Matematica Elementar e Conhecimento de Matemática para o Ensino: um estudo colaborativo sobre Números Racionais

Leticia **Rangel**
Colégio de Aplicação da UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
leticiarangel@ufrj.br
Victor Augusto **Giraldo**
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
victor.giraldo@ufrj.br
Nelson **Maculan**
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação., Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
maculan@cos.ufrj.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é contribuir para a reflexão acerca da formação do professor de matemática da escola básica com especial atenção ao desenvolvimento do conhecimento de matemática para o ensino. Assim, investiga-se a identificação de partes elementares da Matemática, no sentido de Klein (Klein, 2010, Schubring, 2014) e o metassaber do professor do ensino básico, visando à observação de suas possíveis implicações para a o desenvolvimento do saber pedagógico de conteúdo (Shulman, 1986). A investigação apresentada teve como orientação metodológica o desenvolvimento de um estudo colaborativo nos moldes de *Concept Study* (Davis, 2010), que envolveu professores de matemática do ensino básico. Números Racionais foi o tema que orientou esse estudo coletivo.

Palavras clave: formação inicial do professor de matemática, desenvolvimento profissional do professor de matemática; saber pedagógico de conteúdo; conhecimento de de matemática para o ensino; elementarização; *Concept Study*; ensino de matemática.

Introdução

A formação profissional dos professores é um elemento crucial no esforço para se constituir um sistema eficaz de educação matemática. No entanto, essa formação muitas vezes ainda parece estar distante e desconectada do trabalho de ensinar matemática, ou seja, da prática dos professores. O foco deste trabalho é fundado no desafio que marca a profissão docente e a formação do professor: *aprender para e a partir da prática* (Even&Ball, 2009). Dentre todos os conhecimentos necessários para a prática docente, focamos a atenção no *saber pedagógico de conteúdo* (Shulman, 1986), um conhecimento especial do professor que se constitui a partir do vínculo entre conteúdo e pedagogia. Esse saber, por sua própria natureza, não se esgota na formação inicial do professor, ainda que não prescinda de conhecimentos que o professor deve adquirir nesta etapa, e se amplia de forma constante e permanente ao longo da prática profissional. Entender como os saberes necessários para o ensino se desenvolvem e determinar estratégias para que este seja apropriado pelos professores tem mobilizado a pesquisa em Educação Matemática (Even & Ball, 2009, Ball et al., 2009, Fiorentini & Lorenzato 2009; Moreira, 2004, Tardif, 2012).

É certo que os professores iniciam a sua formação profissional trazendo ideias sobre o ensino da matemática formadas a partir de sua experiência como alunos do ensino básico. Essa experiência pessoal de aprendizagem da matemática também molda poderosamente seu entendimento de como a matemática deve ser ensinada e aprendida. Por outro lado, as pesquisas apontam que a formação inicial dos professores parece ainda estar distante e desconectada do trabalho de ensinar matemática na escola básica. (Ball, 1988; Even&Ball, 2009)

> Temos mais a compreender sobre como a formação do professor pode ter uma intervenção efetiva no complexo processo de aprender a ensinar matemática, que muito frequentemente, é mais influenciado pelas experiências anteriores dos professores como aprendizes ou por contextos de seu trabalho profissional1" (EVEN & BALL, 2009, p.2, tradução nossa)

A observação do distanciamento entre a formação do professor e a prática letiva no ensino básico não é um episódio recente. Há cerca de um século, o matemático Felix Klein, em sua obra, hoje clássica, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* (Klein, 2010), já apontava uma ruptura entre a matemática escolar, aquela ensinada nos sistemas de ensino básico, e a matemática acadêmica universitária. Klein identifica essa ruptura como uma dupla descontinuidade, que se estabelece na falta de conexão entre a matemática aprendida na escola básica e a matemática que determina os cursos de formação de professores.

Neste artigo, nos propomos a contribuir para a reflexão acerca da formação do professor de matemática do ensino básico apresentando uma investigação com foco no desenvolvimento dos saberes necessários para o ensino. Mais especificamente, investigando em que medida o reconhecimento de aspectos elementares, no sentido de Klein (2010), e o desenvolvimento de metassaberes pode ter implicações para a construção do saber pedagógico de conteúdo (Shulman, 1986). O estudo é desenvolvido tendo como referencial metodológico a noção de *Concept Study* (DAVIS, 2010) em um estudo colaborativo realizado a partir de uma série de sessões coletivas com um grupo de professores de ensino básico. Números racionais foi o tema disparador e condutor do estudo coletivo em tela.

