As Ternas Pitagóricas e os Números Congruentes: Uma breve História

Inocêncio **Fernandes** Balieiro Filho
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
balieiro@mat.feis.unesp.br
Jaime Edmundo **Apaza** Rodriguez
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
balieiro@mat.feis.unesp.br
Nair **Rodrigues** de Souza
Instituto Federal de Mato Grosso do Sul, IFMS
Brasil
nair.souza@ifms.edu.br

Resumo

Neste trabalho, por meio de uma revisão histórica, estabelecemos uma discussão sobre dois problemas clássicos e paralelos: As ternas pitagóricas e os Números Congruentes. Para isso, elaboramos um panorama histórico do desenvolvimento desses problemas, desde os estudos realizados pelos babilônicos, pelos gregos e pelos árabes, passando pelos trabalhos de Fibonacci na Idade Média e chegando a sua formulação atual, para discutir as relações desses dois problemas com as Aritméticas das Curvas Elípticas, assunto que é estudado na atualidade por seu uso na Criptografia.

Palavras chave: ternas pitagóricas, equação diofantina, números congruentes, Teorema de Pitágoras, triângulos retângulos.

Introdução

A arte de resolver problemas envolvendo equações diofantinas é muito antiga e até hoje existem problemas sem solução ou com soluções parciais e, em outros casos, com soluções diversas. Um desses problemas, como veremos adiante, tem a ver com as chamadas ternas pitagóricas e esta intimamente relacionada com o problema dos números congruentes. O estudo desse assunto e outros similares remontam a tempos antigos e, por isso, faremos um breve retrospecto histórico. Embora existam várias definições equivalentes, a melhor forma de definir um número congruente é: um inteiro positivo que pode ser representado pela área de um triângulo retângulo cujos lados são números racionais. Neste trabalho, poderemos perceber que esse estudo envolve as ternas pitagóricas.

A metodologia de pesquisa empregada no presente trabalho é o estudo bibliográfico. Para a realização do estudo bibliográfico foram seguidas as etapas de documentação, leitura de reconhecimento, leitura seletiva, leitura reflexiva, leitura interpretativa e redação da pesquisa, descritas em Balieiro (2004).

O problema dos números inteiros que representam áreas de triângulos retângulos, cujos lados sejam números racionais, é antigo e conhecido como o Problema dos Números Congruentes. Isto apareceu pela primeira vez nos manuscritos árabes, por volta de 900 a.C. Em 1983, J. B. Tunnell deu uma resposta conjectural para esse problema, demonstrando que se existe um triângulo com área n (com n par ou ímpar), então o número de soluções pares é igual ao número de soluções ímpares (para certas equações diofantinas). No entanto, a demonstração da recíproca dessa afirmação que usa a conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer, ainda não foi demonstrada.

O problema dos Números Congruentes (Ternas Pitagóricas) remonta à época do matemático italiano Leonardo Pisano (Fibonacci). Naquela época, a Europa ainda estava no período "negro" da sua história, ao passo que os árabes estavam no auge de sua glória. Eles ensinaram a Fibonacci o que hoje é chamado de sistema de numeração hindu-arábico, que tinham aprendido com professores visitantes da Índia. E, assim, Fibonacci introduziu esse sistema na Europa. No seu livro *Liber Abacci* (O Livro dos Cálculos), ele ensinou aos europeus como fazer aritmética com os nove figuras dos indianos e o símbolo 0, o que os árabes chamavam de cifra. Nesse período, na Europa usavam-se os numerais romanos, que não eram muito adequados para as operações elementares da Aritmética. Além disso, Fibonacci também deu contribuições originais na Teoria dos Números. As questões matemáticas que foram solucionadas por Fibonacci foram propostas pelo matemático João de Palermo, da corte do Imperador Frederico II. Parece que Frederico II admirava e estava ciente dos trabalhos de Fibonacci sobre Matemática.

