *p*, é o mesmo que afirmar que a relação pessoal do indivíduo *x* está em conformidade ou é adequada à relação institucional em posição *p*.

Sendo a noção de praxeologia, que indica a conformidade ou adequação do individuo *x* em relação ao objeto *o* para uma posição *p* em uma instituição, passamos aquí a sua definição, ou seja, segundo Chevallard (1999) uma praxeologia corresponde aos tipos de tarefas (T) que para serem executadas necessitam de uma maneira de fazer que o autor denomina técnica (τ). A associação tarefa-técnica é definida como um saber fazer que não sobrevive isoladamente, solicitando um ambiente tecnológico-teórico, que corresponde a um saber formado por uma tecnologia (θ), ou seja, um discurso racional que justifica e torna a técnica compreensível, e de uma teoria (Θ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada. O sistema composto por tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria [T, τ, θ, Θ] constitui o que Chevallard denomina praxeologia, sendo ela que articula uma parte prático técnica, que corresponde ao saber fazer, a uma parte tecnológica teórica, que corresponde ao saber. A base de toda praxeologia é constituída por um sistema de tarefas em torno das quais se desenvolvem e se organizam técnicas, tecnologias e teorias.

Assim, Chevallard (1994), após observar que toda a atividade humana pode ser decomposta em certo número de tarefas e que para cada tipo de tarefa existe uma técnica, questiona sobre de que ingredientes é composta essa técnica e em que consiste sua execução, o que o conduz a estabelecer uma distinção fundamental entre dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os objetos não ostensivos. Dessa forma, Chevallard (1994) define os objetos ostensivos como aqueles que têm para nós uma forma material, e os objetos não-ostensivos, denominados usualmente de noções, conceitos, ideias, etc., como aqueles que não podem ser manipulados, mas só podem ser evocados por meio da manipulação dos ostensivos associados. Chevallard (1994) observa ainda que existe uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos, pois os ostensivos são manipulados por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto que os não ostensivos são evocados por meio da manipulação dos ostensivos.

Além dos noções acima descrita da TAD utilizamos como referencial teórico de apoio as noções de quadro e mudança de quadro conforme definição de Douady (1992), segundo a autora um quadro é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. As mudanças de quadro, segundo a autora, correspondem a um meio de obter formulações diferentes de um problema que sem ser, necessariamente, equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação.

Finalmente, consideramos a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1998), a saber: nível técnico que corresponde às ferramentas e definições utilizadas para resolver uma determinada tarefa; nível mobilizável que corresponde a um início de justaposição de saberes de certo quadro, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e objeto do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido; nível disponível que corresponde, a saber, responder corretamente o que é proposto sem indicações. Nesse nível, existe a possibilidade de dar contra exemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro, aplicar métodos não previstos.

Robert (1998) ressalta que esse nível está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que as conhece e que para ele servem de terreno de experimentação, o que conduz a ser capaz de fazer questionamentos. Como essas situações de referência dependem da forma como os conhecimentos são organizados, esses podem funcionar para uma única tarefa ou possibilitam a realização de resumos que por sua vez auxiliam na execução de diversas tarefas em que esses conhecimentos estão em jogo. A grande diferença entre os conhecimentos mobilizáveis e disponíveis está na organização dos mesmos para os estudantes e, principalmente, na forma como são encontrados nos enunciados, pois os mobilizáveis são pedidos explicitamente nos enunciados enquanto que os disponíveis devem ser reconhecidos pelos estudantes.

Metodologia da Pesquisa

Esse estudo está centrado na análise de documentos oficiais para determinar as relações institucionais existentes e as relações pessoais esperadas dos estudantes, seguindo assim as técnicas da pesquisa documental que segundo Lüdke e André (1986) está associada à pesquisa qualitativa, pois permite complementar informações obtidas por outras técnicas e/ou desvendar aspectos de um tema ou problema.

Dessa forma, os documentos analisados são o caderno do professor para o 7º e 8º anos do ensino fundamental anos finais, que corresponde ao material distribuido pela Secretaria estadual da educação como elemento que compõe a implementação do currículo do estado de São Paulo iniciada em 2008 e nos quais são introduzidas as primeiras noções de álgebra e os relatórios pedagógicos da mesma secretaria publicados anualmente após a avaliação anual do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP para a qual a Matemática é aplicada para todos os alunos do 3º e 5º anos do ensino fundamental anos inciais (6 – 10 anos), 7º e 9º anos do ensino fundamental anos finais (11 – 14 anos) e no 3º ano do ensino médio (15 – 17 anos).

