XIV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Interamerican Conference on Mathematics Education
2015
3-7 mayo
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

O estudo da cicloide utilizando o software GeoGebra

André Lúcio **Grande**[1]
Colégio São Marcos – Mogi das Cruzes
Brasil
andreamath@uol.com.br

Resumo

Esta pesquisa objetivou estudar algumas propriedades geométricas da curva plana denominada cicloide utilizando o software GeoGebra como recurso computacional auxiliar. A partir de sua construção, pode-se intuitivamente elaborar algumas conjecturas sobre suas características geométricas no sentido de procurar formalizar suas equações paramétricas. Como referencial teórico, utilizaram-se conceitos ligados ao uso da intuição e do rigor destacando a importância da elaboração de conjecturas e hipóteses no processo de ensino de aprendizagem da Matemática. Sobre os procedimentos metodológicos, ressalta-se o uso do GeoGebra que propiciou explorar algumas ideias intuitivas sobre o objeto de estudo em questão bem como validar e formalizar as conjecturas elaboradas.

Palavras chave: cicloide, curvas planas, intuição, GeoGebra, equações paramétricas.

Introdução

A Educação Matemática vem apresentando em suas diferentes modalidades, quer seja na Educação Infantil, Ensino Fundamental, Médio ou Superior um número significativo cada vez maior de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos abordados em todos esses ciclos como, por exemplo, a construção dos conjuntos numéricos, com gênese nas séries iniciais no estudo dos números naturais e que no Ensino Superior, num curso de Cálculo Diferencial e Integral ou Análise Real, esses conceitos são retomados e estudados com um rigor e formalismo maiores.

Além desses conceitos com tais características, alguns tópicos matemáticos envolvem diversas áreas do conhecimento, o que se pode inferir que a abordagem desses conteúdos em sala

[1] Esta pesquisa contou com a participação dos alunos do Ensino Médio do Colégio São Marcos – Mogi das Cruzes que integram o Núcleo de Pesquisas e Ciências e Pesquisa

de aula possibilita promover uma interdisciplinaridade entre elas. O estudo desses objetos matemáticos se torna, com isso, uma valiosa experiência no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática.

Dentre alguns temas, o estudo das curvas planas, por exemplo, pode englobar alguns elementos que se inter-relacionam, tais como:

- o movimento de um ponto no plano que gera uma curva utilizando conceitos de Cinemática e Dinâmica em Física;
- o estudo do contexto histórico que envolve a gênese e o desenvolvimento do objeto matemático de estudo;
- o envolvimento de diversas áreas da Matemática como Geometria Plana, Analítica e Trigonometria, dentre outras.

Esse tema pode ser abordado, de um modo geral, nos diversos níveis de ensino, quer seja Médio ou Superior. No caso específico do Ensino Médio, por exemplo, o estudo da curva denominada *cicloide* apresenta todos esses elementos descritos. A cicloide é uma curva plana gerada pelo movimento de um ponto localizado em uma circunferência que gira sobre uma reta sem escorregar, conforme a figura a seguir:

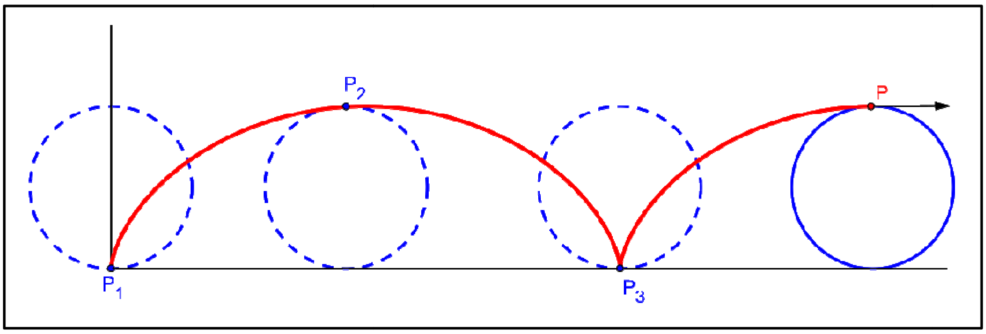

Figura 1. A Cicloide.