Em 1225, a corte de Frederico II reuniu-se em Pisa e Fibonacci foi convidado para demonstrar suas descobertas em Matemática. Não se sabe exatamente quando João de Palermo publicou seus problemas, mas os dois certamente se reuniram em Pisa e João entregou os seus problemas diretamente a Fibonacci. Nesta reunião, Fibonacci foi questionado por João, se 5 é a área de um triângulo retângulo com todos os lados racionais. Mas, segundo Dickson (1971), essa questão remonta a um manuscrito árabe escrito anonimamente em algum lugar antes de 972. Hoje, sabemos que 6 é o menor número natural que é a área de um triângulo retângulo cujos comprimentos dos lados são números inteiros e que o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 é o único triângulo cuja área é 6. Em 1225, Fibonacci descobriu um triângulo retângulo de lados 3/2, 20/3 e 42/6, cuja área é 5, que é um número natural menor do que 6. Isto levantou a seguinte pergunta: É possível que cada número natural n possa ser representado como a área de um triângulo retângulo cujos lados sejam números racionais? Há 350 anos, Fermat mostrou que a resposta é negativa para n =1, 2 ou 3 (e, portanto, para n =4). Assim, Fibonacci já tinha encontrado o menor número congruente, ou seja, um número natural que é a área de um triângulo retângulo racional.

A sequência dos números inteiros congruentes começa com 5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24,... Por exemplo, 5 é um número congruente porque representa a área de um triângulo de lados 20/3, 3/2, 41/6. Similarmente, 6 é um número congruente, pois representa a área de um triângulo de lados 3, 4, 5; ao passo que 3 não é um número congruente, pois 3 não está dentro dessas especificações. Se q é um número (racional) congruente, então s^2q também é um número congruente para qualquer número racional s (basta multiplicar cada lado do triângulo por s).

Para perceber o desafio, o leitor é convidado a demonstrar que 7 é um número congruente e exibir um triângulo retângulo racional de área 7.

Até hoje, ninguém encontrou ainda um algoritmo incondicional que decida, em um número finito de passos, se um dado número natural n é congruente ou não. É claro que uma forma de demonstrar que um dado número natural n é congruente é produzir um triângulo racional com área n. Mas, encontrar tal triângulo é a tarefa mais difícil. Por exemplo, o matemático americano D. Bernard Zagier demorou um tempo razoável para encontrar um triângulo com todos os lados de comprimento racional e cuja área é o número primo 157.

A ausência de ternas pitagóricas no período egípcio antigo

A constituição da civilização egípcia surge da unificação de comunidades rurais e urbanas, localizadas próximas ao curso do Rio Nilo, que se aglutinaram para formarem os reinos do Alto e do Baixo Egito. Conforme Grimal, o primeiro rei que reuniu os impérios do Alto e Baixo Egito foi Narmer. De Narmer, que começa por volta de 3100 a. C. e termina com a conquista de Alexandre por volta de 322 a. C., sucederam distintos impérios e períodos intermediários.

Os documentos (papiros) que contêm registros de conteúdos de Matemática foram preservados em virtude do clima seco do Egito. E, segundo Clagett (1999), as principais informações de conteúdo matemático são o papiro de Rhind, o papiro de Moscou, o rolo de couro de Matemática Egípcia, os papiros de Kahun, Berlim e Reisner. Ainda segundo Clagett (1999), a matemática contida nesses documentos descreve problemas de aritmética, álgebra ou geometria relacionados com contagens, inventários de bens, produtos, prisioneiros, medidas de comprimentos, medidas de área, medidas de volume e medidas de tempo (horas, dias, meses e anos). Gillings (1982) indica não haver vestígios relacionados com o Teorema de Pitágoras na matemática do povo egípcio. Além disso, cita alguns historiadores da Matemática que argumentam em favor desse ponto.

