



## **Deducción de la fórmula del área del círculo en la formación inicial docente**

Luis Antonio **Soto Hernández**

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Honduras

[luissotoh@yahoo.com.ar](mailto:luissotoh@yahoo.com.ar)

### **Resumen**

La fórmula para el cálculo del área de círculos ofrece resistencia en los estudiantes y docentes sino se experimenta a través de actividades concretas que permitan llegar a un descubrimiento o conclusión. Hay varias maneras de lograrlo, pero utilizando la estrategia de transformar el círculo en otras figuras a las que se les conoce su área se deduce la fórmula. Esto implica un proceso de aprendizaje para los estudiantes y de reflexión para los docentes. En este minicurso se desarrollarán actividades para ambos actores pero reflexionando desde el punto de vista de la formación inicial docente.

*Palabras claves:* Fórmula del área del círculo, Deducción del área del círculo, Formación inicial docente

### **Introducción**

Los conceptos relacionados con el cálculo de área de círculos ofrecen resistencia en los estudiantes y docentes sino se experimentan a través de actividades concretas que utilizando los conocimientos previos permitan llegar a un descubrimiento o una conclusión, esto supone desarrollar la habilidad de pensar lógicamente y sentir satisfacción y alegría al hacer matemática.

En relación al aprendizaje de las matemáticas, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos, NCTM por sus siglas en inglés, (2000) expresa que los estudiantes deben aprender las matemáticas entendiéndolas, reflexionando sobre su propio

pensamiento y razonamiento, asimismo dice que si se alinean el conocimiento factual y las habilidades para manejar procedimientos con el conocimiento conceptual los estudiantes pueden transformarse en efectivos aprendices de las matemáticas. En este sentido, la memorización de las fórmulas en general, no debe ser el fin en sí mismo sino la deducción de las fórmulas a través de procesos que impliquen actividades que hagan que los estudiantes las comprendan para que puedan aplicarlas en la resolución de problemas.

La deducción de fórmulas implica una serie de elementos que requiere de mucha reflexión de parte de los docentes para que puedan abordarse con éxito con los estudiantes, entre éstos destacan: la secuencia curricular de los contenidos, los conocimientos previos de los estudiantes, la exposición a actividades concretas que faciliten el conocimiento y llamen la atención de los educandos y los inciten a la reflexión, y la habilidad del docente para aprovechar las ideas de los estudiantes (incluyendo sus errores) y convertirlas en conceptos matemáticos.

Una estimación del área del círculo se puede hacer comparándola con el área de los cuadrados inscritos y circunscritos a él, otra aproximación es cuadricular el círculo y su área será la suma de las áreas de los cuadrados internos más la mitad del área de los cuadrados que quedan en el borde. Estas formas aunque son interesantes no conducen a la deducción de la fórmula del área del círculo que en esencia es el fin último de la matemática en esta rama del conocimiento, así que habrá que buscar alguna manera que permita construir dicha fórmula y generalizarla.

Una de las estrategias que se puede utilizar en este propósito de la deducción de las fórmulas de las áreas de las figuras planas es la de transformar una figura en otra figura a la que se le conoce la fórmula de su área, en este sentido, habrá que buscar una manera en la que el círculo se pueda transformar en otras figuras a las que se les conoce la fórmula de su área permitiendo así deducirla y generalizarla al cálculo de área de los círculos.

