O trabalho com conceitos de contagem e de probabilidade através de um jogo de dominós

José Marcos **Lopes**
Universidade Estadual Paulista-UNESP
Brasil
jmlopes@mat.feis.unesp.br

Resumo

Apresentamos neste trabalho um jogo de dominós associado ao Triângulo de Pascal que pode ser utilizado para o ensino de conceitos básicos de Contagem e de Probabilidade. O jogo consiste de uma modificação das regras do tradicional Jogo de Dominós duplo 6. Baseado no jogo, formulamos alguns problemas que podem subsidiar o trabalho de professores que ensinam esses conteúdos. Seguindo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o material aqui apresentado deve ser utilizado no terceiro ano do Ensino Médio.

Palavras chave: ensino-aprendizagem, análise combinatória, probabilidade, resolução de problemas, jogos.

Introdução

Os conteúdos de Análise Combinatória e de Probabilidade são indispensáveis na vida de um cidadão do século XXI. Desde que nos levantamos pela manhã somos chamados a tomar decisões e uma boa decisão depende de conhecimentos mínimos de conceitos presentes nesses dois tópicos da matemática. De uma maneira geral podemos dizer que a Análise Combinatória enumera as possibilidades de um certo evento enquanto a Probabilidade mede com que grau de percepção ou crença este evento poderá ocorrer.

É importante para o aluno do Ensino Médio saber interpretar as pesquisas eleitorais, um diagnóstico médico ou ainda entender as suas reais chances de ganhar um premio nos inúmeros jogos de azar disponíveis na atualidade, e muitos deles, gerenciados e patrocinados pelo próprio governo.

A contagem, além de propiciar uma abordagem mais completa da probabilidade, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (Brasil, 2002, p. 126).

Sobre a importância do estudo da Análise Combinatória, Millán (2013) conclui que:

> “Os esquemas combinatórios são fundamentais na formação de ideias de azar e probabilidade; a capacidade combinatória expressa um esquema operacional fundamental para o raciocínio lógico e que é necessário a instrução das técnicas combinatórias já que estas não são adquiridas espontaneamente”.

A principal finalidade para o estudo da Probabilidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (Brasil, 1997, p. 52).

De nossa experiência com o desenvolvimento de projetos com professores do Ensino Médio, de nossa região, observamos que os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade geralmente apresentam dificuldades não só para os alunos como também para os professores. Muitos professores não tiveram em sua formação básica um trabalho adequado com esses conteúdos.

Na Espanha parece que a situação é a mesma.

> Uma condição para melhorar o ensino de probabilidade é uma adequada preparação dos professores. [...]. Ainda que muitos professores da educação secundária sejam licenciados em ciências ou matemática, são poucos os professores que receberam uma formação específica sobre didática da estatística ou da probabilidade. [...]. Os conhecimentos matemáticos não são suficientes para que os docentes possam ensinar probabilidade de maneira efetiva e desenvolver em seus estudantes um adequado raciocínio probabilístico. (Contreras, Diaz, Batanero, & Ortiz, 2010, p. 182).

Ainda sobre o ensino de probabilidade, se a formação inicial dos professores se centrou nas competências matemáticas então eles podem se sentir inseguros com enfoques mais informais e mesmo tratar de omitir ou reduzir o ensino desse tema (Contreras, Diaz, Batanero, & Ortiz, 2010).

Para o caso da Probabilidade, Corbalán (2002) sugere que os seus conceitos sejam apresentados de forma lúdica. Assim, o uso de um jogo pode se tornar uma proposta atrativa tanto para os alunos como para os professores que ministram esses conteúdos.

O uso de jogos no ensino de matemática

Muitos autores defendem a utilização de jogos para o ensino de Matemática. Não o jogo pelo jogo, mas o jogo como desencadeador de conteúdos e conceitos matemáticos. O jogo pode ser "uma fonte de criação de situações-problemas de Matemática e, assim, propicia o desenvolvimento de atividades matemáticas. Esta não é parte do jogo propriamente dito, mas é a partir das situações criadas em jogo que produzimos problemas matemáticos" (Muniz, 2010, p. 19).

Os PCN consideram o recurso aos jogos como sendo um possível caminho para se "faze Matemática" em sala de aula.