O estudo dessa curva sucinta, além da utilização de conceitos da Mecânica, Geometria e Álgebra, o uso de um recurso computacional para simular a questão do movimento, sendo que o objeto de estudo é tratado de um ponto de vista “dinâmico” e não “estático”. Dentre os softwares com tais propriedades, o GeoGebra[2] se constitui de um recurso computacional que possui algumas características essenciais que podem auxiliar no ensino e aprendizagem de alguns conceitos matemáticos.

O GeoGebra permite também o estudo dos objetos matemáticos procurando explorar o raciocínio intuitivo dos alunos por meio da elaboração de conjecturas e hipóteses de modo interativo e dinâmico, promovendo uma inter-relação entre as representações algébrica, gráfica e geométrica do objeto matemático.

Com relação ao papel do uso do raciocínio intuitivo, o filósofo e matemático Jules Henri Poincaré (1854-1912) defendia a intuição como uma ideia ou interpretação antecipada daquilo que se está procurando, constituindo-se de um sentimento que possibilita gerar hipóteses.

[2] www.geogebra.org

O autor aborda em suas obras como *A Ciência e a Hipótese* (1984) e *O Valor da Ciência* (1905) alguns temas que discutem o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento cientifico, criticando a ciência concebida como absoluta e inquestionável e destacando a importância da intuição e da lógica nesse processo de construção.

Em sua obra A Ciência e a Hipótese (1984), por exemplo, o autor procura trazer à tona a análise dos principais aspectos para se considerar uma ciência válida apenas se for passível de experimentação.

Poincaré (1995) defendia a intuição como papel central na questão da criatividade e a invenção. A intuição, segundo o autor, é uma faculdade do espírito, cuja função é essencialmente heurística, pois para o mesmo, é pela intuição que se descobre e se inventa, mas é pela lógica que se justifica.

Apropriando-se dessas ideias relacionadas à importância da exploração de hipótese e conjecturas na construção do conhecimento, esse trabalho visou estudar algumas propriedades geométricas da curva cicloide utilizando o software GeoGebra procurando a partir de algumas hipóteses e ideias elaboradas intuitivamente descrevê-la algébrica e geometricamente. Tal pesquisa em sua elaboração contou com a participação dos alunos do Ensino Médio do Colégio São Marcos que integram o Núcleo de Pesquisas em Ciências, com sede no próprio colégio, destinado ao estudo de tópicos especiais da Matemática com vistas à difusão cultural.

Após o estudo das propriedades da cicloide utilizando o GeoGebra, realizou-se um experimento prático de aplicação baseado no problema da braquistócrona (uma cicloide invertida) utilizando-se como simulador o mesmo recurso computacional. Todavia, antecedendo tal estudo, apresentaremos um breve contexto histórico relacionado à gênese do objeto matemático em questão.

Contexto Histórico

A cicloide foi estudada pela primeira vez por Charles Bovelles (1479 – 1566), que num trabalho de geometria publicado em Paris, em 1501, se referiu a essa curva relacionando-a com o problema da quadratura do círculo. Os primeiros estudos rigorosos que se tem conhecimento são creditados a Giles Person de Roberval (1602 – 1675) que a denominou de trochóide (roda, em grego). Blaise Pascal (1623 – 1662) passou a chamá-la de roulette e Galileu Galilei (1564 – 1642) estudou-a tendo inclusive chamado a mesma de cicloide e provou pesando modelos de papel que a área sob a curva é igual a três vezes a área do circulo gerador. Utilizando o método dos indivisíveis, esse resultado foi provado posteriormente por seu discípulo Marco Evangelista Torricelli (1608 – 1647), sendo acusado de plágio por Roberval; fato que pode ter sido a razão da morte prematura de Torricelli.

