Construcción de los conceptos partición y sumas de Riemann con Geogebra

Gonzalo **Espinoza** Vásquez.
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Chile.
gonzalo.espinoza.v@gmail.com

Resumen

Esta experiencia utiliza GeoGebra con el objetivo de que los estudiantes construyan y definan las sumas de Riemann como aproximación del área bajo una curva, además de establecer la relación entre ellas como sucesiones convergentes. La actividad dura 90 minutos, organizándose en preguntas e instrucciones que conducen a la construcción de conceptos, utilizando computadoras para las experimentaciones y deducir las relaciones mencionadas. Como resultado se tiene el aprendizaje de *partición* y *suma de Riemann* junto con su definición. Los estudiantes conjeturan la relación entre las sucesiones generadas por las sumas y la integral de la función. Las siguientes sesiones se afectan positivamente gracias al trabajo con estos elementos basales del cálculo integral. Definitivamente, el uso de tecnologías para manipulación gráfica ha facilitado la adquisición de conocimientos significativos en los estudiantes y la gestión de clases o sus planificaciones, aprovechando los tiempos disponibles para ello.

Palabras clave: NTIC, particiones, sumas de Riemann, Geogebra, Cálculo integral.

Introducción

El uso de las nuevas tecnologías de información y comunicación (NTIC), que permiten la manipulación gráfica, algebraica y numérica de objetos abstractos, es un recurso que no se debe desaprovechar pues ha posibilitado la adquisición de conocimientos significativos en los estudiantes, así como también influyen en la planificación y gestión de clases. Los recursos utilizados (computadores y software de manipulación grafica, algebraica y numérica) le dan dinamismo a las sesiones y se tornan importantes para motivar a los estudiantes a participar de la clase. Sin embargo no basta con la motivación, más bien deben participar en la construcción de su propio conocimiento.

La exposición tradicional[1] del cálculo integral comienza con las definiciones de partición, suma superior, suma inferior, refinamientos, etc. como elementos primarios que permiten la definición, por ejemplo, de la integral de Riemann. Nuestra experiencia como docentes en estos cursos nos ha permitido evidenciar dificultades en el aprendizaje de los conceptos asociados a la noción del infinito, en parte por el lugar que se da a los estudiantes en el desarrollo de los temas y por la complejidad propia de los mismos. Estas situaciones nos motivan a re-pensar la forma en la que comienza el proceso de enseñanza-aprendizaje de estas ideas basales.

Como afirma Duval (1999): "*No hay comprensión en matemáticas si no se distingue el objeto de su representación*" (p.14). La comprensión de objetos estará ligada estrechamente a la forma de representarlos, a la accesibilidad y coordinación de estas representaciones. Números, funciones, rectas, funciones son objetos matemáticos que se trabajan mediante sus representaciones y que muchas veces su enseñanza queda condicionada al trabajo con la representación de ellos. El profesor debe estar conciente de que la comprensión del objeto puede quedar limitada al entendimiento de la representación del objeto. No distinguir entre objeto y su representación generará un obstáculo didáctico (Duval, 1999) que puede no evidenciarse en el momento en que se esté intentando aprehender el objeto. De acuerdo con Duval (1999): "*Toda confusión entre objeto y representación provoca en un plazo mas o menos amplio una pérdida en la comprensión"* (p.13).

Nuestro tema consiste en el diseño e implementación de una secuencia de actividades que permita a los estudiantes representar, construir y manipular los conceptos de partición y sumas de Riemann, basales en el cálculo integral, asignando a los estudiantes un rol protagónico en esta construcción para lograr la comprensión de estos objetos.

Moreria (2003) menciona que la implementación de las tecnologías para producir el aprendizaje requiere de la implementación de una *nueva pedagogía* donde el estudiante se involucre y motive a expresar sus opiniones, a responder preguntas de manera libre y establecer colaborativamente estrategias de resolución para los problemas planteados. Es este punto el que nos da pie para plantear nuestra propuesta: generar una instancia donde los estudiantes logren construir los conceptos basales del cálculo integral en lo referente al cálculo de áreas, con un carácter participativo y apoyado de la experimentación usando recursos tecnológicos.