[1] "We have more to understand about how teacher education can be an effective intervention in the complex process of learning to teach mathematics, which is all too often most influenced by teachers' prior experiences as learners or by the contexts of their professional work." (EVEN & BALL, 2009, p.3)

Os saberes necessários para o ensino

Discutindo a complexidade do conhecimento necessário ao ensino, Shulman (1986, 1987) distingue o *saber de conteúdo*, que diz respeito exclusivamente à matéria, sem compromissos com o ensino, do *saber pedagógico de conteúdo*, que extrapola o conhecimento do conteúdo disciplinar *per se*, contemplando a dimensão do saber *sobre* o conteúdo *para* o ensino. A noção de *saber pedagógico de conteúdo*, introduzida por Shulman, tem sido referência central para a pesquisa em Educação Matemática (e.g. Ball & Bass, 2003; Ball, 1988; Ball, Thames & Phelps, 2008; Krauss et al, 2008; Sztajn, 2007, Moreira, 2004).

Sob esta perspectiva, por exemplo, para um professor, não basta saber efetuar uma divisão, descrever detalhadamente e justificar formalmente cada etapa que compõe o algoritmo tradicional da operação. Embora o conhecimento do conceito matemático de divisão e o conhecimento do procedimento de cálculo da operação sejam certamente indispensáveis para o professor, estes, por si só, não o fazem habilitado para o ensino da operação. É necessário, além disso, identificar situações resolvidas por meio da operação de divisão a partir de ideias de repartição, de comparação ou de medida; reconhecer a relação intrínseca dessa operação com as demais operações básicas; distinguir, dentre as operações básicas, que a divisão certamente é a mais complexa e a que determina maiores desafios para o ensino, e, sobretudo, reconhecer a relevância de cada um desses aspectos para a aprendizagem e ser capaz de articulá-los para estabelecer estratégias de ensino.

A concepção saber de matemática para o ensino tem forte influência da prática do professor. Para Moreira (2004), “o conhecimento pedagógico de conteúdo [...], trata-se de uma construção elaborada no interior das práticas pedagógicas escolares, cuja fonte e destino são essas mesmas práticas” (MOREIRA, 2004, p.40). A discussão sobre a composição dos saberes necessários para o ensino e os consequentes desdobramentos dessa composição para a formação profissional do professor apresentam-se em plena ebulição para a Educação Matemática e para a comunidade matemática em geral. Essa discussão é fortemente amparada no reconhecimento de que a aprendizagem e o desenvolvimento da Matemática estão intrinsicamente relacionados prática do professor. (Even&Ball, 2009, Fiorentini et al, 2002, Moreira, 2004). O conhecimento do conteúdo matemático e os conhecimentos de pedagogia são certamente necessários ao professor. No entanto, a prática profissional do professor exige um conhecimento particular de matemática, que, de certa forma, é diferente do conhecimento de matemática do matemático e de outros profissionais.

Concept Study

Brent Davis apresenta ***Concept Study*** como uma metodologia de estudo coletivo apropriada para a investigação acerca do conhecimento de conteúdo do professor, sem perder de vista a sua dimensão pedagógica. Essa metodologia se funda na concepção do conhecimento de matemática para o ensino sob uma perspectiva dinâmica e fluente e se caracteriza a partir de um estudo coletivo, em que professores compartilham de forma colaborativa sua experiência e seu conhecimento com o objetivo de questionar e elaborar seus próprios conhecimentos de matemática com vistas ao ensino. (Davis, 2008, 2010, 2012; Davis & Renert, 2009).

O entendimento de *Concept Study* se estabelece a partir da combinação de duas noções importantes na pesquisa em educação matemática: (i) *Concept Analysis* (Usiskin et al,2003) –

com foco na explicação de estruturas lógicas e associações que são inerentes a conceitos matemáticos e (ii) *Lesson Study* (Fernandez & Yoshida, 2004) – estrutura colaborativa em que professores se empenham em melhorar a qualidade de sua prática. Segundo Davis (2010, 2012), um *Concept Study* permite uma (*re*)construção conceitual estabelecida a partir de um conhecimento já formado. Esse processo é identificado pelo autor como "*substruct*".