> Não há documento algum para comprovar que no Egípcio sabia sequer um caso particular do teorema de Pitágoras. R. C. Archibald.
> Em 90% de todos os livros, encontra-se a afirmação que os egípcios conheciam o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, e que eles utilizaram para construir ângulos retos. Quanto valor tem essa afirmação? Nenhum! B. L. Van Der Waerden.
> Não há indicação que os Egípcios tinham qualquer noção do teorema de Pitágoras, apesar de algumas histórias infundadas sobre "harpedonaptai" (esticadores de corda), que supostamente construíram triângulos retângulos com a ajuda de uma corda com 3 + 4 + 5 = 12 nós. Dirk J. Struik.
> O historiador Cantor tinha suspeitado de que os egípcios sabiam que (3, 4, 5) é triângulo retângulo, e que eles utilizavam esse conhecimento para construir ângulos retos. A. Seidenberg.
> Não parece haver evidência alguma que eles sabiam que o triângulo (3, 4, 5) é retângulo; de fato, de acordo com a mais recente autoridade (T. Eric Peet, The Rhind Mathematical Papyrus, 1923), nada em matemática egípcia sugere que os Egípcios estavam familiarizados com esse ou quaisquer casos especiais do teorema de Pitágoras. T. L. Heath (Gillings, 1982, p. 242).

As ternas pitagóricas no período babilônico

A denominada civilização babilônica engloba um conjunto de povos que viveram na Mesopotâmia em um período que começa por volta 5.000 a. C. e termina por volta dos primeiros tempos do cristianismo. A constituição dessa civilização deve-se aos vários povos (sumérios, acádios, assírios, babilônios e outros) que habitaram as regiões entre os rios Tigre e Eufrates. Por volta de 3.000 e 2.000 a. C., a parte sul da Mesopotâmia foi governada pelos sumérios, cuja cultura alcançou um nível elevado. Eles pertencem aos primeiros povos que foram capazes de estabelecer uma forma de escrita que consistia em pressionar símbolos numa superfície (tábuas) de argila mole, com um estilete em forma de cunha, que depois cozinhavam. Um número considerável dessas tábuas foi desenterrado no final do penúltimo e último século em sítios arqueológicos. Os símbolos em forma de cunha (cuneiformes) também foram utilizados para representar um sistema numérico desse povo.

Os textos mais antigos datam de cerca de 3000 a. C., época da primeira dinastia de Ur. No decorrer do tempo, um povo que habitava mais ao norte da Mesopotâmia, os Acádios, migraram para o sul. E com o tempo dominaram os sumérios e influenciaram cultura desse povo, em especial, o seu sistema de numeração.

Por volta de 1800 a. C., Hamurabi, o governante da cidade de Babel, consolidou seu poder conquistando o império sumério-acadiano e fundou a primeira dinastia da Babilônia. Esse império se desintegrou após sua morte, mas a cultura babilônica permaneceu por muitos anos. Os mais antigos textos de Matemática desse povo datam do período 1900-1600 a. C.

Pode-se observar que a Matemática babilônica não tinha teoremas e demonstrações geométricas formuladas como as que conhecemos atualmente. Com efeito, alguns dos problemas eram restritos a cálculo de comprimentos de segmentos de reta e cálculo de áreas. Assim, a partir desses problemas, pode-se afirmar que os babilônios estavam familiarizados com diversos teoremas, em especial, com o teorema denominado de Pitágoras. De fato, segundo relato de Katz, o teorema de Pitágoras já era conhecido muito antes no nascimento desse filósofo.

> Um dos problemas babilônicos sobre raiz quadrada está ligado à relação entre o lado de um quadrado e sua diagonal. Essa relação é um caso especial do resultado conhecido como o teorema de Pitágoras: em qualquer triângulo retângulo, a soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. O nome desse teorema é em homenagem ao filósofo e matemático grego do século VI a. C., é indiscutivelmente o teorema elementar mais importante em Matemática, uma vez que as suas consequências e generalizações têm ampla aplicação. No entanto, é um dos primeiros teoremas conhecidos das civilizações antigas; de fato, há evidências de que ele era conhecido pelo menos 1000 anos antes de Pitágoras (Katz, 1998, p. 30).

Katz sinaliza que há indícios da utilização de ternas pitagóricas em construções de templos megalíticos.

> Alguns estudiosos têm argumentado que as pedras dos templos na Inglaterra relacionadas com a astronomia e edificada no terceiro milênio a. C. foram construídas utilizando o conhecimento do teorema de Pitágoras e, em especial, ternas pitagóricas, ternas de inteiros (a, b, c), tal que $a^2 + b^2 = c^2$. No entanto, a evidência disso é bastante tênue (Katz, 1998, p. 30).