Basados en la teoría de Ausubel, Novak, y Hanesian (1976), respecto al aprendizaje significativo, buscamos lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes respecto a estos conceptos, considerando los conocimientos previos y las actitudes que el grupo al cual se aplicará la actividad ha mostrado hacia la matemática. El diseño de la actividad es conciente que los estudiantes *saben* lo necesario para poder relacionar los elementos que emergen de nuestra actividad, pudiendo considerarlos como base para la construcción de los nuevos conceptos. Nos orientamos a una actividad de aprendizaje por descubrimiento.

Contexto

La actividad se enmarca en dos proyectos, titulados "*Un diseño de enseñanza - aprendizaje para estudiantes de primer año de la carrera de Pedagogía en Matemáticas"* y "*Mejoramiento e Innovación de la Docencia Universitaria" (2014.FCS.IMA.02)*. El primer proyecto es una reformulación de la implementación de los cursos habituales de primer año donde se reúnen los cursos de Álgebra y Cálculo en una cátedra a cargo de 6 profesores para 2 grupos o secciones de

[1] La que se encuentra en la mayoría de la literatura matemática sobre el cálculo integral.

estudiantes. Este proyecto organiza el día de los estudiantes en base a actividades como: clases de cátedras, talleres de prácticas, laboratorio de softwares académicos y educativos, todos a cargo del grupo de profesores del proyecto, y ayudantías temáticas guiadas por estudiantes de curso superior de la misma carrera. Los profesores participantes se coordinan semanalmente con los objetivos y temas diarios, las especificaciones del tipo de actividad a realizar en cada una de las sesiones de la semana, además de analizar en conjunto las evaluaciones propuestas. La planificación del semestre contempla el desarrollo de 4 módulos, cada uno con un título temático y considerando a *las funciones* como columna vertebral del primer semestre académico. El segundo semestre tiene la misma modalidad con los ejes temáticos de derivadas, integrales, matrices y espacios vectoriales como nociones centrales.

El segundo proyecto sigue el lineamiento del primero aportando con la implementación de recursos tecnológicos para la enseñanza, aprendizaje y evaluación formativa de los estudiantes. Se habilita una plataforma virtual en *moodle,* donde los estudiantes cuentan con material de estudio y la posibilidad de realizar evaluaciones y autoevaluaciones sobre los temas que se están estudiando. Las evaluaciones son diseñadas por el grupo de profesores y ayudantes, quienes programan cada pregunta con parámetros de modo de aleatorizar los datos de la pregunta pero no el tipo de pregunta.

Nuestra secuencia de actividades se aplica a los estudiantes de primer año en un módulo de cálculo integral de la carrera de Pedagogía en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso de Chile, que se encuentran cursando el segundo semestre de la carrera. El grupo está formado por las dos secciones, de 32 y 27 estudiantes respectivamente, reunidos en un mismo espacio físico para la implementación de esta actividad. Todos los estudiantes se encuentran con la totalidad de cursos del primer semestre aprobados (álgebra I, cálculo I, laboratorio de matemáticas), donde estudiaron los conceptos de números reales y su construcción axiomática, funciones, intervalos reales, funciones reales y sus propiedades, límite y continuidad. Sobre el manejo de NTIC, los estudiantes trabajaron con el software Geogebra y en la producción de textos en LaTex.

Diseño de la Actividad

El diseño la actividad contempla 90 minutos para su aplicación, dentro de los cuales se destinan tiempos y espacios de reflexión de los estudiantes para obtener sus conclusiones. Se estructura en tres etapas: la primera es de acercamiento al problema del cálculo de áreas cuando hay fórmula para determinarlo y para cuando no hay una fórmula explícita, la segunda parte es en base a la manipulación de Geogebra, experimentando con los valores de ciertos parámetros definidos para una función específica como: cantidad de sub-intervalos de la partición, tipo de función graficada, dominio para esta función, etc. Esta etapa permite la obtención de conclusiones sobre las particiones y la convergencia de las sucesiones generadas. La tercera parte requiere que los estudiantes escriban simbólicamente las expresiones que surgieron en las etapas anteriores: particiones, suma inferior, convergencia de las sucesiones generadas.