> Substructing é derivado do latim sub-, "debaixo, abaixo" e struere ", pilha, montagem" (e a raiz de espargir e interpretar, além de estrutura e construção). Substruct se refere a construir debaixo de alguma coisa. Na indústria, substruct refere-se a reconstrução de um prédio sem demoli-lo – e, de preferência, sem interromper o seu uso. Da mesma forma, em concept studies, professores reelaboram conceitos matemáticos, às vezes radicalmente, enquanto continuam a utilizá-los, quase que sem interrupção, no ensino.2 (DAVIS, 2012, p.6, itálico como no original, tradução nossa)

Para Davis e seus colaboradores, um *Concept Study* destaca e permite o acesso à profundidade e à amplitude do conhecimento dos professores sobre os conceitos matemáticos. Um *concept study* se estrutura a partir de um tópico específico do currículo de matemática. O tópico escolhido determina, durante o desenrolar das sessões, a variação de assuntos e de questões que caracterizam o estudo coletivo por meio da própria contribuição dos participantes, que se dá à medida que compartilham interpretações e desdobramentos para as questões que emergem do processo.

A análise de um *Concept Study* tem caráter interpretativo e prevê a identificação de estágios para o desenvolvimento da análise. Esses estágios contemplam, de forma gradativa e encadeada a reflexão realizada pelo grupo. Segundo Davis & Renert, "apenas o primeiro estágio pode ser descrito como intencional, os demais são emergentes, imprevisíveis, não planejados, decorrentes de interesses comuns, conhecimentos divergentes e encontros acidentais"[3] (DAVIS & RENERT, 2009b, p.38, tradução nossa). O primeiro estágio, *percepções*, fica distinguido pela elaboração de uma lista que reúne as diversas imagens, metáforas, impressões que emergem da reflexão coletiva determinada a partir de uma questão disparadora. Os estágios subsequentes se desenvolvem a partir da observação de relações e de conexões entre as *percepções* listadas no primeiro estágio do estudo. Por exemplo, no estudo apresentado em Davis & Renert (2009), o segundo estágio, tem sua motivação a partir da identificação de situações modeladas pelas operações de multiplicação e de divisão e alcança a composição de um quadro que estabelece um panorama da abordagem do conceito de multiplicação ao longo da escola básica. Dentre os resultados observados no *Concept Study* descrito em Davis (2010), o autor destaca a transformação na percepção da Matemática por partes dos professores envolvidos. Segundo o autor, é possível identificar o desenvolvimento das habilidades coletivas desses professores de investigar e de reestruturar seus conhecimentos.

---

[2] No original: *Substructing* is derived from the Latin *sub*-, "under, from below" and *struere*, "pile, assemble" (and the root of *strew* and *construe*, in addition to *structure* and *construct*). To substruct is to build beneath something. In industry, *substruct* refers to reconstructing a building without demolishing it – and, ideally, without interrupting its use. Likewise, in concept studies, teachers rework mathematical concepts, sometimes radically, while using them almost without interruption in their teaching. (DAVIS, 2012, p.6, itálico como no original)

[3] No original: Only the first layer could be described as intentional in any structural sense. The others were emergent – unanticipated, unplanned, arising from shared interests, divergent knowing, and accidental encounters. (DAVIS & RENERT, 2009b, p.38)