### **Secuencia curricular en el estudio del área de las figuras planas**

El estudio del área de figuras planas puede iniciarse con la comparación de las superficies de dos objetos diferentes. Para que puedan captar el concepto de área es necesario que los estudiantes descubran la forma de encontrarla por sí mismos exponiéndolos a las cuatro etapas de la comparación y la medición (comparación directa, comparación indirecta, medición con las unidades arbitrarias y la medición con las unidades oficiales) propuestas en las Guías para Maestros de la Secretaría de Educación de Honduras utilizadas en la enseñanza de las matemáticas. En un inicio la forma de encontrar el área será a través del conteo pero el propósito final será hallar el área mediante el cálculo, haciendo uso de las fórmulas. En matemática, memorizar las fórmulas no debe ser lo más importante sino el proceso para llegar a ellas. En ese proceso los estudiantes deben tener múltiples experiencias de resolución independiente que incluyan la utilización de los conocimientos previos, por lo que si olvidan las fórmulas puedan recurrir a sus experiencias pasadas y construirlas nuevamente. Cuando la matemática expone a los estudiantes a que hay diferentes procedimientos para llegar a un resultado desarrolla la capacidad de observar un fenómeno desde distintos puntos de vista y con una visión más amplia.

La deducción de las fórmulas del área de las figuras planas debe seguir una secuencia curricular basada en: la estructura interna de la matemática, el uso de los conocimientos previos de los estudiantes y el desarrollo cognitivo de los mismos. Por ejemplo, ¿en qué orden deben deducirse las fórmulas del área de las siguientes figuras: triángulo, cuadrado, círculo y rectángulo? Es evidente que el área del círculo sería la última en abordar debido a que la misma implica una serie de conceptos complejos como el número  $\pi$  y la circunferencia. El triángulo ofrece la dificultad que para deducir su fórmula hay que generalizarla para los distintos tipos de triángulos que existen: equiláteros, isósceles, escalenos, rectángulos, acutángulos y obtusángulos, además puede darse el inconveniente que al utilizar la técnica de la cuadrícula, no sea tan fácil ver que muchas de sus partes forman una unidad cuadrada. De acuerdo a las razones expuestas anteriormente se debe comenzar con la deducción de las fórmulas del área del cuadrado y del rectángulo, pero de estas dos figuras, ¿con cuál se debe iniciar? Ambas implican la fórmula  $\text{área} = \text{lado} \times \text{lado}$ , con la salvedad que en el rectángulo se puede establecer la diferencia entre ambos lados, es decir, la fórmula puede verse como  $\text{área} = \text{largo} \times \text{ancho}$ , así que la decisión de iniciar con una u otra figura dependerá de la intención del docente: quiere mayor diversidad de pensamiento de parte de los estudiantes, quiere seguir un camino seguro de deducción de la fórmula, quiere partir de un caso general para particularizarlo, etc. En la deducción de las fórmulas del área de las figuras planas hay que tomar en cuenta que lo importante es la experiencia de los estudiantes en la construcción de las mismas y el docente es el responsable de exponer a los estudiantes a este tipo de prácticas que lo ayuden a desarrollar su pensamiento lógico. En la Figura 1 se presenta la secuencia curricular en la deducción de las fórmulas del cálculo de área de figuras planas.

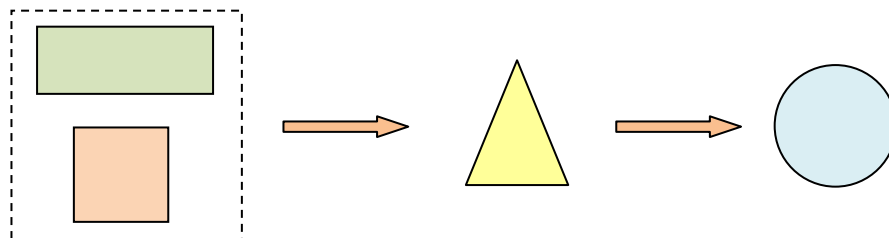


Figura 1. Secuencia curricular de la deducción de las fórmulas del área de figuras planas

Para comprender un poco más la importancia de la secuencia curricular en el proceso de deducción de las fórmulas de las áreas de las figuras planas a continuación se aborda el caso del área del triángulo para después continuar con la del círculo.