> “Um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam nos alunos, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver” (Brasil, 1997, p. 48).

Existe na literatura especializada um grande número de trabalhos que utilizam jogos para o estudo de conceitos matemáticos (Elorza, 2013). Já para o estudo de conceitos de Análise Combinatória e de Probabilidade este número é bem reduzido, principalmente em língua portuguesa. Neste último caso, destacamos os trabalhos de: Lopes (2011), Lopes (2013), Lopes & Balieiro Filho (2011) e Lopes & Rezende (2010).

Apresentamos neste trabalho um jogo original que utiliza o tradicional Jogo de Dominós duplo 6 associado ao Triângulo de Pascal, o qual denominamos de "Dominó Triangular". Além do trabalho com o jogo propriamente dito, o profesor poderá trabalhar com problemas envolvendo situações do jogo. Apresentamos aquí alguns problemas que exploram conceitos de contagem e também de probabilidade. Para a solução da maioria dos problemas usamos a Árvore de Possibilidades.

Os diagramas de árvore representam um recurso potente que se emprega de maneira habitual para enumerar todas as posibilidades lógicas de uma sequência de eventos, em que cada evento pode ocorrer de um número finito de maneiras e, por tanto também pode ser considerado como um recurso na resolução de problemas em geral, não somente nos problemas de combinatória e probabilidade (Guerra & Febles, 2011).

Nossa proposta didático-pedagógica, por utilizar um jogo, pode tornar as aulas mais atraentes e motivadoras para os alunos. Todos eles gostam de jogar, e ninguém gosta de perder. Assim, para ganhar, é necessário compreender bem os conceitos envolvidos e também procurar obter a melhor estratégia para o jogo.

O Jogo Dominó Triangular

Este jogo utiliza as 28 peças de um dominó comum duplo 6. Entretanto, a disposição das peças deve ser feita em um tabuleiro de forma triangular atendendo à determinadas regras. O formato do tabuleiro deve ser conforme o descrito na figura 1. Pode ser jogado por até 4 jogadores. Cada jogador coloca uma peça de cada vez e pode-se estabelecer o sentido horário para a realização das jogadas.

Regras

1. As peças são embaralhadas com as faces numeradas viradas para baixo. Cada jogador escolhe 7 peças.

2. O jogador que possui a peça $0:0$ inicia a rodada. O jogador que possui a peça $1:0$ é o segundo a jogar e coloca sua peça imediatamente abaixo da peça $0:0$ obedecendo a disposição da figura 1. Colocadas as peças $0:0$ e $1:0$ o terceiro jogador possui duas opções: pode colocar a peça $1:1$ do lado direito da peça $1:0$ ou colocar a peça $2:0$ imediatamente abaixo da peça $1:0$, sempre obedecendo a disposição da figura1.

3. A partir do quarto jogador as regras gerais são: colocada a peça $n : m$, a próxima peça a ser colocada pode ser $n : m + 1$ ou $n + 1 : m$, desde que essas peças existam. Onde n e m são números naturais menores ou iguais a 6 com $m \leq n$.

4. Quando o jogador não tem peça para realizar a sua jogada então ele compra peças do monte ou passa sua vez, se não existirem mais peças à serem compradas.

5. Se o jogador colocar uma peça de forma errada esta peça deve ser retirada e o jogador perde sua vez de jogar. A jogada passa para o próximo jogador.

6. O jogador que terminar suas peças em primeiro lugar recebe 10 pontos, o segundo a terminar suas peças recebe 7 pontos, o terceiro recebe 5 pontos e o quarto recebe 3 pontos. Vence o jogo quem conseguir somar mais pontos em três rodadas.