O estudo

O estudo coletivo se deu com o grupo de professores que cursou a disciplina Tópicos em Ensino de Matemática do curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, lecionada pela primeira autora no segundo semestre de 2011. Trata-se de uma disciplina eletiva, de ementa variável, o que permitia o desenvolvimento do estudo pretendido. O curso ocorreu em sessões semanais com 4 horas de duração, ao longo de 19 semanas. A turma participantes do estudo era composta por 15 professores com experiência profissional que variava de 1 (um) a 20 (vinte) anos de atuação em sala de aula. Na ocasião do desenvolvimento do estudo, todos atuavam em escolas de ensino básico na rede de ensino público do Rio de Janeiro. Os dados do estudo foram coletados por meio de gravações em áudio das sessões, anotações sobre o desenvolvimento das sessões por parte da pesquisadora e registros documentais de atividades diversas estabelecidas a partir da discussão, pelo grupo ou pela pesquisadora. Segundo a metodologia de análise de um *concept study*, foram distinguidos 4 estágios ao longo do estudo realizado: Realizations, Landscapes e Entailments e inference. O primeiro estágio, o único intencional, se estabeleceu a partir da elaboração de uma lista que reuniu as diversas imagens, metáforas, impressões, emergentes da reflexão coletiva determinada a partir da questão disparadora: ***O que é fundamental no que ensinamos sobre números racionais na escola básica?*** (Figura 1) Neste estudo, outros três estágios foram identificados a partir da complexidade das articulações estabelecidas entre o tema central que amparou a discussão (números racionais) e outros assuntos e ramos da Matemática.

Percepções

A composição da lista de *percepções*, que marca de forma intencional o início do estudo, foi estabelecida a partir de uma longa discussão do grupo, que teve como forte referência a experiência da sala de aula. Ficou evidente que para compor a lista, os professores se pautaram mais no contexto da sala de aula, em sua prática, do que na identificação da relevância do tema para a Matemática. Por exemplo, a discussão que determinou a inclusão do item "compreender a *ideia de unidade*" foi pautada no reconhecimento do grupo da dificuldade dos estudantes para resolver problemas em que a unidade corresponde a um conjunto com mais do que um elemento. Como ilustração, considera-se a situação em que duas pizzas são divididas em quatro partes cada uma e que sejam consumidas seis dessas partes. A quantidade consumida de pizza pode ser interpretada como 6/4 de *uma* pizza ou como 6/8 ou ¾ da quantidade total, ou seja, de duas pizzas, como ilustrado na figura 1. Assim, a partir da identificação da "unidade", a fração correspondente à parte consumida varia, indicando dois números diferentes, ainda que a quantidade correspondente seja a mesma.

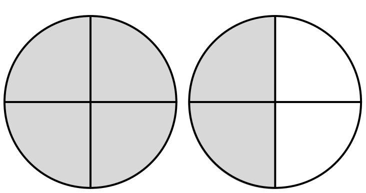

Figura 1: Representação da quantidade de pizza consumida.

Nesta discussão, não foi indicado qualquer reconhecimento da importância da unidade sob a perspectiva da Matemática em contextos mais formais, por exemplo, para a própria concepção de número racional ou para a definição de inverso multiplicativo. O único item cujo reconhecimento do valor para a Matemática ficou explicito, e foi preponderante na indicação para a composição da lista, foi o que observa a densidade do conjunto dos números racionais. Ainda que alguns professores não associassem a propriedade à definição de conjunto denso, todos concordavam que observar que "*dados dois números racionais sempre é possível determinar um outro entre eles*" era essencial para aprendizagem sobre números racionais. Já no estágio *percepções*, foram evidenciados e abordados temas que determinariam os demais estágios do estudo, por exemplo, a noção de infinito, a incomensurabilidade, o zero como ente matemático e a exponenciação.

O que é fundamental no que ensinamos sobre números racionais na escola básica?
▪ Relacionar parte e todo em situações diversas. ▪ Compreender a ideia de unidade ▪ Operações com frações ▪ Igualdade x equivalência ▪ Representação da reta numerada ▪ Diversos *significados* de frações – fração como número, como relação parte/todo, como razão e como divisão. ▪ Mostrar ao aluno que um mesmo número racional tem diversas representações – *representação* ▪ *Comparação* de números racionais na <u>forma decimal</u> ▪ *Comparação* de números racionais na <u>forma fracionária</u> ▪ Dar *significado* aos números racionais ▪ Reconhecer os números racionais na *forma percentual* ▪ Reconhecer os números inteiros como racionais ▪ Aproximações ▪ *Dízimas* – Em particular o caso do "0,999..." ▪ "Saber que dados dois números racionais sempre é possível determinar um outro entre eles." – Densidade dos racionais.