Si bien la actividad se inspira en la propuesta de Ares, Gatíca & Olguín (2010), nuestra propuesta aborda el trabajo previo a este trabajo partiendo por la construcción de los elementos que sustentarán a las siguientes sesiones de *cálculo de integrales* hasta *sólidos de revolución, longitud de curvas y superficies*.

El enfoque constructivista de la actividad nos lleva a plantear una serie de preguntas para las secciones de la actividad que, por una parte tengan relación con lo que los estudiantes tienen ya interiorizado, como por ejemplo las fórmulas de área y perímetro para figuras planas simples: cuadrado, triángulo rectángulo, circunferencia y sector circular, y por otro lado que conduzcan a la construcción de nuevos objetos como: partición de un intervalo, aproximación del área, entre otros.

En el encabezado de la actividad se plantea un objetivo que sirve de motivación para los estudiantes y les indica lo que se realizará durante la actividad, sin embargo el objetivo final es otro, pues como hemos escrito más arriba nuestro objetivo es que los estudiantes construyan conceptos y deduzcan expresiones que determinan a las sumas superiores e inferiores. Este objetivo no es comunicado a los estudiantes para evitar que los estudiantes más curiosos se adelanten y busque información en otras fuentes información para resolver los problemas propuestos.

Las primeras dos preguntas corresponden al planteamiento de un ejercicio rutinario de cálculo de área utilizando fórmulas conocidas para el triángulo y circunferencia. Se evocan los conocimientos previos sobre el cálculo de áreas para conducir a los estudiantes a una búsqueda de fórmulas explícitas para las áreas de las siguientes figuras.

El siguiente par de preguntas (ver Apéndice A, Parte I, preguntas 3 y 4) producen el desequilibrio- siguiendo las ideas de Piaget- según los conocimientos previos de los estudiantes. Se cuenta ahora con dos figuras donde no existe fórmula para determinar el área y se vuelve necesario el análisis de la situación. En el caso de la pregunta 3, Parte I, exige naturalmente la descomposición de la figura para dar alguna respuesta. Lo mismo ocurre para la preguntado sobre la función raíz.

Luego de esto, y para cerrar la primera etapa, se espera que surjan diferentes estrategias para particionar el área y dar una respuesta aproximada. Entre las estrategias de partición del área, el uso de rectángulos aparecerá bajo la noción de que a menor ancho del rectángulo, menor será la aproximación del área. Si no aparecía esta estrategia, se plantean preguntas para dirigir la actividad a la construcción de rectángulos.

En la segunda parte de la actividad (Uso de Geogebra), los estudiantes utilizarán el software para visualizar lo que entrega el comando ***sumainferior[f,a,b,n]***. Pondrán a prueba sus resultados con otra función y contrastan con el resultado entregado por el software. Se les consulta sobre el valor que entrega este comando y el cómo se determina este valor. En este momento se espera que puedan deducir que el valor resultante corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos cuyas la alturas son las imágenes de los extremos de los sub-intervalos. Se les pide explícitamente una expresión algebraica que determine este valor. Lo mismo ocurre al analizar el comando ***sumasuperior[f,a,b,n].***

Para cerrarla actividad, se evaluará la funcionalidad de las expresiones propuestas mediante discusión colectiva de los resultados. Esperamos que este bloque de preguntas concluya la actividad mediante la construcción de la definición de suma superior para el caso de funciones positivas definidas en un compacto y la conjetura sobre la convergencia de dichas sumas. Para ello se les pide definir dos puntos: (3, Sumin) y (3,Sumsup), en base a las sumas superior e inferior, y con ello activar el "rastro" de los puntos. Esto permitirá observar la convergencia de los puntos, mediante la incorporación del *deslizador* en el parámetro *n* (número de sub-intervalos) para deducir que el área buscada será el límite de estas sucesiones de puntos.