Além disso, conforme Katz há registros históricos comprobatórios em placas de argila do período de Hamurabi que comprovam o conhecimento, construção e utilização de ternas pitagóricas. Em especial, se tem a tabuleta Plimpton 322, que consta no acervo da Biblioteca de Livros Raros e Manuscritos da Universidade de Columbia, que foi estudada por Neugebauer e

Sachs. O historiador Katz, em seu texto, reproduz em notação decimal o conteúdo dessa tabuleta e explica como o escriba babilônico conseguiu obter essas ternas pitagóricas.

> Há evidências mais substanciais de interesse em ternas pitagóricas na tabuleta babilônica Plimpton 322, que data aproximadamente de 1700 a. C. A parte existente nessa tabuleta consiste em quatro colunas de números. (Outras colunas existentes no lado esquerdo foram possivelmente quebradas). Seguem os números sobre a tabuleta, reproduzidos em notação decimal moderna, com as poucas correções que fizeram os recentes editores e com a conjectura de uma quinta coluna à esquerda (Katz, p. 30).

y	$(x/y)^2$	x	d	
120	0.9834028	119	169	1
3456	0.9491586	3367	4825	2
4800	0.9188021	4601	6649	3
13500	0.8862479	12,709	18,541	4
72	0.8150077	65	97	5
360	0.7851929	319	481	6
2700	0.7199837	2291	3541	7
960	0.6845877	799	1249	8
600	0.6426694	481	769	9
6480	0.5861226	4961	8161	10
60	0.5625	45	75	11
2400	0.4894168	1679	2929	12
240	0.4500174	161	289	13
2700	0.4302388	1771	3229	14
90	0.3871605	56	106	15

> Foi uma das principais peças do trabalho do detetive matemático para os primeiros estudiosos modernos decidir que essa tabela era um trabalho matemático, em vez de uma lista de pedidos para uma empresa de cerâmica e, em seguida, encontrar uma explicação matemática razoável. Mas eles a encontraram. As colunas intituladas x e d (cujas entradas no original podem ser traduzidas como "lado-quadrado da largura" e "lado-quadrado da diagonal") contêm em cada linha dois dos três números de uma terna pitagórica. É suficientemente fácil subtrair o quadrado da coluna x do quadrado da coluna d, e em cada caso, resulta em quadrados perfeitos, cuja raiz quadrada está indicada na coluna y reconstruída. Finalmente, a outra coluna representa o quociente $\left(\frac{x}{y}\right)^2$. Como e por que foram esses ternos derivados? Não é possível encontrar ternas pitagóricas desse tamanho por tentativa e erro. A coluna $\left(\frac{x}{y}\right)^2$, cuja entrada não é clara, mas diz algo como "o quadrado auxiliar do retângulo que é extraído de forma que a largura...", pode dar uma sugestão a respeito de como foi construída a tabela. Para encontrar soluções inteiras para a equação $x^2 + y^2 = d^2$, pode-se dividir por y e primeiro encontra-se soluções para $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{d}{y}\right)^2$, ou, fazendo $u = \frac{x}{y}$ e $v = \frac{d}{y}$, para obter $u^2 + 1 = v^2$. Esta última equação é equivalente a

> $(v + u)(v - u) = 1$. Ou seja, podemos pensar de $v + u$ e $v - u$ como os lados de um retângulo cuja área é 1. (Katz, p. 30-31)

A equação $x^2 + y^2 = d^2$ é uma equação diofantina e está relacionada com o problema dos chamados Números Congruente ou equivalentemente, o problema das ternas Pitagóricas, objeto principal da teoria de triângulos retângulos racionais (segundo antigos manuscritos árabes). O Problema dos Números Congruentes consiste em determinar quais são os números inteiros positivos que são congruentes. Um número congruente é um inteiro positivo que pode ser representado pela área de um triângulo retângulo cujos lados são números racionais. Então, é possível observar, pela análise feitas por Katz, que os babilônios tinham uma ideia grosseira, na época, da busca dos hoje chamados Números Congruentes. A tabela acima mostra de uma forma "rudimentar" esse conhecimento.