Figura 2: Quadro percepções

Panorama

Por exemplo, no estágio *panorama*, caracterizado neste estudo pela articulação de aspectos matemáticos do conceito de número racional que têm característica estruturante na compreensão do assunto, destaca-se o questionamento sobre equivalência e igualdade no âmbito das frações. Nessa etapa, a partir da indagação "Qual é o certo, ½ é igual ou é equivalente a 2/4?", o grupo revisitou as definições de relação de equivalência e de número racional. Essa questão surgiu como uma dúvida importante que atingia a prática dos professores envolvidos e, cuja resposta, não era evidente nem segura para a grande maioria. Neste momento do estudo, foi verificada uma inflexão significativa nos processos e critérios de buscas por respostas adotados pelos professores participantes. Até então, eles vinham usando como principais referências teóricas sobre matemática os próprios livros didáticos da escola básica. A busca por respostas para as dúvidas sobre equivalência de frações exigiu dos professores a consulta a livros acadêmicos ou dirigidos a professores. Ficava claro que, ainda que a formalização desses conceitos não seja apropriada para o ensino básico, o seu conhecimento é fundamental para capacitar o professor para o ensino de frações, números racionais e, particularmente, para responder corretamente à pergunta que mobilizou o grupo. Essa etapa evidenciou ao grupo que, para ensinar, o conhecimento de matemática do professor precisa ir além do que está nos textos didáticos da escola básica e que, por outro lado, não pode estar desprendido dessa realidade.

Outra discussão característica deste estágio envolveu a operação de divisão no contexto dos números racionais. Essa discussão foi motivada por um problema trazido por uma das professoras do grupo: *Uma biblioteca tinha todos os seus livros acomodados em 6 estantes completamente cheias. Essas estantes foram substituídos por novas. A capacidade de cada estante nova era igual a ¾ da capacidade de uma das estantes antigas. Quantas estantes novas serão necessárias para acomodar todos os livros da biblioteca?* Não é raro que a solução para este problema seja apresentada a partir de uma estratégia que evita o cálculo com frações: supõe-se que a capacidade de uma das estantes originais seja, por exemplo, 100 livros. Assim em uma estante nova caberiam 75 livros e a solução seria alcançada pelo resultado de 600 ÷ 75. É claro que é essa solução é matematicamente correta e emprega a divisão. No entanto, evita que seja experimentada a divisão envolvendo frações, pois o único cálculo com frações é para determinar ¾ de 100. A abordagem da solução desse problema a partir de uma representação gráfica (Figura 3), proposta por um dos professores. Os professores participantes avaliaram que esta representação explicita a identificação da interpretação da divisão como medida e a compreensão da operação de divisão no contexto dos números racionais. A discussão sobre esse problema articulou tópicos elementares sobre o ensino do tema: o papel da unidade, a interpretação da divisão como medida e a possibilidade de representação gráfica da divisão – o que para muitos dos participantes se apresentou como uma novidade.

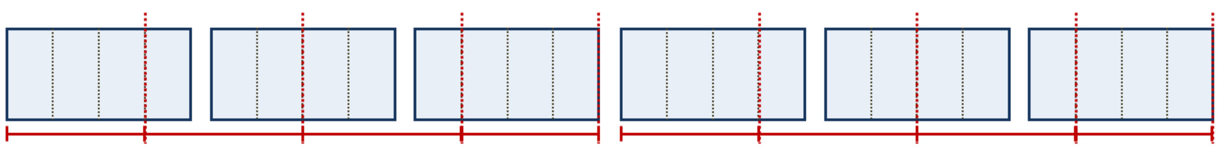

Figura 3: Representação gráfica para a divisão de 6 por 3/4.

Outras discussões que marcaram esse estágio envolveram, por exemplo, a atenção aos conceitos de razão e de fração, a definição de relação de equivalência e a definição formal de número racional.

Vínculos

O terceiro estágio identificado neste estudo, vínculos, se caracteriza especialmente a partir das conexões matemáticas estabelecidas, ampliadas em alcance e complexidade, não se limitaram ao contexto de números racionais. Por exemplo, a discussão alcançou grandezas incomensuráveis e a construção dos números reais. Em particular, a partir desse momento, as referências para a discussão passaram a ser exclusivamente textos acadêmicos, evidenciando o reconhecimento de que esses resultados, ainda que admitissem uma abordagem própria para o ensino básico, exigiam e se estabeleciam sob o rigor da formalização Matemática.