### Deducción de la fórmula del área del triángulo

Existen diferentes tipos de triángulos, de acuerdo a la longitud de sus lados se clasifican en equiláteros, isósceles y escalenos, y de acuerdo a la medida de sus ángulos en rectángulos, acutángulos y obtusángulos. La fórmula para el cálculo del área es la misma para todos ellos, entonces ¿cuál es la secuencia que se debe seguir para que los estudiantes piensen por sí mismo en la forma de encontrar el área aplicando lo aprendido y que deduzcan dicha fórmula y puedan generalizarla a todo tipo de triángulos? Respetando el orden de enseñanza y el desarrollo del

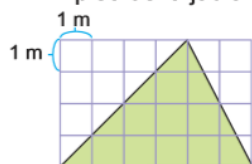
pensamiento del niño, podría introducirse con los triángulos rectángulos ya que se puede considerar el área de este tipo de triángulo como la mitad del área del cuadrado o la mitad del área del rectángulo que lo contiene. Esta manera de cálculo va dando la idea que la fórmula del área de un triángulo es  $\text{base} \times \text{altura} \div 2$  ya que el área de un rectángulo es  $\text{base} \times \text{altura}$  y como se está considerando el área del triángulo rectángulo como la mitad del área del rectángulo (o del cuadrado) que lo contiene entonces se deduce que la fórmula para el cálculo del área del triángulo rectángulo es  $\text{base} \times \text{altura} \div 2$ . Siguiendo esta forma de pensamiento la secuencia curricular para la deducción de la fórmula del área de triángulos sería: triángulos rectángulos  $\rightarrow$  triángulos acutángulos  $\rightarrow$  triángulos obtusángulos.

La deducción de las fórmulas para el cálculo del área de las figuras planas puede hacerse de varias formas:

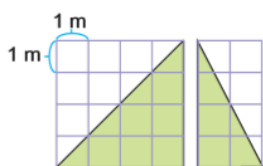
- Dividiendo la figura dada en figuras a las cuales se les conoce la fórmula para calcular su área
- Dividiendo la figura dada y transformándola en otras figuras a las cuales se les conoce la fórmula para calcular su área.

Un ejemplo de esta situación se da en la deducción de la fórmula del área de los triángulos acutángulos, actividad propuesta en el Cuaderno de Trabajo para los estudiantes de quinto grado de la Secretaría de Educación de Honduras. En la Figura 2 se muestran varias estrategias.

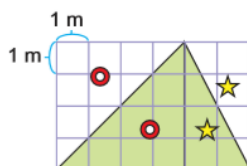
**B** El piso de la jaula de los monos tiene otra forma triangular. ¿Cuánto mide el área?



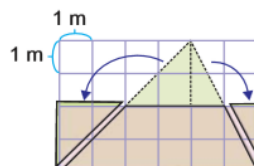
**1** Piense en la forma para encontrar el área de este triángulo.



Fátima  
Dividiendo en dos triángulos rectángulos...



Walter  
Como el área del triángulo es la mitad del rectángulo grande...



Viviana  
Transformando el triángulo en un rectángulo de la misma área...

**2** Encuentre el área de este triángulo usando la forma que prefiera.



Fátima

$$\begin{aligned} \text{PO: } 4 \times 4 \div 2 &= 8 \\ 4 \times 2 \div 2 &= 4 \\ 8 + 4 &= 12 \\ \text{R: } 12 \text{ m}^2 \end{aligned}$$



Walter

$$\begin{aligned} \text{PO: } 6 \times 4 \div 2 &= 12 \\ \text{R: } 12 \text{ m}^2 \end{aligned}$$



Viviana

$$\begin{aligned} \text{PO: } 4 \div 2 &= 2 \\ 6 \times 2 &= 12 \\ \text{R: } 12 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Figura 2. Estrategias para encontrar el área de un triángulo acutángulo

En el caso de Fátima se utiliza la primera estrategia (dividir la figura en figuras conocidas) y en el de Viviana la segunda (dividir la figura y transformarla en otras figuras conocidas). Es obvio que puede haber diferentes formas de encontrar el área de dicho triángulo aplicando estas estrategias, sin embargo no hay que caer en el hecho que los estudiantes dividan la figura dada en muchas figuras pequeñas (o las transformen en muchas figuras) que compliquen el cálculo y propicien la posibilidad de equivocarse. Lo ideal en matemáticas es buscar una forma comprensible, fácil, rápida y segura de cálculo.