As ternas pitagóricas no período grego antigo

O mundo grego, cujo núcleo estava estabelecido entre o mar Egeu e o mar Jônico, compreendia numerosas povoações disseminadas pelas costas do mar Negro. Essas colônias estavam distribuídas ao redor do mar Mediterrâneo. Assim, essas possessões jônicas, situadas próximas dos focos das culturas egípcias e babilônicas, se comunicavam por meio de barcos com esses antigos centros de cultura. Dessa forma, as colônias jônicas compartilhavam diretamente os conhecimentos matemáticos e astronômicos desses povos.

Conforme Heath (1981), a história mais antiga da Matemática grega foi escrita por Eudemo, discípulo de Aristóteles, por volta do século IV a. C.. Um conciso compêndio desse tratado aparece nos *Comentários sobre o primeiro libro dos Elementos de Euclides*, escrito por Proclus no século VI d. C. Nesse compêndio, podemos conhecer que o fundador da Geometria grega foi Thales de Mileto, que adquiriu seus conhecimentos em viagens que fez ao Egito. Ainda nesse fragmento, preservado por Proclus, é mencionado o nome de Pitágoras (569 – 475 a. C.), como aquele que transformou, examinou e estudou a Geometria e a Aritmética. Depois de falar sobre Pitágoras, Proclus fala que Platão (427 – 347 a. C.) introduziu o método analítico nas demonstrações matemáticas e discutiu os fundamentos dessa ciência.

Duvillié (1999) afirma que os pitagóricos estabeleceram que todo número quadrado n^2 é igual à soma do número quadrado $(n-1)^2$ e do número ímpar $(2n-1)$. De fato, $n^2 = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = (n-1)^2 + (2n-1)$.

De modo geral, os pitagóricos procuravam os números ímpares que eram números quadrados, isto é, determinavam os inteiros positivos n tais que $2n - 1 = m^2$, com m ímpar e $m \geq 3$, que implica: $n = \frac{m^2+1}{2}$ e $n - 1 = \frac{m^2+1}{2} - 1 = \frac{m^2-1}{2}$. Assim, temos $n^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$ e $(n-1)^2 = \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2$. Portanto, temos a seguinte relação: $\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 + m^2$. Proclus atribui a Pitágoras essa fórmula.

A relação obtida pode ser simplificada multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 4. Desse modo, obtemos a relação válida para todo número inteiro positivo $m \geq 2$: $(m^2 - 1)^2 + (2m)^2 = (m^2 + 1)^2$. Proclus atribui a Platão essa fórmula. Mas, segundo Duvillié (1999), conjectura-se que os pitagóricos já conheciam essa relação. Ainda seguindo as indicações de Duvillié, tal fórmula pode ser obtida, considerando que o número $(n+1)^2$ é a soma do número quadrado $(n-1)^2$ e de dois números ímpares consecutivos $(2n-1)$ e $(2n+1)$. De fato, $(n+1)^2 = (n-1)^2 + (2n-1) + (2n+1)$ ou $(n+1)^2 = (n-1)^2 + 4n$. Dessa igualdade, podemos estabelecer que uma condição necessária e suficiente para que $4n$ seja um número quadrado é que n seja o quadrado de um número inteiro. Por fim, substituindo nessa última relação, $n = m^2$, com $m \geq 2$, obtém-se a fórmula de Platão: $(m^2+1)^2 = (m^2-1)^2 + (2m)^2$.

As relações de Pitágoras e Platão se completam, mas nenhuma das duas fornece uma solução completa para o estabelecimento de todas as ternas. Com efeito, tal solução completa pode ser obtida pelo lema 1 à proposição 29, do livro X, dos *Elementos* de Euclides (325 – 265 a. C.): *Achar dois números quadrados, de modo a também o composto deles ser um quadrado*.