Inferências

Esse estágio é marcado pela mudança de atitude dos professores. Um aspecto relevante desta etapa foi o fato de os professores passarem a questionar suas certezas. Por exemplo, a certeza de que todo número racional admite duas representações, na forma de fração e na forma de expansão decimal. Os professores do grupo reconheceram que se tratava de uma certeza constituída durante seus próprios estudos no ensino básico e não na formação universitária. Segundo nossa análise dos resultados do estudo, essa constatação foi associada à indicação da dupla descontinuidade identificada por Klein (2010). No entanto, os professores foram além da constatação e indagaram: O que garante esse resultado? Como ele deve ser tratado na sala de aula? Ficava assim evidenciada uma nova forma de percepção do conteúdo: não basta saber, é necessário compreender como esse saber se constitui, qual sua natureza e sua origem, bem como compreender em que sentido e em que medida esse saber é relevante para a sala de aula. Em nossa análise identificamos esta perspectiva como um processo de construção de meta-saberes pelos professores participantes. Para investigar as questões propostas (estabelecendo matematicamente a equivalência entre representações fracionárias e decimais para números racionais, bem como as limitações dos algoritmos usuais das operações para números com representação decimal infinita) foi necessário mobilizar conhecimentos de álgebra e de análise, bem como observar e recorrer ao rigor e à consistência formal da Matemática. Em particular, a partir desse momento, os professores participantes passaram a buscar espontaneamente como referência para a discussão textos acadêmicos, evidenciando o reconhecimento de que esses resultados, ainda que admitissem uma abordagem própria para o ensino básico, exigiam e se estabeleciam sob o rigor da formalização Matemática. Assim se destacam, no contexto da álgebra, a construção dos números racionais por classes de equivalência; e no contexto da análise, os resultados que garantem que um número é racional se e somente se sua representação nos sistema de numeração posicional decimal é finita ou periódica.

Outro destaque desta etapa ase apresenta na observação critica dos professores. Em um dos encontros, um dos professores participantes trouxe para a pauta de discussão a questão apresentada na figura 4, por ter identificado uma "falha" em sua formulação.

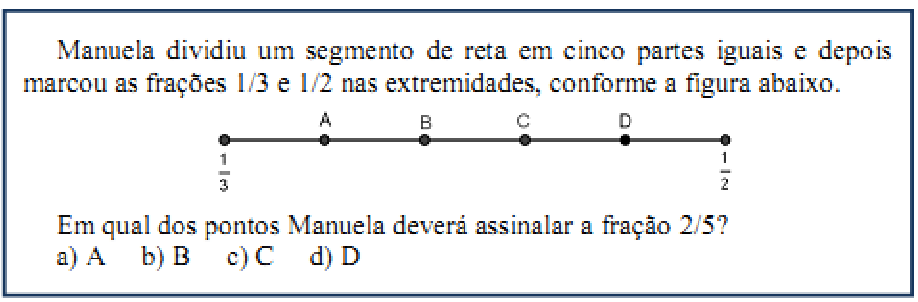

Figura 4: Questão motivadora da reflexão na etapa inicial do estudo piloto.

O grupo observou que do ponto de vista do conteúdo matemático, a escolha das extremidades é irrelevante, podendo o procedimento de solução ser estabelecido de forma genérica. Por exemplo, determinar a distância entre as extremidades do segmento em destaque, no caso 1/3 e ½, dividir o valor encontrado pela quantidade de seções, no caso 5, determinar o comprimento de cada seção e finalmente, por adição, identificar os números associados ao pontos que limitam as seções. No entanto, os professores participantes, também observaram que, com os dados propostos, a resposta correta poderia ser alcançada por meio de uma resolução errada, que acreditavam ser bastante provável de ser feita pelos estudantes. O grupo avaliou que era bem possível que um estudante identificasse o ponto B como a solução da questão porque o segmento em destaque está dividido em 5 partes e B corresponde, sob a orientação crescente, à extremidade final do segundo segmento. Assim, para os professores participantes, do ponto de vista do saber para o ensino, a escolha dos dados numéricos não está adequada.