La importancia de la fórmula del área del triángulo radica en que cuando se estudia el área de los cuadriláteros, éstos se pueden dividir en triángulos y así encontrar su área, generalizando esta idea, el área de cualquier polígono puede encontrarse dividiéndolo en triángulos.

### **Deducción de la fórmula del área del círculo**

Haciendo trazos convenientes los polígonos pueden dividirse en varias figuras y transformarse en otras figuras a las cuales se les conoce su fórmula para calcular su área, de esta manera al sumar sus áreas se encuentra el área del polígono dado. Esta estrategia se ha utilizado para deducir las fórmulas de los triángulos, algunos cuadriláteros (cuadrados, rectángulos, romboídes, trapecios y rombos) y los polígonos regulares. Surge la siguiente pregunta: ¿se podrá utilizar esta estrategia de dividir el círculo en varias figuras y transformarlo en una figura a la cual se le conozca la fórmula para el área y deducir así la fórmula para el área del círculo?

A simple vista no parece haber una respuesta inmediata, surgen así más inquietudes: ¿en qué figuras se va a dividir el círculo?, ¿en semicírculos?, ¿cómo calculamos el área de un semicírculo?, ¿en qué figura se va a transformar las partes en que se ha dividido el círculo?

Para responder a estas interrogantes se puede pedir a los estudiantes que dibujen un círculo cualquiera y que lo dividan en varios sectores circulares iguales y que utilicen éstos como las piezas de un rompecabezas y que traten de formar una figura. La división en dos sectores circulares iguales no parece dar ninguna figura, sin embargo cuando se dividen en 4 sectores circulares iguales los estudiantes empiezan a ver que cada sector circular se asemeja a un triángulo y piensan que si encuentra la forma de calcular el área de dicho “triángulo” se puede calcular el área aproximada del círculo. Si se divide el círculo en 8 ó 16 sectores circulares iguales y se colocan adecuadamente se transformarán en una figura que se parece a un romboíde, si el círculo se divide en más sectores circulares iguales, por ejemplo, 32 ó 64 sectores la figura se parecerá a un rectángulo, cuanto más se divida el círculo en sectores circulares la figura se transforma en un rectángulo. En la Figura 3 se presenta la situación anterior.

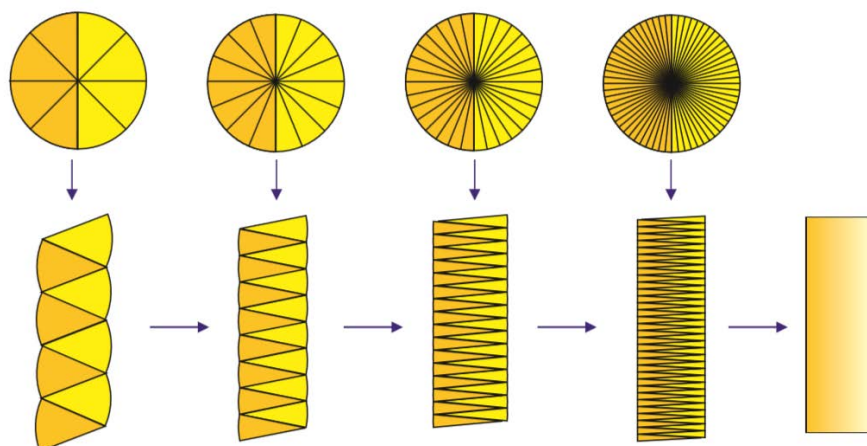


Figura 3. Transformación de un círculo en un rectángulo

Determinando las medidas necesarias y aplicando la fórmula del área del rectángulo se deduce que el área de un círculo es  $\pi \times \text{radio} \times \text{radio}$ . En la Figura 4 se muestra la forma de deducir el área del círculo.