Analisamos, ainda, um dos livros didáticos de matemática dos 7º e 8º anos do ensino fundamental, anos finais, indicado para o pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, que distribui os livros avaliados após escolha dos professores para todas as escolas do país. O livro analisado é o de Dante (2012) e a opção por essa obra se deve ao fato que a mesma tem sido indicada desde o inicio da avaliação dos livros didáticos pelo Ministério da Educação e Cultura.

Na análise dos documentos foram estudados os problemas propostos aos estudantes e se verificou quais as técnicas propostas e aquelas que poderiam ser utilizadas em função dos conhecimentos retrospectivos dos estudantes, ou seja, verificamos se a álgebra era necessária ou se correspondia a uma ferramenta para facilitar a escrita, como ocorre no seu desenvolvimento histórico.

A partir dos dados encontrados e em função da experiência de um dos autores desse trabalho, foi proposto um teste diagnóstico junto a um grupo de estudantes do 5º ano do ensino fundamental anos iniciais para identificar quais as técnicas por eles utilizadas para o desenvolvimento das tarefas propostas e compará-las com os outros grupos, ou seja, com os resultados apresentados pelos estudantes do 1º e 2º anos do ensino médio, que segundo nossas expectativas deveriam apresentar técnicas algébricas após os quatro anos que passaram no ensino fundamental anos finais.

Os grupos de estudantes foram escolhidos aleatóriamente, pois consideramos que os estudantes do 5º ano utilizariam apenas conhecimentos aritméticos e que os estudantes do ensino médio seriam capazes de utilizar ferramentas algébricas para facilitar a solução das questões propostas.

Isso justifica a escolha do teste diagnóstico que segundo Yin (2005) corresponde a um estudo caso, pois o autor define este método de pesquisa como sendo uma investigação empírica, que abrange planejamento, técnica de coleta de dados e análise dos mesmos. Nesse estudo, o teste diagnóstico foi planejado para ser aplicado em diferentes grupos com o objetivo de comparar as técnicas utilizadas pelos estudantes em função das relações institucionais existentes quando se introduz a álgebra no ensino fundamental. Esse teste era composto de duas questões que possibilitavam tanto a solução aritmética quanto a algébrica, permitindo assim comparar as relações pessoais dos grupos de estudantes analisados e as marcas das relações institucionais sobre essas relações pessoais.

Apresentamos a seguir os resultados da análise dos documentos indicados acima e do teste diagnóstico.

Resultados da análise das relações institucionais

Análise das relações institucionais existentes

Iniciamos pela análise do livro didático de Dante (2012) por se tratar de uma obra usada em escolas brasileiras em âmbito nacional uma vez que está entre as dez (10) indicadas e ditribuidas pelo Ministério da Educação.

As obras de Dante (2012) – "Projeto Teláris – Matemática"

Analisamos os livros do 7º e 8º anos do ensino fundamental anos finais, pois as expressões algébricas, as equações do primeiro grau e os sistemas de equações lineares são introduzidas no 7º ano e revisitadas no 8º ano, que corresponde ao momento em que se introduz ainda as noções de polinômios.

Os tipos de tarefas e técnicas privilegiados com suas respectivas tecnologias e teorias, isto é, as praxeologias $\wp$ desenvolvidas na obra são apresentadas na figura 1:

$\wp_1$ - Tipo de tarefa *T1*: Dada uma expressão algébrica, calcular seu valor numérico para um valor dado. *Técnica,tecnologia*: substituir o valor dado na expressão e efetuar as operações indicadas. *Teoria*: regras e leis das operações aritméticas e introdução da noção de incógnita.

$\wp_2$ - Tipo de tarefa *T2*: Resolver equações do primeiro grau. *Técnica,tecnologia*: utilizar as propriedades da adição e multiplicação, as operações inversas e as propriedades da igualdade (relação de equivalência e princípios aditivo de multiplicativo da igualdade). *Teoria*: teoria das equações.

$\wp_3$ - Tipo de tarefa *T3*: Representar expressões por meio de letras, por exemplo, a metade de um número mais seus dobro. *Técnica-tecnologia*: passagem do ostensivo da língua materna para o ostensivo algébrico. *Teoria*: álgebra e propriedades dos números.