Resultados

Como resultados do estudo ficou destacado o potencial da metodologia concept study para investigar o conhecimento de matemática dos professores de forma articulada com a sua prática, deixando em evidência aspectos implícitos e explícitos do saber pedagógico de conteúdo e do saber de conteúdo dos professores. Ao longo do estudo, também ficou evidenciada uma mudança de atitude dos participantes, que revelaram uma postura mais investigativa, manifestando, inclusive, a intenção de estender a vivência de uma prática investigativa para suas salas de aula. Mais ainda, acreditamos que essa metodologia se revelou potencialmente promissora para a formação continuada do professor, oportunizando, de fato, a reconstrução conceitual de forma articulada com a prática. Essa constatação fica evidenciada no depoimento de um dos professores do grupo, que estava entre aqueles com maior tempo de experiência em sala de aula:

> "Realmente, professora, gosto muito dos nossos encontros! O tempo passa tão depressa! Acrescento vários conhecimentos aos meus e refaço outros! Saio pensando em tantos assuntos, que demoro um tempão para querer ligar o rádio do carro, prefiro ficar refletindo sobre tudo que foi conversado em sala de aula!"

O estudo sugere que, de fato, os exercícios de questionar, observar e investigar coletivamente o conteúdo de matemática do ensino básico, visando identificar aspectos elementares desses conteúdos (no sentido de Klein, Schubring, 2014) relacionando-os às estruturas fundamentais da Matemática, determinou um processo de reconstrução do saber pedagógico de conteúdo dos participantes. Essa reconstrução determina um meta-saber, alcançando uma perspectiva prática conceitual e uma perspectiva subjetiva. Por um lado, amplia o conhecimento do professor sobre o conteúdo sem perder e vista a dimensão da sua prática e, por outro, fortalece a autoestima do professor, que reconhece a especificidade e a importância do seu saber.

Finalmente, destacamos que, ainda que o estudo tenha sido gratificante em relação à observação de resultados positivamente potenciais para a formação do professor em relação ao desenvolvimento dos saberes docentes, ele não oferece oportunidade de acompanhamento do impacto desses resultados na sala de aula e na aprendizagem dos alunos acompanhados pelos professores envolvidos. Este pode ser um tema para futuras pesquisas em continuidade a esta.

Referências e bibliografia

Ball, D.L. (1988) The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths. National Center for Research on Teacher Education, College of Education, Michigan State University, 1988.

BALL, D. L.; & BASS, H. (2003) Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In B. Davis & E. Simmt (Ed.), Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59 (5), 389-407.

Ball, D. et al. (2009) Mathematical Knowledge for teaching: Focusing on the work teaching and its demands. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds), Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 133–139). Thessaloniki, GR: PME.

Davis, B. (2008) Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM), 14(2), 86-91.

Davis, B. (2010). Concept Studies: Designing settings for teacher's disciplinary knowledge. Proceedings of the 34th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Minas Gerais, Brasil, 1, pp.63-78.

Davis, B. (2012) Subtlety and Complexity of Mathematics Tecaher's Disciplinary Knowledge. 12th International Congress on Mathematical Education. Seoul, Korea.

Davis, B., & Renert, M. (2009). Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. For the Learning of Mathematics, 29(3), 37-43 (Special Issue, guest edited by J. Adler & D. Ball).

Even, R. & Ball, D. L. (Eds.). (2009). The professional education and development of teachers of mathematics – the 15th ICMI Study. New York, NY: Springer.

Fernandez, C. & Yoshida, M. (2004). Lesson study: a Japonese approach to improving mathematics teaching and learning. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fiorentini, D.; Nacarato, A. M.; Ferreira, A. C.; Lopes, C. S.; Freitas, M.T. M; Miskulin, R. G. S. (2002) Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. Dossiê: Educação Matemática. Educação em Revista, Belo Horizonte, v. 17, n. 36, p. 137-160.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2009) Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3a ed.. Rev. Campinas, SP. Autores Associados. (Coleção Formação de Professores)

Moreira, P C. (2004) O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica. Minas Gerais. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social, Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais.

Schubring, Gert. (2014). A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade. In Roque, T, & Giraldo, V. (Eds.), O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Cap.2 – pp. 39–54. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.Tardif, M. (2012) Saberes Docentes e Formação Profissional. 13ª ed. Petrópolis, RJ:Vozes.

Kilpatrick, Jeremy. (2008). A Higher Standpoint. Proceedings ICME 11, no prelo.

Klein, Felix. (2010). Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Aritmetics, Algebra , Analysis. USA: Breinigsville.