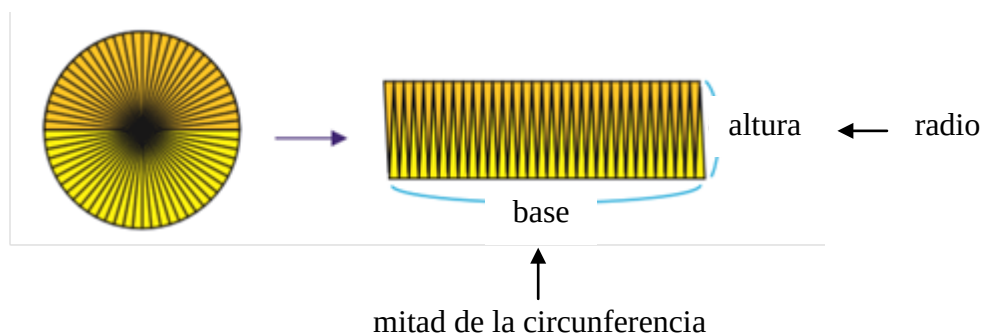


Figura 4. Deducción de la fórmula del área del círculo

De lo anterior se sabe que la base del rectángulo es la mitad de la circunferencia y que la altura del rectángulo es el radio de la circunferencia, sustituyendo estos datos en la fórmula del área del rectángulo se deduce la fórmula para calcular el área de un círculo. En el siguiente cuadro se presenta la deducción de la fórmula del área del círculo.

$$\begin{aligned}
 \text{Área del rectángulo} &= \text{base} \times \text{altura} \\
 &= \text{mitad de la circunferencia} \times \text{radio} \\
 &= (2 \times \pi \times \text{radio} \div 2) \times \text{radio} \\
 &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Área del círculo} &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio} \\
 &= \pi r^2
 \end{aligned}$$

En el caso del círculo, se aplicó la estrategia de “Dividir la figura dada y transformarla en otras figuras a las cuales se les conoce la fórmula para calcular su área”, pero, ¿será el rectángulo y el romboide las únicas figuras en que se puede transformar el círculo?, ¿en qué otras figuras se podrá transformar el círculo?, ¿será ese el único romboide en que se podrá transformar?, si este último fuera el caso ¿qué características tendría ese romboide?

### **Extensión de la deducción de la fórmula del área del círculo**

El currículo de muchos países incluye el estudio del área del círculo en quinto o sexto grado de la educación primaria, pensando en el desarrollo del pensamiento lógico de estos estudiantes, la estrategia aborda anteriormente puede servir para que ellos deduzcan y construyan por sí mismo la fórmula para el área del círculo ya que es fácil ver la relación entre los datos de la altura y la base del rectángulo formado con los datos del círculo. Una vez que se ha deducido la fórmula el objetivo que se pretendía está logrado, sin embargo, ¿qué pasaría si los estudiantes transforman el círculo en otras figuras?, ¿se podrá deducir la fórmula?, ¿se podrá establecer fácilmente la relación de los datos necesarios entre la figura formada y los datos correspondientes del círculo?, ¿qué tan conveniente será exponer a los estudiantes a este tipo de experiencias? Responder a las preguntas anteriores puede ser una situación compleja si se piensa en el nivel de desarrollo del pensamiento de los estudiantes, pero los docentes están en la obligación de conocer estas situaciones y saber la manera de abordarlas por si se presentan en el aula de clases.