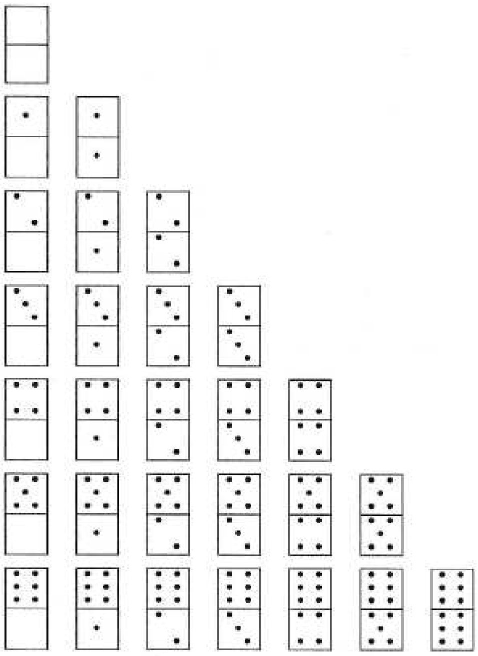

Figura 1. Disposição das peças no Jogo Dominó Triangular.

Comentários sobre o jogo

Se o jogo Dominó Triangular é disputado entre 4 jogadores então a peça $0 : 0$ sempre estará com um desses jogadores e a rodada pode ser iniciada. Agora, caso o jogo seja disputado por um número menor de jogadores e a peça $0 : 0$ não esteja com nenhum desses jogadores, então as peças devem ser novamente embaralhadas e escolhidas até que um dos jogadores tenha a peça $0 : 0$.

O tabuleiro (triângulo) sempre será formado. Não existe a possibilidade do jogo ficar "trancado" como no tradicional jogo de dominó.

Trata-se de um jogo de estratégia. O jogador deve realizar sua jogada em função das peças que dispõe e também procurando prever as peças de seus oponentes. No tradicional jogo de dominó, jogadores experientes conseguem prever as peças de seus adversários através de suas peças e das peças que já saíram no jogo.

O jogador pode colocar uma peça adjacente à direita ou abaixo de uma peça já colocada. Como exemplo, supondo já colocada a peça $5:3$ o jogador tem duas opções: pode colocar a peça $5:4$ ou colocar a peça $6:3$. As peças duplas, com números iguais, admitem apenas peças adjacentes abaixo. Como exemplo, a peça $5:5$ admite apenas a colocação da peça $6:5$. Não é permitido a colocação de peça adjacente à esquerda. Como exemplo, supondo já colocada a peça $5:3$ não é permitido a colocação da peça $5:2$. A peça 5:2 poderá ser colocada se uma das peças 4:2 ou 5:1 já foi colocada no tabuleiro.

Associando-se a cada peça $\mathrm{n:m}$ do jogo Dominó Triangular, o *Número Binomial* C_n^m, e considerando-se a disposição triangular de seu tabuleiro, temos que as 28 peças do jogo correspondem exatamente aos 28 números binomiais que formam as sete primeiras linhas do Triângulo se Pascal, veja a figura 2.

$$\begin{array}{lllllll}
C_0^0 \\
C_1^0 & C_1^1 \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 \\
C_6^0 & C_6^1 & C_6^2 & C_6^3 & C_6^4 & C_6^5 & C_6^6
\end{array}
\quad \text{ou} \quad
\begin{array}{lllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Figura 2. As sete primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

O número C_n^m também chamado de *Número Combinatório* (Morgado, Carvalho, Carvalho, & Fernandez, 2004) representa o número de combinações simples de classe m de n objetos e é definido por:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \quad 0 \le m \le n.$$

Depois do trabalho com o Jogo Dominó Triangular e de sua associação com o Triângulo de Pascal, os alunos poderão se sentirem mais motivados a estudarem as principais propriedades desse triângulo, como por exemplo, os teoremas: das linhas, das colunas, das diagonais e também a relação de Stifel.

Alguns problemas relacionados com o Jogo Dominó Triangular

Apresentamos a seguir alguns problemas que envolvem situações do Jogo Dominó Triangular. Os quatro primeiros trabalham com conceitos de contagem.

Problema 1. A peça $6:6$ será sempre a última a ser colocada no tabuleiro do Jogo Dominó Triangular? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

A resposta é não. Dependendo das jogadas anteriores e desde que a peça $6:5$ já foi colocada, no tabuleiro, a peça $6:6$ pode ser colocada antes que outras peças. Assim, a peça $6:6$ não pode ser considerada a peça “mico” do jogo.

O jogador que possuir a peça $6:6$ deve estabelecer uma adequada estratégia para que esta peça não fique para o final da rodada. No jogo de dominó tradicional a peça $6:6$ é a primeira a ser jogada.