Vincenzo Viviani (1622 – 1703) calculou a reta tangente a cicloide, resultado que René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) também alcançaram.

Sobre o comprimento de um arco de cicloide, destacam-se os trabalhos de Christopher Wren (1632-1723) um famoso arquiteto inglês que projetou 51 igrejas em Londres, incluindo a Catedral de São Paulo e os de Roberval, que provou que o comprimento desse arco é igual a oito vezes o raio do círculo gerador.

Christian Huygens (1629-1695) mostrou, por volta de 1673, que o tempo gasto por uma partícula para chegar a um nível inferior, partindo do repouso e deslizando, sem atrito, sob a ação da gravidade é um arco invertido de cicloide, independe do ponto de partida (tautocronismo). Esse resultado o levou a construir o relógio de pêndulo, cuja extremidade superior oscila entre dois ramos de uma cicloide, o que faz com que o período seja sempre o mesmo, independente da amplitude das oscilações.

Algum tempo depois, a cicloide apareceria como solução de outro importante problema da ciência do final do século XVII, conhecido como braquistócrona ou do tempo mínimo. Em 1696 Johann Bernoulli lançou esse problema como desafio aos matemáticos na *Acta Eruditorum* da seguinte maneira: suponha que dois pregos sejam martelados ao acaso em uma parede (não na mesma vertical), e que o prego superior seja conectado ao inferior por um arame flexível na forma de uma curva lisa. Qual a forma do arame no qual uma partícula deslizará (sem atrito) sob a influência da gravidade, para passar do prego superior ao inferior no menor tempo possível?

De imediato a questão despertou um grande interesse e logo foi resolvida por Isaac Newton (1642-1727), por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), por Jakob Bernoulli (1654-1705), irmão mais velho de Johann e por ele próprio. Fato curioso é que na sua solução Johann usou uma analogia com a refração da luz, demonstrando grande engenhosidade ao relacionar temas que aparentemente eram bem distintos. O problema da braquistócrona foi marcante porque apontou uma linha de pesquisa importantíssima, chamada de cálculo das variações e que trata do estudo de funcionais ou de funções que dependem de outras funções ou curvas.

Fundamentação Teórica

A cicloide é uma curva obtida como trajetória de um ponto *P(x, y)* localizado numa circunferência de raio *r* que gira sobre o eixo Ox sem escorregar.

Para obter suas equações paramétricas, seja *C* o centro da circunferência e suponha que a mesma girou θ radianos, sendo que para $\theta = 0$ o ponto *P* coincide com o ponto *O*, conforme a figura a seguir:

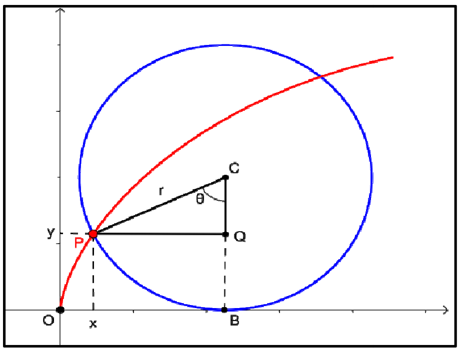

Figura 2. Equações paramétricas da cicloide.

Sendo assim, temos que:

$$|\mathrm{OB}| = \mathrm{med}(\widehat{BP}) = \mathrm{r}\theta$$

O centro do círculo terá coordenadas $C = (\mathrm{r}\theta, \mathrm{r})$

Com isso, as coordenadas do ponto P serão:

$$\boldsymbol{x} = |\mathrm{OB}| - |\mathrm{PQ}| = \mathrm{r}\theta - \mathrm{rsen}\theta = \mathrm{r}(\theta - \mathrm{sen}\theta)$$

$$\boldsymbol{y} = |\mathrm{BC}| - |\mathrm{BQ}| = \mathrm{r} - \mathrm{rcos}\theta = \mathrm{r}(1 - \cos\theta)$$

Portanto, as equações paramétricas da cicloide serão dadas por:

$$c(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = r(\theta - sen\theta) \\ y(\theta) = r(1 - cos\theta) \end{cases} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R}.$$

Cabe ressaltar que essa equação foi deduzida para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e que as equações de c(θ) são válidas para outros valores de θ.