$\wp_4$ - Tipo de tarefa *T4*: Situação intramatemática, em geral, utilizando conhecimentos de geometria. *Técnica-tecnologia*: passagem do ostensivo da língua materna e numérico para o ostensivo equação e resolução de uma equação do primeiro grau. *Teoria*: teoria das equações.

$\wp_5$ - Tipo de tarefa *T5*: Situação extramatemática, em geral, associadas ao cotidiano. *Técnica,tecnologia*: passagem dos ostensivos da língua materna e numérico para o ostensivo equação e resolução de uma equação do primeiro grau. *Teoria*: teoria das equações.

$\wp_6$ - Tipo de tarefa *T6*: Determinar a geratriz de uma dizima periódica *Técnica-tecnologia*: passagem dos ostensivos dízima periódica (0,33333….) para o ostensivo algébrico fracionário (1/3) por meio de uma equação e resolução de equação. *Teoria*: teoria das equações.

$\wp_7$ - Tipo de tarefa *T7*: Resolver uma equação do primeiro grau com duas incógnitas. *Técnica,tecnologia*: Escolher um valor para uma das incógnitas e determinar a outra, ou seja, determinar um dos pares ordenados solução da equação. *Teoria*: teoria das equações.

$\wp_8$ - Tipo de tarefa *T8*: Situação extramatemática, em geral, associadas ao cotidiano. *Técnica,tecnologia*: passagem dos ostensivos da língua materna e numérico para o ostensivo sistema de equações e resolução do sistema pelos métodos da substituição, adição e gráfico. *Teoria*: teoria das equações e representação de pontos no sistema cartesiano ortogonal.

$\wp_9$ - Tipo de tarefa *T9*: Situação intramatemática, em geral, utilizando conhecimentos de geometria. *Técnica,tecnologia*: passagem do ostensivo da língua materna e numérico para o ostensivo sistema de equações e resolução resolução do sistema pelos métodos da substituição, adição e gráfico. *Teoria*: teoria das equações e representação de pontos no sistema cartesiano ortogonal.

$\wp_{10}$ - Tipo de tarefa *T10*: Discussão de um sistema de duas equações do primeiro grau e duas incóginitas. *Técnica,tecnologia*: passagem do ostensivo de algébrico de equação para o ostensivo gráfico. Escolher valores para uma das incógnitas, determinar a outra e representar os pares ordenados no sistema cartesiano ortogonal. *Teoria*: teoria das equações e representação de pontos no sistema cartesiano ortogonal.

Figura 1. Praxeologias desenvolvidas nas obras de Dante (2012).

A análise das praxeologias matemáticas desenvolvidas na obra de Dante (2012) nos permitiu observar que:

As tarefas de tipos *T1* e *T6* são enunciadas nos quadros algébrico e numérico respectivamente e a solução das mesmas exige conhecimento da técnica de determinação do valor numérico para *T1* e das regras e leis para solução de uma equação do primeiro grau para *T6*, ou seja, para ambas o nível esperado do trabalho dos estudantes é o técnico.

As tarefas de tipos *T2*, *T7* e *T10* são enunciadas no quadro algébrico e para resolvê-las é preciso mobilizar conhecimentos sobre as regras e leis do cálculo algébrico para *T2* e *T7* e da representação gráfica de equações para *T10*. Assim, o nível esperado dos estudantes para as solução dessas tarefas é o mobilizável.

A tarefa de tipo *T3* é enunciada no quadro da aritmética e exige a passagem para o quadro algébrico, sendo este pedido explícitamente o que corresponde à mobilização do conhecimento esperado pelos estudantes.

As tarefas de tipos *T4*, *T5*, *T8* e *T9* são enunciadas, em geral, no quadro geométrico e de situações contextualizadas e espera-se que os estudantes utilizem o quadro algébrico para a sua solução. Mas, muitas vezes essas tarefas podem ser resolvidas no quadro aritmético, dependendo dos conhecimentos disponíveis dos estudantes e da interpretação que os mesmos são capazes de efetuar em relação ao enunciado da tarefa.

Observamos que nas obras de Dante (2012) os tipos de tarefas utilizados para a introdução às noções de equações e sistemas de equações lineares é adequado, mas é preciso ficar atento ao fato que as tarefas de tipos *T4*, *T5*, *T8* e *T9* para as quais o nível esperado dos estudantes é o disponível, muitas delas podem ser resolvidas no quadro aritmético o que pode ser uma dificuldade para a introdução da álgebra uma vez que os estudantes não percebem o interesse de trabalhar no quadro algébrico.