La formación inicial de docentes en la mayoría de los países de Latinoamérica se está dando a nivel universitario por lo que los futuros docentes no sólo deben tener el dominio científico y metodológico de lo que van a enseñar a sus estudiantes sino que deben tener un conocimiento elevado y profundo de las matemáticas para que sean conscientes de su enseñanza y expongan a sus estudiantes a situaciones que les permitan por sí mismos construir sus nuevos conocimientos basados en sus experiencias anteriores, asimismo deben tener las herramientas necesarias para atender a aquellos estudiantes que muestran un potencial excepcional en matemáticas y que requieren actividades retadoras, no rutinarias y de alta complejidad matemática que sirvan para satisfacer sus necesidades e intereses en esta rama del saber. De esta manera las universidades deben exponerse a sus futuros docentes a este tipo de experiencias para que tengan prácticas que ayuden a desarrollar mejor su trabajo en los salones de clase en función de sus estudiantes, esto está en consonancia con lo que expresa Godino (2004): el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes, su capacidad para usarla en la resolución de problemas y la confianza y disposición hacia la matemática está condicionada por la enseñanza que da el maestro.

A continuación se presentan algunas transformaciones que puede sufrir el círculo y que ayudan a ver las figuras desde otros puntos de vistas lo cual amplía el conocimiento matemático.

### **Transformación de un círculo en romboides**

Extendiendo el pensamiento y utilizando la estrategia de dividir en 16 sectores circulares el círculo, éste se puede transformar en otros romboides que tienen cierta particularidad. Deduzca

la fórmula del área del círculo de acuerdo a los romboides formados que se presentan en la Figura 5.

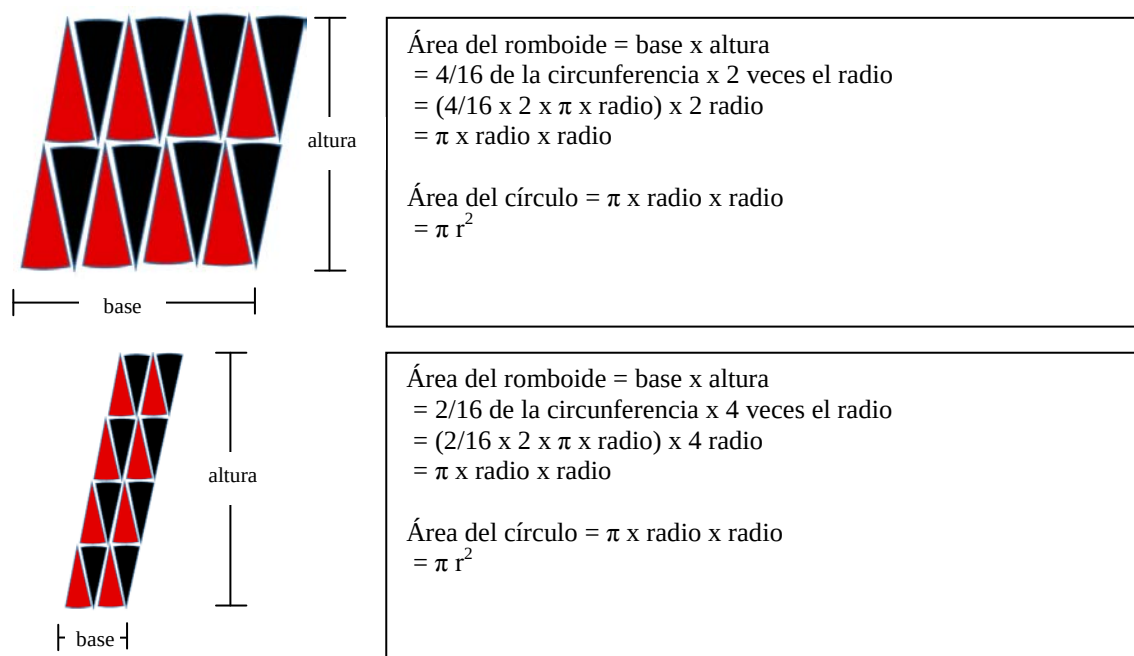


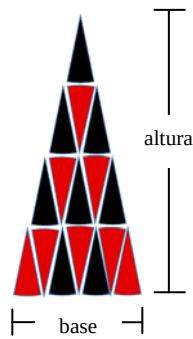
Figura 5. Transformación de un círculo en romboides