Procedimentos Metodológicos – O estudo da Cicloide

Como procedimentos metodológicos foi realizado inicialmente um estudo da cicloide utilizando-se o software GeoGebra de uma maneira intuitiva objetivando estabelecer algumas conjecturas para se deduzir suas equações paramétricas $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Cabe ressaltar que é possível obter a equação cartesiana da curva, porém a mesma é relativamente complicada, o que torna mais simples e conveniente utilizar as equações paramétricas.

O GeoGebra é um software livre de Geometria Dinâmica que apresenta uma interface entre Geometria e Álgebra e possui a vantagem de dispor simultaneamente de diferentes representações do mesmo objeto matemático, sendo que essas representações podem ser simultaneamente manipuladas.

Com relação ao estudo da cicloide utilizando o GeoGebra, os alunos podem inicialmente de maneira intuitiva conjecturar a seguinte ideia: como a cicloide é obtida pelo movimento de um ponto P sobre uma circunferência de centro *C* e raio *r*, quanto esta gira sobre uma reta sem escorregar, podemos imaginar que a cada volta completa do ponto *P* a circunferência translada uma distância igual a $2\pi r$.

Além disso, pode-se questionar sobre algumas propriedades geométricas referentes à forma dessa curva como, por exemplo, se a mesma é periódica (em caso afirmativo, qual o seu período), os pontos, caso existam, extremos relativos (ponto de máximo ou de mínimo em *x* e *y*) e quais as alterações na curva ao variarmos o raio *r* da circunferência geradora.

Para explorar essas ideias intuitivas utilizando o GeoGebra, inicia-se o traçado da cicloide com a criação de dois controles deslizantes: o primeiro será chamado de *r*, destinado à medida do raio da circunferência geradora variando no intervalo $[0, 4]$ e o segundo denominado por *a* correspondente ao valor do comprimento de arco retificado dessa circunferência variando no intervalo $[0, 4\pi r]$. O valor $4\pi r$ corresponde a duas vezes o comprimento da circunferência geradora. Os controles, por conveniência, terão valores iniciais iguais à $r = 1$ e $a = 0$.

A partir desses parâmetros criados constrói-se uma circunferência de centro $C = (a, r)$ e raio *r* e um ponto *P* sobre a circunferência, localizado inicialmente na origem (0,0) conforme a figura a seguir:

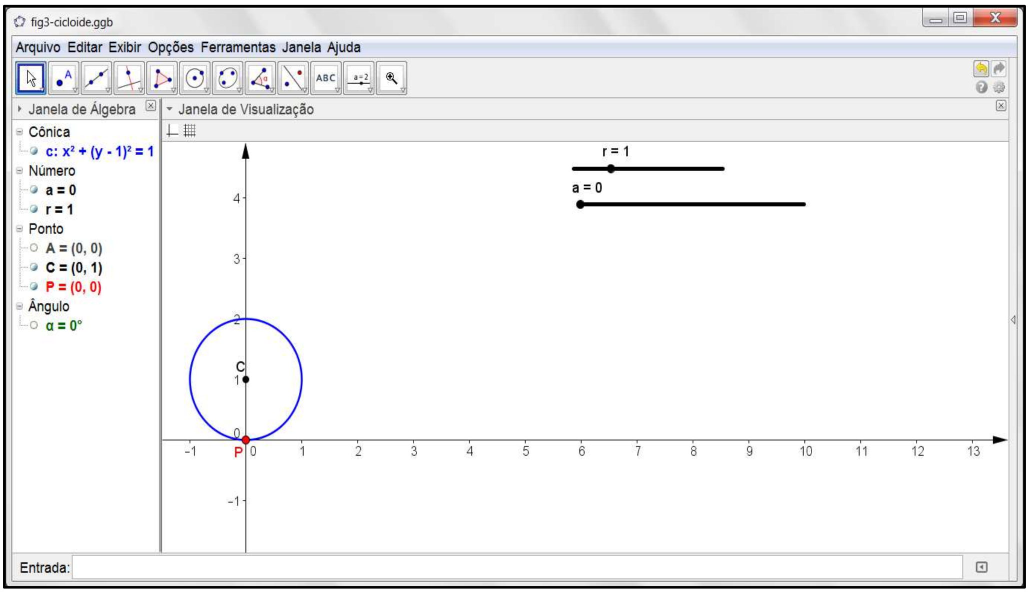

Figura 3. Construção da cicloide no GeoGebra.

Para obter a cicloide, devemos considerar que à medida que a circunferência gira sobre o eixo *Ox*, o ponto P descreve uma curva. Para visualizar tal situação, no GeoGebra utiliza-se o comando *Ângulo com Amplitude Fixa*, sendo que ao selecionarmos o ponto P, o ponto C como vértice e a amplitude dada por $a/_r$ habilitando a opção sentido horário, ao selecionamos no ponto *P* com a opção habilitar rastro e movimentando o seletor *a*, obtendo a cicloide conforme a figura a seguir:

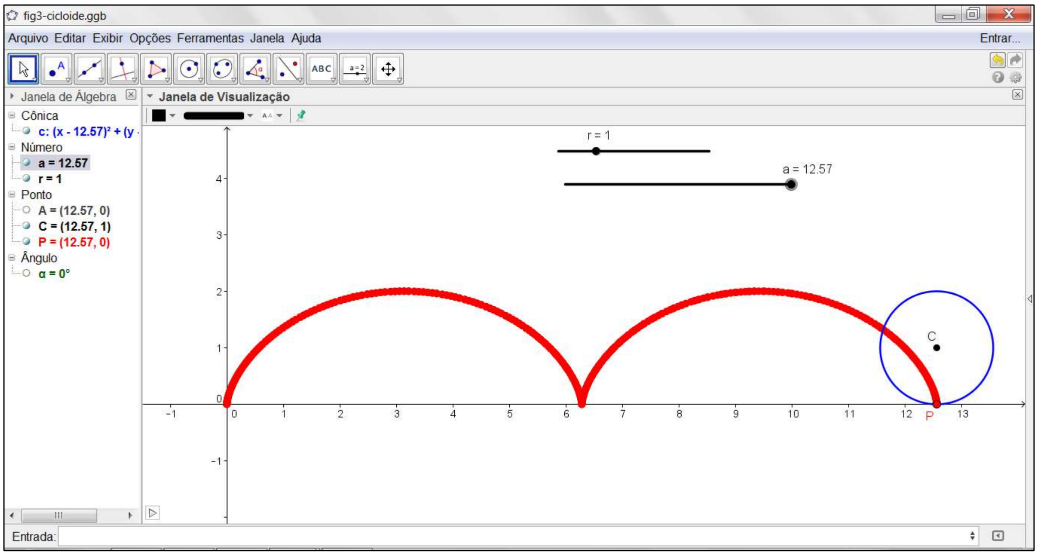

Figura 4. Cicloide obtida no GeoGebra.

Observa-se que a cicloide possui período igual a $2\pi r$, pois a circunferência geradora foi retificada duas voltas completas $(4\pi r)$, conforme selecionado no cursor deslizante a e que os valores mínimo e máximo de $y(t)$ são dados, respectivamente, por $y = 0$ e $y = 2r$. Esses resultados podem ser inferidos mesmo alterando-se o valor do raio r da circunferência geradora.

Após algumas conjecturas serem validadas por meio da manipulação dos controles deslizantes, a formalização do estudo da cicloide pode ser feita demonstrando-se suas equações paramétricas $x(t)$ e $y(t)$ que a descrevem algebricamente.