O caderno do professor

O caderno do professor (São Paulo, 2014) é um dos documentos que compõe o currículo do estado de São Paulo. Neste material a álgebra é introduzida no 7º ano por meio da identificação de padrões em diversos tipos de sequências até aquelas em que é possível utilizar letras para representá-las e, consequentemente, generalizá-las seguidas da determinação do valor numérico de formulas e equações para valores dados. A partir deste estudo é indicada a apresentação da resolução de equações por meio da analogia entre equilíbrio na balança e igualdade na equação, técnica que será aplicada para o estudo das razões e proporções. No 8º ano a noção de equação é revisitada e propõe-se novamente os trabalho com sequências e generalização das mesmas. Após o desenvolvimento de fatoração e produtos notáveis são propostos problemas aritméticos para serem resolvidos utilizando conhecimentos de álgebra e geometria, a ênfase é dada aos problemas que envolvem sequências e generalização das mesmas. Na sequência são propostos problemas para serem resolvidos por meio de equações e sistemas de equações, para estes últimos são indicados os métodos da adição, substituição e gráfico. Para o método gráfico é apontado o estudo das possíveis soluções de um sistema de duas equações lineares e duas incógnitas.

Assim, os tipos de tarefas e técnicas privilegiados com suas respectivas tecnologias e teorias são *T2* e a técnica, tecnologia proposta é o cálculo aritmético, seguido de um exemplo em que se utilizam as regras e leis do cálculo algébrico sem explicitação das propriedades que os sustentam. *T4, T5, T8, T9* e *T10* são introduzidas utilizando à aritmética e suas propriedades para na sequência indicar a possibilidade de trabalho com o cálculo algébrico que é explicitado por meio das de suas regras e leis sem associá-las às propriedades que as justificam.

É importante ressaltar que existe o caderno do aluno, no qual as atividades propostas no caderno do professor são praticamente as mesmas e que, além disso, supõe-se que os professores complementem o estudo proposto com elementos do livro didático indicado pela escola e distribuido pelo Ministério da Educação.

Resultados da análise das relações pessoais esperadas e das dificuldades apresentadas pelos estudantes

Para a análise das relações pessoais esperadas dos estudantes discutimos neste artigo apenas o resultado apresentado no relatório pedagógico da avaliação institucional SARESP do ano de 2012 para tarefas associadas às noções de equação e sistemas de equações lineares.

O material apresenta uma tarefa em que se pede a solução de uma equação do tipo ax+b=c, a saber: 2x+5=5. Trata-se de uma tarefa de tipo *T2* e da forma como é proposta o valor de x poderia ser determinado mentalmente. Observamos aqui que apenas 34,8% dos estudantes do 7º ano indicaram a alternativa correta, mesmo tendo sido considerada a possibilidade de determinar x sem cálculo quando da proposta institucional (caderno do professor) das escolas públicas do estado de São Paulo.

Neste mesmo material é indicada ainda uma tarefa do 9º ano sobre sistemas de equações lineares, ou seja, é dado o sistema $\begin{cases} x = 3y \\ y + x = 40 \end{cases}$ e se pede para resolver o sistema pelos métodos da adição ou substituição. Essas técnicas são introduzidas e utilizadas em diversas tarefas do tipo *T8* e *T9* no 8º ano.

O resultado é que apenas 21,5% dos estudantes indicam uma resposta correta, o que parece mostrar que os estudantes utilizam os métodos de resolução de sistemas de equações lineares e trabalham também com as tentativas quando em aulas, mas não são capazes de utilizar nem mesmo as técnicas quando são avaliados, pois ao desenvolver tarefas dos tipos *T8* e *T9* e não exercitar as técnicas, os estudantes acabam não sendo capazes nem mesmo de aplicar essas técnicas.

Os resultados da análise das relações pessoais esperadas dos estudantes colocam em evidência que no ensino fundamental anos finais esperava-se que os estudantes fossem pelo menos capazes de utilizar as técnicas desenvolvidas nesta etapa escolar, o que os resultados da avaliação SARESP mostram não corresponder a realidade.