Modalidad de trabajo

Debido a que la actividad se basa en la experimentación con Geogebra, los recursos necesarios para la implementación son computadores, en este caso portátiles, con el software cargado y listo para su ejecución. Se solicita adicionalmente algunas hojas de papel y lápices para realizar las representaciones, cálculos simples o anotar sus resultados y conclusiones.

Antes de dar inicio a la sesión los estudiantes tienen la posibilidad de conseguir algún computador portátil, disponibles en la universidad, o bien a aquellos que no consiguen alguno pueden trabajar en pareja junto a alguien que tenga acceso a uno. La actividad se pensó para ser trabajada de manera individual, sin embargo no hay inconvenientes en realizarla en parejas o grupos pequeños.

La organización y diseño de la actividad considera el trabajo personal por parte de los estudiantes para construir en conjunto con la clase las definiciones de los conceptos en juego mediante los aportes de cada uno de ellos y las orientaciones sobre sus procedimientos.

El desarrollo de la sesión se basará principalmente en el planteamiento de pequeños problemas y desafíos de manera progresiva para los estudiantes, planteando preguntas que utilicen sus conocimientos previos para generar los nuevos conceptos.

Los resultados obtenidos por los estudiantes serán expuestos como aproximaciones a las respuestas de las preguntas y la validación será por el resto de los estudiantes quienes, en conjunto con el profesor, pondrán a prueba el resultado y propondrán las nuevas preguntas-respuestas que conduzcan al desarrollo del concepto en juego.

Resultados y discusión

Lo primero que nos llama la atención, y es en lo que nos debemos detener por unos minutos, es que los estudiantes no logran relacionar a la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ con la circunferencia unitaria centrada en el origen (ver Apéndice A, Parte I, pregunta 2). Este hecho nos obliga a detener la actividad para aclarar la conexión existente, junto con el análisis del dominio de esta función. Surgen algunos comentarios por parte de los estudiantes que muestran esta desarticulación. Ellos comentan que "la función raíz de la pregunta no puede ser una circunferencia porque es una raíz". Se recuerda lo que es una *semi-circunferencia* en el plano.

Con la implementación de esta actividad, los estudiantes lograron dividir el área bajo la curva en regiones poligonales como estrategia de simplificación y discretización del problema continuo. Formularon particiones del área total en triángulos, rectángulos, sectores circulares que dependían de cierto ángulo y combinaciones de las anteriores para intentar "cubrir" la mayor cantidad de área bajo la curva. En el desarrollo de estrategias surgieron algunas que incluían sectores circulares, donde la única dificultad estaba en la determinación del ángulo que determinaba el sector circular, sin embargo con trigonometría era posible resolver la situación.

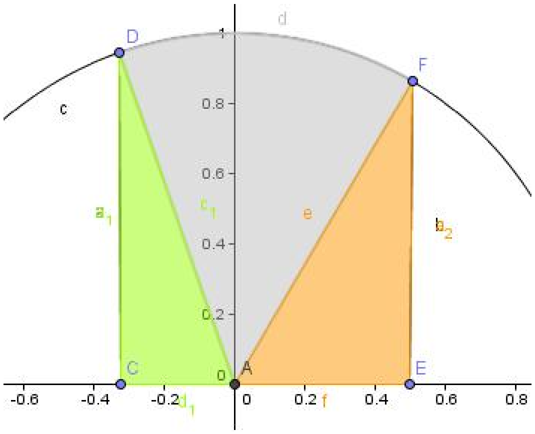

Figura 1. Ejemplo de partición en dos triángulos rectángulos y un sector circular

No se invalidó ninguna estrategia, sin embargo se comentaron las dificultades que a las que conduciría el uso de alguna partición poco adecuada, a la vez que se privilegiaron las estrategias útiles para lograr la definición de sumas superiores e inferiores, basadas en rectángulos. Otra de las estrategias que surgieron fue, por ejemplo, la división del área mediante un cuadrilátero y otros triángulos.