Para isso, deve-se comentar com os alunos que a equação da cicloide pode ser obtida de uma maneira mais simplificada por meio de suas equações paramétricas, sendo que as coordenadas (x, y) de um ponto *P* da cicloide serão dadas em função do ângulo θ descrito pelo ponto *P* na circunferência. Utilizando-se desses argumentos, de maneira análoga aquela descrita na fundamentação teórica, obtém-se:

$$c(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = r(\theta - sen\theta) \\ y(\theta) = r(1 - cos\theta) \end{cases} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R}.$$

No GeoGebra essas equações podem ser inseridas denominando-se, por conveniência, o ângulo θ como parâmetro *t* e criando-se um controle deslizante denominado *r* para o raio da circunferência geradora. No campo de entrada, inserindo-se $p(t) = r(t - sent)$ e $q(t) = r(1 - cost)$ e utilizando-se o comando *Curva [p(t), q(t), t, 0, 4πr]*, sendo *r* o raio da circunferência, teremos a cicloide gerada conforme a figura a seguir:

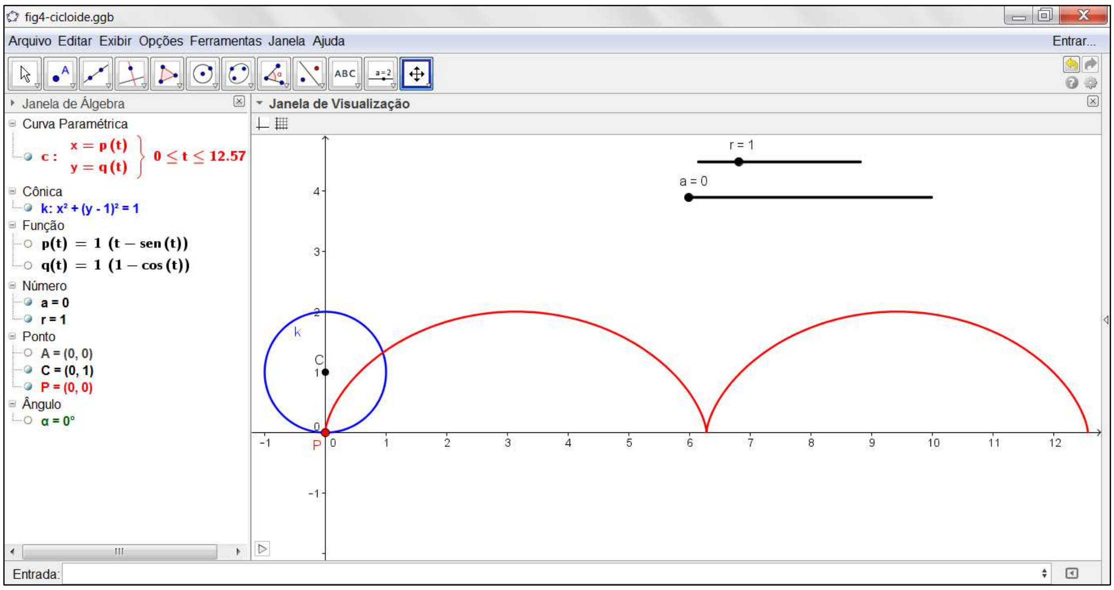

Figura 5. Equações paramétricas da cicloide.

Além da construção da cicloide por meio de suas equações paramétricas, pode-se comentar com os alunos que a mesma pode ser obtida do ponto de vista de um lugar geométrico, com relação ao ponto *P* e o parâmetro *a*. Para isso, utilizamos o comando do GeoGebra denominado *Lugar Geométrico* do ponto *P* em relação ao parâmetro *a*.