Para compreender como os estudantes reagem quando são confrontados com tarefas que podem ser resolvidas tanto por meio da aritmética como da álgebra propusemos um teste diagnóstico com duas questões que correspondem à tarefas sobre sistemas de equações, a primeira podendo ser descrita algebricamente por meio de duas equações lineares a duas incógnitas, mas que também supõe soluções por meio de contagem ou tentativas e a segunda que corresponde a um sistema com duas equações sendo uma linear e a outra não linear.

Resultados do teste diagnóstico e análise das relações pessoais dos estudantes que participaram da pesquisa

Análise a *priori* e a *posteriori* do teste diagnóstico e resultados apresentados pelos estudantes que participaram da pesquisa

Foram propostas para vinte e seis estudantes do 5ºano do ensino fundamental dos anos iniciais, vinte e cinco estudantes do 1º ano do ensino e médio e cinco estudantes do 2º ano do ensino médio as mesmas tarefas, pois elas poderiam ser resolvidas utilizando diferentes técnicas. Observamos aqui que os estudantes foram convidados para participar da pesquisa e a escolha das turmas foi aleatória.

Análise da tarefa 1

Tarefa 1: Uma fábrica produz carrinhos de bebê e triciclos. Hoje, os operários produziram 11 unidades e, para montá-las, usaram 40 rodas. Quantos triciclos foram produzidos?

Técnica 1: Contagem – desenhar a quantidade total de carrinhos de bebê e triciclos e distribuir três rodas para todos eles, na sequência distribuir as rodas que sobram, o que permite determinar a quantidade de carrinhos de bebê e triciclos.
Técnica 2: Tentativa – utilizar os valores possíveis para a quantidade total de carrinhos de bebê e triciclos e considerando que um tem três rodas e o outro 4 rodas, fazer as multiplicações e somar os resultados até encontrar o par de números que satisfaz o enunciado da tarefa.
Técnica 3: Representar a tarefa por meio de um sistema de duas equações e duas incógnitas e utilizar um método de resolução de sistemas lineares.

Figura 2. Técnicas associadas às relações institucionais existentes para a tarefa 1.

Em relação à análise dos resultados das respostas encontradas na tarefa 1, podemos verificar que os estudantes que acertaram a tarefa 1 são: nove alunos do 5º ano , no 1º ano ano do ensino médio 19 estudantes acertaram e no 2º ano do ensino médio todos os cinco acertaram.

Na tabela 1 a seguir podemos ver a porcentagem de alunos que acertaram as questões distribuídos pela utilização das técnicas.

Tabela 1

Tipos de técnicas utilizadas pelos estudantes

Tarefa 1	*Técnica 1*	*Técnica 2*
5º ano do Ens. Fund.	15,4%	19,2%
1º ano do Ens. Méd.	4%	72%
2º ano do Ens. Méd.	20%	80%

Fonte: pesquisa privada. 2014.

Esses resultados mostram que os estudantes que acertaram a tarefa 1 utilizaram prioritariamente as técnicas 1 e 2. Algo, que faz sentindo quando analizamos as turmas do 5º ano do ensino fundamental, pois não foram inciados as ideias da álgebra, da utilização de sistemas de duas equações. No entanto, as turmas de 1º e 2º anos do ensino médio já tiveram contato com o método de resolução da técnica 3, e mesmo assim, priorizam a utilização das técnicas 1 e 2.

Análise da tarefa 2

Tarefa 2: Encontrar dois números cuja soma é 20 e o produto entre eles é 96.

Técnica 1: Tentativa – fazer as multiplicações e somar os resultados até encontrar o par de números que satisfaz o enunciado da tarefa.
Técnica 2: Representar a tarefa por meio de um sistema de duas equações e duas incógnitas e utilizar um método de resolução de sistemas lineares.

Figura 3. Técnicas associadas às relações institucionais existentes para a tarefa 2.

Da mesma forma que fizemos na tarefa 1, analisamos os acertos dos alunos envolvidos na pesquisa. Como resultado obtivemos que dois alunos do 5º ano responderam corretamente a tarefa 2. Em relação ao 1º ano do ensino médio tivemos como resultado que dezenove alunos responderam corretamente e por fim o 2º ano do ensino médio teve todos os alunos respondendo corretamente.

Vejamos na tabela 2 a seguir como ficou distribuído os acertos dos alunos relacionados as técnicas utilizadas para a solução da tarefa 2.

Tabela 2

Tipos de técnicas utilizadas pelos estudantes

Tarefa 1	*Técnica 1*
5º ano do Ens. Fund.	7,6%
1º ano do Ens. Méd.	76%
2º ano do Ens. Méd.	100%

Fonte: pesquisa privada. 2014.