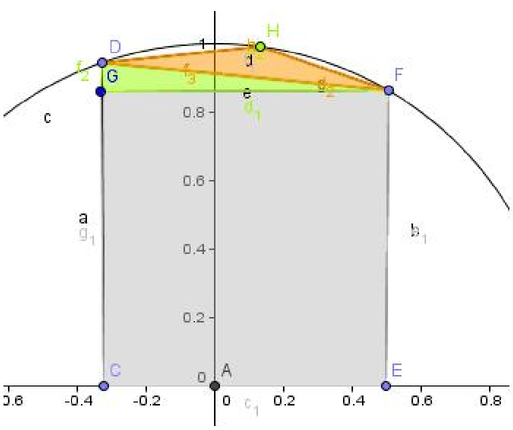

Figura 2. Ejemplo de partición en cuadrilátero y triángulos.

Las descomposiciones rectangulares fueron fundamentales para conjeturar las fórmulas que aproximaban el área buscada.

Surge un desarrollo de expresiones algebraicas que explicaban la suma de las áreas de los rectángulos formados bajo la curva, como suma inferior. Estas expresiones fueron específicas para el tipo de función trabajada (creciente o decreciente). Se alcanzó la noción de incremento fijo en la variable, según la partición, para definir las bases de los rectángulos, la noción de partición y sub-intervalos. La concepción de altura variable, según *f(x)*, para las alturas de los rectángulos formados también fue un concepto que surgió naturalmente.

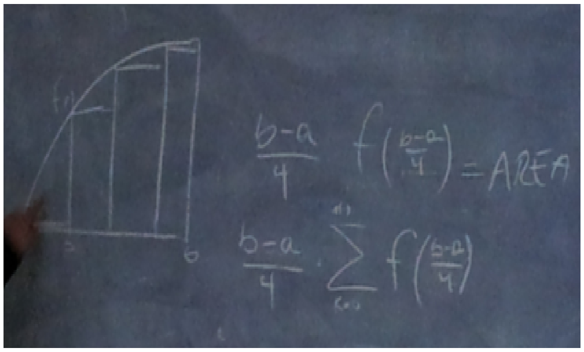

Figura 3. Fotografía de una conjetura para la suma de Riemann, n=4.

La expresión construida fue expuesta por algunos estudiantes, mejorada por las ideas de otros y aprobada por el resto de la clase. Destacamos que la expresión posee relaciones entre elementos que no eran parte de la sesión y que van más allá de los objetivos planteados, relacionando los conocimientos previos de los estudiantes con el conocimiento nuevo que están construyendo.

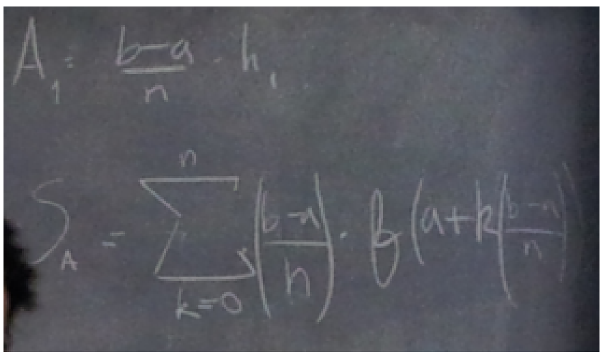

Figura 4. Fotografía para la conjetura de suma de Riemann, n arbitrario.

Por otro lado, los estudiantes logran conjeturar, gracias a la experimentación y visualización del "rastro" de los puntos generados, que la suma superior y la suma inferior determinan sucesiones convergentes para el caso de las funciones trabajadas en el software. Concluyen además que el límite de estas sucesiones será el valor del área buscada y que cualquier suma parcial será una aproximación del área buscada. Con ello comprenden que a medida que se agregan sub-intervalos, se obtiene una mejor aproximación al área, lo que ayuda en la comprensión sobre la relación existente entre una partición y un refinamiento de la misma con las sumas superior e inferior.

En la sesión siguiente a esta actividad los estudiantes concluyen que es posible determinar el área bajo una curva aún cuando la función no es continua en una cantidad finita de puntos usando la idea original de dividir el área total justo en aquellos puntos donde se producía la discontinuidad de la función y tomando cada tramo con un problema individual que ayuda a dar la solución al problema completo. Ejemplifican con la función parte entera.