En el primer caso, puede decirse que el romboide está formado por dos niveles y que cada nivel representa una parte de la altura donde cada una coincide con el radio del círculo, es decir, que la altura es de 2 radios; y la base del romboide es 2/16 partes de la circunferencia. En el segundo caso, el romboide tiene 4 niveles que corresponde a la altura que sería de 4 radios y la base del romboide es 4/16 de la circunferencia. En ambos casos pueden considerarse las alturas externas. Haciendo los cálculos correspondientes se deduce que la fórmula para el área del círculo es  $\pi r^2$ .

### Transformación de un círculo en un triángulo

Cuando el círculo se ha transformado en un rectángulo y en varios tipos de romboides surge la inquietud: ¿se podrá transformar en otras figuras a las cuales se le conoce la fórmula para el cálculo de su área? Seguramente la respuesta será que sí. En la Figura 6 se presenta la transformación del círculo en un triángulo.





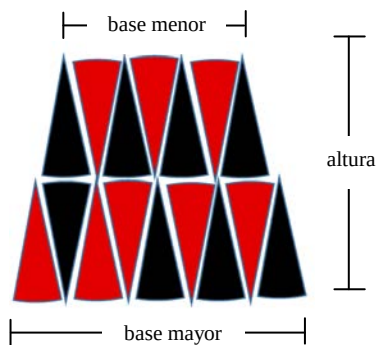
$$\begin{aligned}\text{Área del triángulo} &= \text{base} \times \text{altura} \div 2 \\ &= 4/16 \text{ de la circunferencia} \times 4 \text{ veces el radio} \div 2 \\ &= (4/16 \times 2 \times \pi \times \text{radio}) \times 4 \text{ radio} \div 2 \\ &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Área del círculo} &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio} \\ &= \pi r^2\end{aligned}$$

Figura 6. Transformación de un círculo en un triángulo

### Transformación de un círculo en un trapecio

Transformado el círculo en rectángulos, romboides y triángulos, es tiempo de dejar volar la imaginación, poner en práctica la creatividad y experimentar con otros tipos de figuras. En la Figura 7 se presenta la transformación del círculo en un trapecio.



$$\begin{aligned}\text{Área del trapecio} &= [(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}] \div 2 \\ &= [(5/16 \times 2\pi r + 3/16 \times 2\pi r) \times 2r] \div 2 \\ &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio}\end{aligned}$$

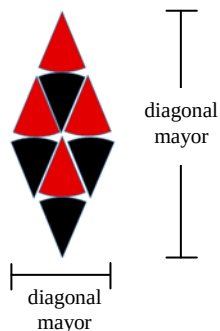
$$\begin{aligned}\text{Área del círculo} &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio} \\ &= \pi r^2\end{aligned}$$

Figura 7. Transformación de un círculo en un trapecio

Este tipo de actividad se puede incluir en el tipo de pensamiento creativo ya que se está tratando de reestructurar una idea en función de una idea ya estructurada, cumpliendo así con las características esenciales de este tipo de pensamiento: fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración.