Problema 2. No Jogo Dominó Triangular a peça 2:0 é sempre colocada no tabuleiro antes que a peça 2:1? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

A resposta é não. Uma situação possível onde a peça 2:0 é colocada depois da peça 2:1 é a seguinte: 0:0; 1:0; 1:1; 2:1; 2:0; ... .

Problema 3. De quantas maneiras diferentes podemos preencher um tabuleiro com apenas as 3 primeiras linhas usando as regras do Jogo Dominó Triangular? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Vamos supor que o tabuleiro possui apenas as três primeiras linhas. Cada peça do Jogo Dominó Triangular possui uma posição fixa no tabuleiro e sempre deve ser colocada nesta posição. Entretanto, as três primeiras linhas do tabuleiro podem ser preenchidas de várias maneiras diferentes. A solução pode ser obtida através da árvore de possibilidades como a descrita na figura 3.

Cada ramo da árvore corresponde a uma maneira diferente de preencher o tabuleiro. Temos neste caso 6 possibilidades diferentes, ou seja: 0:0 - 1:0 - 1:1 - 2:0 - 2:1 - 2:2; 0:0 - 1:0 - 1:1 - 2:1 - 2:0 - 2:2; 0:0 - 1:0 - 1:1 - 2:1 - 2:2 - 2:0; 0:0 - 1:0 - 2:0 - 1:1 - 2:1 - 2:2; 0:0 - 1:0 - 2:0 - 2:1 - 1:1 - 2:2 e 0:0 - 1:0 - 2:0 - 2:1 - 2:2 - 1:1.

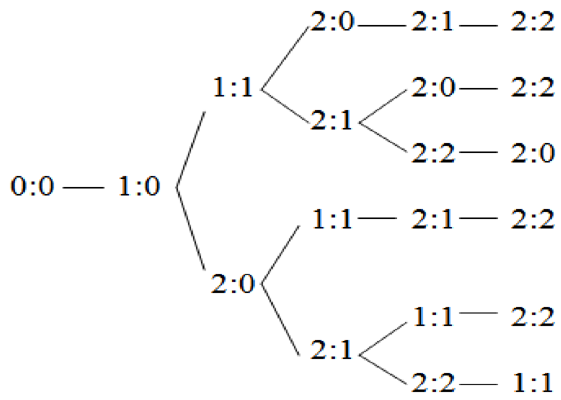

Figura 3. Maneiras diferentes de preencher um tabuleiro com apenas as três primeiras linhas.

Problema 4. De quantas maneiras diferentes podemos preencher um tabuleiro com apenas as 4 primeiras linhas usando as regras do Jogo Dominó Triangular e supondo que as peças 0:0; 1:0; 1:1; 2:0 e 3:0 já estão no tabuleiro? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Neste caso estamos supondo que o tabuleiro possui apenas as quatro primeiras linhas e que as peças 0:0; 1:0; 1:1; 2:0 e 3:0 já foram colocadas. Usando a árvore de possibilidades podemos descrever todos os casos possíveis conforme a figura 3.

Temos neste caso um total de 12 maneiras diferentes de preencher as quatro primeiras linhas do tabuleiro considerando-se as peças 0:0; 1:0; 1:1; 2:0 e 3:0 já colocadas. Uma delas é a seguinte: 0:0; 1:0; 1:1; 2:0; 3:0; 3:1; 3:2; 3:3; 2:1 e 2:2.

Para o caso geral e supondo que nenhuma peça ainda foi colocada, podemos mostrar através da árvore de possibilidades que existem 90 formas diferentes de preencher as quatro primeiras linhas do tabuleiro.

Na sequência, por uma questão de simplicidade, vamos supor que o tabuleiro possui apenas as três primeiras linhas. Vamos supor também que os jogadores colocam suas peças de maneira aleatória respeitando-se apenas as regras do Jogo Dominó Triangular. Os problemas 5, 6, 7 e 8 trabalham com conceitos de probabilidade. Utilizamos aqui a concepção Laplaciana de Probabilidade (Morgado et al., 2004, p. 119).