El impacto de esta actividad va más allá del cumplimiento del objetivo, alcanza a las sesiones posteriores donde el trabajo con particiones y refinamientos se facilita por la evocación a los experimentos realizados y el recuerdo de las imágenes proporcionadas por el software. Con esto se ve afectada la planificación de las sesiones futuras en la disminución del tiempo destinado, por ejemplo, para el tratamiento de las demostraciones de los teoremas asociados a estos refinamientos (varias demostraciones surgen de manera natural mediante el recuerdo de los resultados de la actividad). Más aún, el estudio de los sólidos de revolución, longitud de curvas y superficies de revolución también se facilita debido a las sumas de Riemann que dan origen a las expresiones que permiten estos cálculos.

Algunas consideraciones para una nueva implementación de esta actividad se basan en que la estrategia de particionar en triángulos y sector circular (Figura 1) podría analizarse con mayor profundidad, pues constituye una aproximación a la integración en coordenadas polares. Insistimos en que durante la actividad no se descartó esa posibilidad, sino que se tomó como una idea referente sobre la estrategia de particionar en figuras de área conocida para aproximar el área pedida.

También surgen conceptos como el de *selección de puntos medios de los sub-intervalos* como otra forma de determinar aproximaciones del área bajo la curva usando el argumento de que la imagen de un elemento en un intervalo estará siempre entre el mínimo y máximo de la función en dicho intervalo. Esta idea recibe poco apoyo por parte de los estudiantes al considerar *más simple* trabajar con la imagen de uno de los extremos de los sub-intervalos que con la imagen de un punto arbitrario al interior del mismo.

Conclusiones

La secuencia de preguntas de la actividad compromete y motiva a los estudiantes a construir respuestas con argumentos fundamentados en los resultados de la experimentación usando el software Geogebra. La utilización de las NTIC, como recursos para el aprendizaje, es fundamental dentro de la formación de los nuevos profesores, pues ellos se enfrentarán directamente con las nuevas generaciones cada vez más cercanas o inmersas en la tecnología. El uso de tecnología en el aula ya no es una característica de la innovación, sino que se ha transformado en un recurso que no se puede desperdiciar, por eso la formación de los nuevos profesores debe contemplar el uso y aplicación de las NTIC en el diseño de actividades de aprendizaje en todo nivel escolar.

Si bien la actividad se pensó para ser desarrollada por cada estudiante de manera individual, fue inevitable el diálogo entre ellos -y esperábamos que así ocurriera- frente a las dificultades del uso del software o para comentar los resultados obtenidos después de cada pregunta que se les planteaba. Este diálogo enriqueció las conclusiones que los estudiantes pudieron obtener. En este sentido, los estudiantes que trabajaron en parejas se vieron apoyados en todo momento por sus respectivos compañeros, por tanto en una nueva oportunidad de aplicar esta actividad se considerará privilegiar el trabajo en parejas sobre el individual.

El desarrollo y construcción de los conceptos basales en una temática en particular desde una perspectiva participativa por parte de los estudiantes, apoyados en la manipulación algebraica, gráfica y numérica de los elementos mejora la planificación de las sesiones de clases permitiendo organizar el tiempo disponible para el aprendizaje. Claro está que este tipo de actividades lleva consigo una dedicación especial en el diseño y estructuración de la gama de preguntas pertinentes para cada momento de la actividad y que conduzcan a lograr los objetivos propuestos.

Referencias y bibliografía

Ares, O., Gatica, S. & Olguin, R. (2010). Una propuesta didáctica utilizando las nuevas tecnologías para la enseñanza de la integral como límite de sucesiones. *REPEM*, *III,* 387-395.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (Vol. 3). México: Trillas.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (Myriam Vega Restrepo, trad.). Colombia: Universidad del Valle. (Obra original publicada en 1995).