Esses resultados mostram que na mesma perspectiva do resultado da tarefa 1, os estudantes que acertaram a tarefa 2 não utilizaram a álgebra como ferramenta para solucionar a atividade proposta.

Conclusão e perspectivas futuras

Para as relações institucionais existentes analisadas, aqui, por meio de um livro didático e do caderno do professor observamos, que entre as praxeologias encontradas as que se referem aos tipos de tarefas *T1* e *T6* correspondem a exercitar as técnicas de determinação do valor numérico de passagem de um ostensivo de representação para outro. Já as praxeologias que correspondem aos tipos de tarefas *T2*, *T3*, *T7* e *T10* estão associadas à mobilização das regras e leis do cálculo algébrico e/ou das propriedades de resolução de equações para *T2*, da mobilização da passagem do ostensivo da língua natural para o ostensivo algébrico para *T3*, da mobilização da técnica de resolução de equações com duas incógnitas para *T7* e da mobilização da passagem da representação do ostensivo de equações para o ostensivo gráfico para *T10.* As praxeologias associadas aos tipos de tarefas *T4*, *T5*, *T6* e *T9* que correspondem a aplicação dos conhecimentos sobre equações e sistemas de equações nem sempre exigem que os estudantes disponham de conhecimentos sobre o trabalho algébrico associado uma vez que muitas delas podem ser resolvidas por meio das regras e leis do cálculo aritmético, não exigindo assim conhecimentos associados à álgebra, isto é, várias tarefas propostas aos estudantes são tratadas como aritmética generalizada.

Para as relações pessoais esperadas dos estudantes sobre as noções de equações e sistemas lineares, analisadas via SARESP - 2012, observamos que os estudantes não dominam as técnicas do cálculo algébrico mesmo tendo trabalhado com tipos tarefas para as quais a solução esperada consistia na aplicação da álgebra, mesmo quando seu enunciado permite considerá-las como tipos de tarefas aritméticas.

Observamos que tanto os estudantes do 5º ano do ensino fundamental como os do 1º e 2º ano do ensino médio não recorrem à álgebra para resolver as tarefas e ambos utilizam aritmética e as técnicas de contagem e tentativa, sem explicitar o trabalho realizado, pois apresentam apenas uma série de desenhos ou cáculos. Certamente, essa forma de funcionar é adequada para os estudantes do 5º ano, mas coloca em evidência a dificuldade dos estudantes do ensino médio para utilizar a álgebra enquanto ferramenta para o desenvolvimento de outros conceitos e noções que é o objetivo do trabalho com a álgebra nessa nova etapa escolar.

Ressaltamos ainda que as relações pessoais dos estudantes do ensino médio que participaram da pesquisa não correspondem às relações institucionais existentes. Assim, nossa proposta é de trabalhar com um grupo de estudantes e seguir os mesmos desde o 5ºano até o final do 1º ano do ensino médio para verificar como um trabalho que mostre explicitamente a função da álgebra a princípio como ferramenta facilitadora para a solução dos problemas propostos na educação básica.

Referências e bibliografía

Bosch, M., & Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(1), 77-124.

Chevallard,Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique.* Recuperado em 17 de setembro de 2014 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique.* Recuperado em 17 de setembro de 2014 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (1999). *La recherche en didactique et la formation des professeurs: problématiques, concepts, problèmes.* Recuperado em 17 de setembro de 2014 de http://yves.chevallard.free.fr/

Dante, L. R. (2012). *Projeto Teláris Matemática*. São Paulo: Ática.

Douady, R.(1992). *Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir*. Recuperado em 12 de setembro de 2014 de http://www.cndp.fr/entrepot/fileadmin/docs/education_prioritaire/Maths_et_ZEP/reperes15rd.pdf

Lüdke, M., & André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Radford, L. (1991). Diophante et l'algèbre pré-symbolique. *Bulletin AMQ*, *63*(4).

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée à l'université.

Recherches en didactique des Mathématiques, 18(2), 139-190.

Robinet, J. (1989). *La genèse du calcul algébrique (une esquisse).* Paris : IREM Paris 7.

São Paulo. (2009). *Caderno do Professor*: *Matemática, Ensino fundamental.* São Paulo: Secretaria de Educação.

Yin, R. K. (2005). *Estudo de caso*: *planejamento e métodos.* Porto Alegre: Bookman.