As equações paramétricas $x(t)$ e $y(t)$ obtidas podem ainda ser estudadas algebricamente para se validar algumas conjecturas. Na equação $x(t) = r(t - sent)$, com t ∈ ℝ pode-se discutir, por exemplo, que $x(t) = 0$ é válida se, e somente se, $t - sent = 0$, o que implica $sent = t$ e isso só ocorre quando $t = 0$ conforme ser observado na cicloide gerada.

Pode-se discutir também a respeito da existência do valor máximo para $x(t)$, pois como $sent$ varia no intervalo $[-1, 1]$, como t ∈ $\mathbb{R}$, o valor de $t - sent$ varia no intervalo $[t - 1, t + 1$. Sendo assim, conclui-se que $x(t)$ não admite valor máximo.

Para a equação $y(t) = r(1 - cost)$, como $cost$ varia no intervalo$[-1, 1]$ consequentemente o valor de $y(t)$ varia no intervalo $[0, 2r]$ pois para $t = \pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$, teremos $cost = -1$ e, portanto, $y = 2r$ (valor máximo) e para $t = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$, teremos $cost = 1$ e, portanto, $y = 0$ (valor mínimo) conforme observou-se na conjecturou-se sobre a forma da cicloide.

Com relação às propriedades da cicloide observadas no contexto histórico, como por exemplo, o cálculo da área e comprimento de arco, cabe ressaltar que ambas podem ser obtidas no GeoGebra, entretanto sua demonstração formal foge ao escopo dos assuntos abordados no Ensino Médio, pois envolvem conceitos tratados num curso de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior, por exemplo.

Aplicação: Experimento prático

Após obter as equações paramétricas da cicloide pode-se efetuar um experimento prático ligado ao problema de se obter uma curva ao longo da qual uma partícula, sob a influência da gravidade, deslizará no tempo mais curto. Conforme foi descrito no contexto histórico, constatou-se que tal curva é chamada de braquistócrona, que corresponde a uma cicloide invertida.

Para comprovar tal descoberta, inicialmente realizou-se uma simulação utilizando o GeoGebra onde foram construídas geometricamente três rampas com os seguintes formatos: plano inclinado, arco de parábola e braquistócrona, ambas com o mesmo desnível de altura e com o mesmo ponto inicial e final. Foram inseridas em cada rampa, respectivamente, três pontos A, B e C que representavam as três esferas abandonadas, respectivamente, no plano inclinado, arco de parábola e braquistócrona.

Utilizando o comando *Animar*, os três pontos ao serem movimentados, deslizaram sobre as rampas construídas e constatou-se que o ponto C localizado na braquistócrona é o primeiro a atingir o ponto de chegada, conforme a figura a seguir:

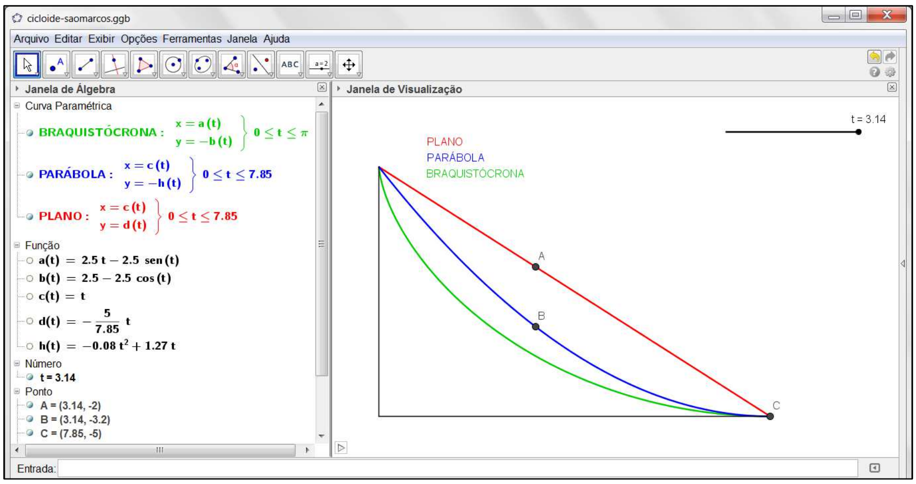

Figura 6. Simulação do experimento no GeoGebra

Para o experimento prático, utilizando-se materiais simples como placas de madeira, parafusos para fixação e esferas de aço, elaborou-se um sistema constituído por três rampas cujas formas correspondiam ao plano inclinado, arco de parábola e braquistócrona (cicloide invertida).