Moreira, V. (2003). Aprendizagem mediada pela tecnología. *Revista Diálogo Educacional* [en línea], *4*(10), 47-56. Recuperado de: **<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=189118047005>** ISSN 1518-3483

Apéndice A
Secuencia de la Actividad

Objetivo: Determinar el área de la región delimitada por el eje X y la función positiva f en un intervalo [a, b].

Parte I) Acercamiento

1.- Considere la función $f(x) = -x + 2$. Determine el área de la región limitada entre la función y el eje X en [0,2]

2.- Considere la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Determine el área de la región limitada entre la función y el eje X en [0,1]

Intenta ahora con las siguientes funciones:

3.- Considere la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Determine el área de la región limitada entre la función y el eje X en $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

4.- Considere la función $f(x) = \sqrt{x}$. Determine el área de la región limitada entre la función y el eje X en [0,1.5].

5.- ¿De qué forma puedes aproximar estas áreas? Propone alguna estrategia para realizar esto.

Parte II) Uso de Geogebra.

1.- Con el uso del software Geogebra, representar la función $f(x) = \sqrt{x}$, con x en el intervalo [0,1.5]. Insertar los parámetros: a=0; b=1.5; n= 4. Con ellos, definir el valor *sumin= sumainferior [f, a, b, n]*.

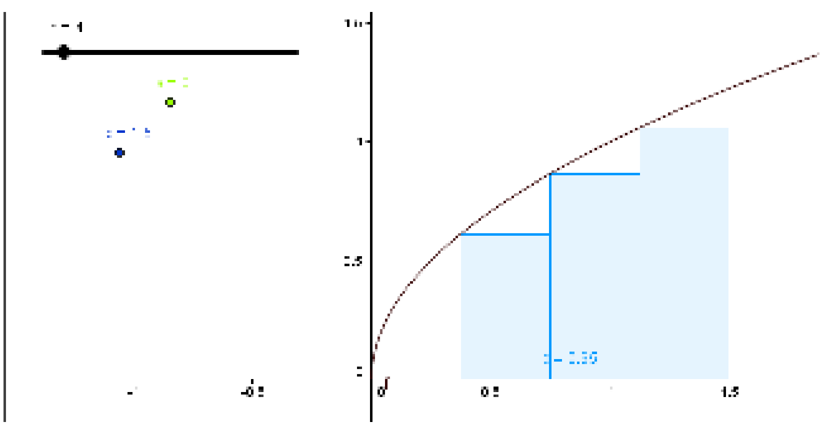

Figura 5. Función sumainferior[sqrt(x),a,b,n] para n=4 visualizada en Geogebra.

2.- El resultado de esta función entrega un valor numérico asociado a los rectángulos que se ven. ¿Cómo se determina este valor?, ¿Cómo definirías el área de cada rectángulo en términos de la función *f*?. Comprueba si lo recién definido se aplica para la función $f(x) = x - x^2$ en el intervalo [0,1].

3.- Comprueba ahora si se aplica para el intervalo [1,3], con la misma función.

4.- Ahora inserte el comando sumsup = sumasuperior[f,a,b,n]. ¿Qué muestra esta función?.

5.- El resultado de esta función entrega un valor numérico asociado a los rectángulos que se ven. ¿Cómo se determina este valor? ¿Cómo definirías el área de cada rectángulo en términos de la función *f?*

Parte III) Cierre

La suma superior y la suma inferior, que son conceptos matemáticos trabajados en el cálculo de áreas. ¿Cómo definirías formalmente y en términos de la función *f(x)* lo que determinan las funciones sumasuperior [f,a,b,n] y sumainferior[f,a,b,n]?.

2.- ¿Cuál de las dos aplicaciones anteriores representa mejor al área de la región?

3.- ¿Qué relación se puede establecer entre las dos sumas representadas?

4.- Defina los puntos (3, Sumin) y (3,Sumsup). Experimente variando el parámetro n observando las fluctuaciones de estos puntos. Si lo desea “active el rastro” de estos puntos. ¿Qué puedes concluir?

5.- Redacte sus conclusiones de esta actividad en términos de las definiciones que ustedes han propuesto.