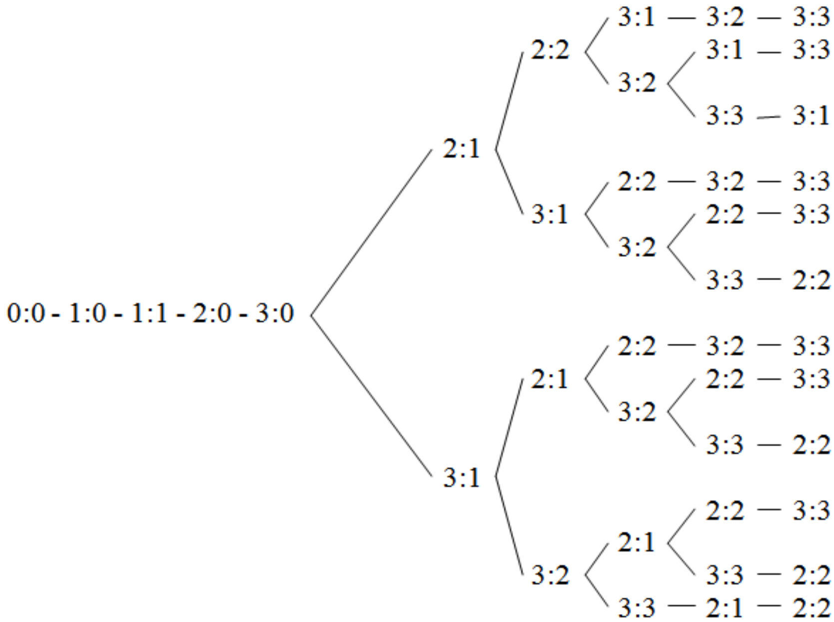

Figura 4. Maneiras diferentes de preencher o tabuleiro com as hipóteses do problema 3.

Problema 5. Calcular a probabilidade da peça 1:1 ser a última a ser colocada no tabuleiro do Jogo Dominó Triangular? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Como estamos supondo um tabuleiro com apenas as três primeiras linhas e que os jogadores colocam suas peças de maneira aleatória, temos a árvore de probabilidades descrita na figura 5. As respectivas probabilidades estão indicadas sobre cada ramo da árvore.

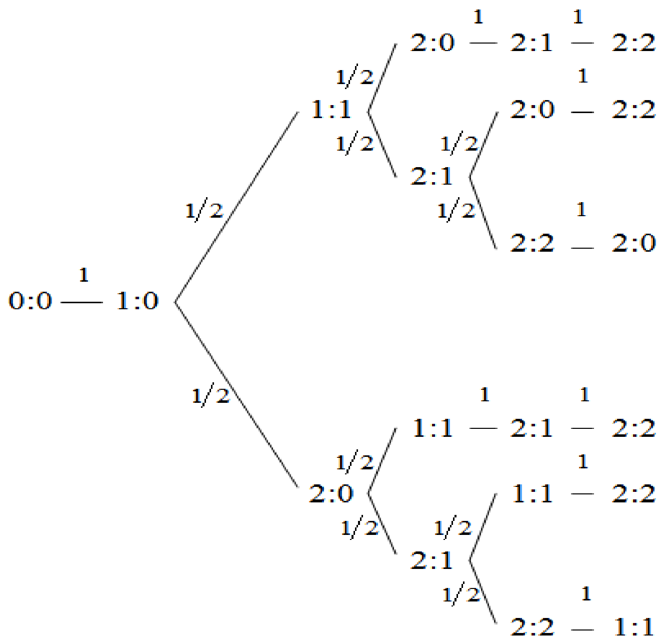

Figura 5. Árvore de probabilidades para um tabuleiro com apenas as três primeiras linhas.

A probabilidade da peça 1:1 ser colocada por último corresponde ao ramo: 0:0 - 1:0 - 2:0 - 2:1 - 2: 2 - 1:1; com probabilidade p dada por:

$$p = 1 \text{x} \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} \text{x} 1 = \frac{1}{8}.$$

Problema 6. Calcular a probabilidade da peça 2:0 ser colocada no tabuleiro do Jogo Dominó Triangular antes do que a peça 2:1? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Usando a árvore de probabilidades dada na figura 5 temos que a probabilidade p neste caso é dada por:

$$p = 1 \text{x} \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} \text{x} 1 \text{x} 1 + 1 \text{x} \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} \text{x} 1 \text{x} 1 + 1 \text{x} \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} \text{x} 1 + 1 \text{x} \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} \text{x} 1 = \frac{3}{4}$$

A probabilidade $p = \frac{3}{4}$ corresponde a soma das probabilidades dadas pelo primeiro, quarto, quinto e sexto ramo da árvore da figura 5.