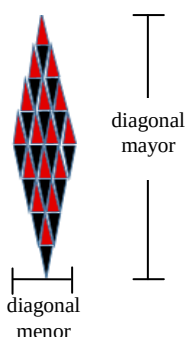
### Transformación de un círculo en un rombo

En la Figura 8 se presenta la transformación del círculo en rombos. En el primer caso se considera el círculo dividido en 8 sectores circulares iguales, puede verse claramente que 4 de ellos forman un triángulo isósceles y con los 8 un rombo. En el segundo caso el círculo se dividió en 32 sectores circulares iguales, como en el caso anterior, con la mitad de los sectores circulares se forma un triángulo isósceles que corresponde a la mitad del rombo y con los otros se completa el rombo.



$$\begin{aligned}\text{Área del rombo} &= (\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}) \div 2 \\ &= [4r \times (2/8 \times 2\pi r)] \div 2 \\ &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Área del círculo} &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio} \\ &= \pi r^2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{Área del rombo} &= (\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}) \div 2 \\ &= [8r \times (4/32 \times 2\pi r)] \div 2 \\ &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Área del círculo} &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio} \\ &= \pi r^2\end{aligned}$$

Figura 8. Transformación de un círculo en un rombo

### Reflexión final

En las actividades anteriores, el círculo se transformó en varias figuras: romboïdes, rectángulos, triángulos, trapecios y rombos, todas ellas dieron paso para deducir que la fórmula para el área del círculo es  $\pi r^2$ . Entonces, ¿cuáles de ellas se pueden abordar con los estudiantes de la educación básica que por primera vez se enfrentan a este conocimiento?, ¿cuáles se pueden estudiar con los futuros docentes que forman parte de algún proceso de formación inicial de docentes que tendrán la responsabilidad de hacer que los estudiantes aprendan este conocimiento? Lo importante de esta actividad es ver que hay diferentes estrategias para abordar un mismo contenido y que todas contribuyen a desarrollar el pensamiento y ampliar el conocimiento matemático. Para los estudiantes habrá que utilizar aquellas que conduzcan a satisfacer sus necesidades e intereses de acuerdo a su nivel de pensamiento, actividades que a través del involucramiento en las mismas les permitan convertirse en protagonistas de su propio aprendizaje, disfrutar de las matemáticas y sentir la curiosidad de seguirlas estudiando. Para que esto se vuelva una realidad, los futuros docentes no sólo deben tener un conocimiento profundo de las matemáticas sino que han de poseer un amplio dominio de las técnicas de enseñanza, confiar en el potencial de sus estudiantes y crear un ambiente propicio para la construcción de un aprendizaje interactivo. Las instituciones encargadas de la formación inicial de docentes son las responsables que sus futuros egresados tengan la capacidad de realizar actividades que

contribuyan a que los estudiantes desarrollen su pensamiento lógico, logren un dominio de la matemática y se vuelvan el centro de su propio aprendizaje, de esta manera, actividades de este tipo deben estar contempladas en su plan de estudio, pero más que eso, deben realizarse en los salones de clases y servir como punto de partida para la reflexión de la mejora continua de la enseñanza de las matemáticas.

### Referencias bibliográficas

- Godino, J. D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Consultado el 10 de enero de 2015, de [http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9\\_didactica\\_maestros.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf)
- Monografía.com. *El pensamiento creativo*. Consultado el 20 de febrero de 2015, <http://www.monografias.com/trabajos26/pensamiento-creativo/pensamiento-creativo.shtml#biblio>
- National Council of Teachers of Mathematics.(2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática (Resumen Ejecutivo)*. Consultado el 25 de enero de 2015, de [http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math\\_Standards/Executive%20Summary%20\\_Spanish\\_e-Final.pdf](http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/Executive%20Summary%20_Spanish_e-Final.pdf)
- Proyecto para el Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática PROMETAM Fase II. (2011). *Guía de Capacitación de Matemática*. Comayagüela. Honduras.
- Secretaría de Educación. (2007). *Matemática Cuaderno de Trabajo. 1ro-6to grado*. Tegucigalpa. Honduras.
- Secretaría de Educación. (2007). *Matemática: Guía para el Maestro. 1ro-6to grado*. Tegucigalpa. Honduras.