O objetivo desse experimento procurou mostrar que ao abandonarmos três esferas de aço idênticas simultaneamente do mesmo ponto de partida, a braquistócrona é aquela que permite a descida no menor tempo possível, conforme figura a seguir:

Figura 7. Experimento prático

Com isso, além do estudo teórico ligado ao objeto matemático esse experimento permitiu diagnosticar uma importante aplicação da cicloide envolvendo tempo mínimo de descida de objetos e que pode ser usada, por exemplo, da construção de pistas de skate, ou em alguma situação que necessite de tal característica.

Considerações finais

Esse trabalho procurou mostrar por meio de um exemplo, o estudo da curva cicloide, possibilidades e uma proposta de abordagem de um tópico matemático abordado no Ensino Médio com vistas à interdisciplinaridade de diversos conceitos e áreas envolvidas, evidenciando a importância do uso de um recurso computacional no ensino e aprendizagem da Matemática.

Ao realizar o estudo da cicloide procuramos destacar a pesquisa sobre o contexto histórico ligado à gênese e ao desenvolvimento do objeto matemático, a questão do ponto de vista dinâmico envolvendo a construção da curva e os conceitos matemáticos que podem ser explorados como geometria plana, analítica bem como alguns tópicos envolvendo trigonometria.

Além disso, a abordagem em sala de aula desse assunto permite ao professor a realização de um experimento prático, o que torna em grande medida um atrativo por parte dos alunos no estudo do objeto matemático.

Em todas as etapas envolvidas, o GeoGebra exerceu um papel imprescindível, pois além de se constituir como um recurso computacional auxiliar no ensino e aprendizagem, o mesmo permite ao aluno explorar, intuir, conjecturar, interagir com o objeto matemático de estudo de modo dinâmico, além de auxiliar na validação das hipóteses e conjecturas formuladas pelos estudantes bem como os resultados encontrados no contexto histórico. O GeoGebra também se tornou extremamente útil na simulação do experimento realizado sobre a braquistócrona demonstrando sua grande gama de recursos, o que se pode inferir sua significativa contribuição na construção do conhecimento científico.

Referências e bibliografia

Ávila, G. S. S. (2011). *Cálculo das funções de uma variável* (Vol.2.). Rio de Janeiro: LTC, 2011.

Baron, M. E. V., & Bos, H. J. M. (1985). *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo* (Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Mayer e Maria José M. M. Mendes). Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 5 v.

Boyer, C. (1996). *História da Matemática* (Tradução Elza F. Gomide, 2ª. ed.). São Paulo: Edgard Blucher.

Courant, R., & Robbins, H. (2000). *O que é matemática? : uma abordagem elementar de métodos e conceitos* (Tradução de Adalberto da Silva Brito). Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Eves, H. (2004). *Introdução à História a Matemática* (Tradução Hygino H. Domingues). Campinas, SP: Editora de UNICAMP.

Simmons, G. F. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral com Geometria Analítica* (Vol. 1., Trad. Seiji Hariki). São Paulo: Pearson Education do Brasil.

Poincaré, H. (1984). *A Ciência e a Hipótese* (Tradução Maria Auxiliadora Kneipp). Brasília: Editora UNB.

Poincaré, H. (1995). *O valor da ciência* (Tradução de Maria Helena Franco Martins). Rio de Janeiro: Contraponto.

Poincaré, H. (2004). *Science and Method* (Translated by Francis Maitland). New York: Barnes e Noble Books.

Poincaré, H. (2008). *Ensaios Fundamentais.* Rio de Janeiro: Contraponto.