Problema 7. Calcular a probabilidade da peça 2:2 ser a última a ser colocada no tabuleiro do Jogo Dominó Triangular? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

De maneira análoga ao problema 6 temos neste caso $p = \frac{3}{4}$.

Problema 8. Calcular a probabilidade da peça 1:1 ser a terceira peça a ser colocada no tabuleiro do Jogo Dominó Triangular sabendo-se que a peça 2:2 foi a última peça colocada? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Este é um problema um pouco mais difícil que os anteriores pois envolve o conceito de probabilidade condicional. Vamos definir os dois seguintes eventos:

A = { a terceira peça colocada no tabuleiro é a peça 1:1};

B = { a última peça colocada no tabuleiro é a peça 2:2}.

Desejamos calcular a probabilidade condicional P(A | B). Da solução do problema 7 sabemos que $P(B) = \frac{3}{4}$. Agora, $P(A \cap B) = 1 \text{ x } \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} \text{ x } 1 = \frac{1}{8}$, que corresponde a probabilidade dada pelo segundo ramo da árvore da figura 5.

Assim, usando a definição de probabilidade condicional temos que:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/8}{3/4} = \frac{1}{6} .$$

Considerações finais

O jogo e os problemas aqui apresentados podem servir de subsídio para os professores que trabalham com os conteúdos de combinatória e probabilidade no Ensino Médio. Relacionamos um jogo muito antigo e conhecido, o Jogo de Dominós, com o importante e também muito conhecido Triângulo de Pascal.

O jogo serve de motivação para o estudo da matemática e os problemas são diferentes daqueles tradicionais: escolha de bolas de cores diferentes em duas urnas, ou jogo de dados e de moedas.

Por questões de cidadania, consideramos importante que os alunos do Ensino Médio aprendam a tomar "boas" decisões, o Jogo Dominó Triangular pode contribuir com este propósito.

Referências e bibliografia

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: *terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Brasil. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (2002). *PCN₊ - Ensino Médio*. Brasília: MEC.

Contreras, J. M., Diaz, C., Batanero, C., & Ortiz, J. J. (2010). Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución em um taller formativo. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*, 181-198. São Paulo.

Corbalán, F. (2002). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Sintesis.

Elorza, N. S. L. (2013). *O uso de jogos no ensino e aprendizagem de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*: levantamento de teses e dissertações (Dissertação de Mestrado em Educação, Faculdade de Ciências e Tecnologia). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Presidente Prudente, Brasil.

Guerra, A. T. A., & Febles, M. C. E. (2011). Resolución de juegos cotidianos com árboles de decisión: aportaciones de uma experiência com alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, *23*(2), 33-63.

Lopes, J. M., & Rezende, J. C. (2010). Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. *Bolema*, *23*(36), 657-682. Rio Claro.

Lopes, J. M. (2011). Uma proposta didático pedagógica para o estudo da concepção clássica de probabilidade. *Bolema*, *24*(39), 607-628. Rio Claro.

Lopes, J. M. (2013). Uma propuesta para la enseñanza del teorema de Bayes a través de um juego de dados y de la resolución de problemas. *Revista de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, *2*, 601-608. Granada.

Lopes, J. M., & Balieiro Filho, I. F. (2011). Percepções de professores do ensino médio sobre mudanças de suas práticas de ensino de probabilidade. *Revista de Educação Matemática*, *13*(15), 37-54. São Paulo

Millán, E. F. (2013). Razonamiento combinatorio y el currículo español. *Revista de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2*, 539-554. Granada.

Morgado, A. C. O., Carvalho, J. B. P., Carvalho, P. C. P., & Fernandez, P. (2004). *Análise combinatória e probabilidade*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM.

Muniz, C. A. (2010). *Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.