> Fiquem exposto os dois números AB, BC, sejam ou pares ou ímpares. E como, tanto caso um par seja subtraído de um par quanto caso tanto um ímpar, de um ímpar, o resto é par; portanto, o resto AC é par. Fique cortado o AC em dois no D. E sejam também os?AB, BC ou planos semelhantes ou quadrados, que são também, eles mesmos, planos semelhantes; portanto, o dos AB, BC, com o quadrado sobre [o] CD, é igual ao quadrado sobre o BD. E o dos AB, BC é um quadrado, porque foi provado que, caso dois planos semelhantes, tendo sido multiplicados entre si, façam algum, o produzido é um quadrado. Portanto, foram achados dois números quadrados, tanto o dos AB, BC quanto o sobre o CD, que tendo sido compostos, fazem o quadrado sobre o BD.
> E é evidente que foram achados de novo dois quadrados, tanto o sobre o BD quanto o sobre o CD, de modo que o excesso deles, o pelos AB, BC, ser um quadrado, quanto os AB, BC sejam planos semelhantes. Mas, quando não sejam planos semelhantes, foram achados dois quadrados, tanto o sobre o BD quanto o sobre o DC, dos quais o excesso, o pelos AB, BC, não é um quadrado; o que era preciso provar (Euclides).

Para demonstrar esse lema, Euclides, utiliza, nesta ordem, as proposições 24 e 26 do livro IX, a proposição 6 do livro 2 e a proposição 1 do livro IX. Para explicitar a proposição esse lema de Euclides, seguiremos as explicações de Duvillié (1999):

1. Em conformidade com a demonstração de Euclides, temos que $AB > BC$, AB e BC são simultaneamente pares ou ímpares e $AC = AB - BC$ tem a mesma paridade que AB e BC.

2. Euclides considera os números AB e BC como *números planos semelhantes* (quadrados), ou seja, números da forma $mp \times np$ e $mq \times nq$, com $q > p$.

3. Neste caso, temos o retângulo com medida de área igual a $m \times n$; o retângulo com medida de área igual a $BC = mp \times np = mnp^2$; e o retângulo com medida de área igual a $AB = mq \times nq = mnq^2$.

3. $AB \times BC = m^2n^2p^2q^2$; $CD^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB-BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnq^2-mnp^2}{2}\right)^2$;

4. $DB^2 = (BC+CD)^2 = \left(mnp^2 + \frac{mnq^2-mnp^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$;

5. $AB \times BC + CD^2 = m^2n^2p^2q^2 + \frac{m^2n^2q^4-2m^2n^2p^2q^2+m^2n^2p^4}{4} = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$;

6. Então, $AB \times BC + CD^2 = m^2n^2p^2q^2 + \frac{m^2n^2q^4-2m^2n^2p^2q^2+m^2n^2p^4}{4} = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$;

7. Esta última equação pode ser escrita: $(mnpq)^2 + \left(\frac{mnq^2-mnp^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$.

Na equação da linha 7, ao substituir $p = 1$ e ao dividi-la em ambos os lados essa equação por mn, obtemos a *relação de Pitágoras*: $q^2 + \left(\frac{q^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{q^2+1}{2}\right)^2$. E ao multiplicar aquela equação da linha 7, em ambos os lados por 4, obtemos a *relação de Platão*: $(2q)^2 + (q^2-1)^2 = (q^2+1)^2$.

Por fim, ao multiplicar por $\frac{4}{(mn)^2}$ os dois membros da equação da linha 7, obtemos a *relação de Euclides*: $(2pq)^2 + (q^2-p^2)^2 = (q^2+p^2)^2$, com $q > p \geq 1$.

As ternas pitagóricas no período Hindu e Islã

Conforme Dickson, os sacerdotes védicos, Baudhayana e Apastamba obtiveram algumas ternas pitagóricas que são exemplos das regras de Pitágoras e Platão. Conforme Dickson (1971, p. 25), "Os Hindus Baudhayana e Apastamba, cerca do século V a.C., obtiveram de forma independente dos gregos as soluções (3, 4, 5), (5, 12, 13) e (7, 24, 25) que são exemplos da regra de Pitágoras e (8, 15, 17) e (12, 35, 37) que são exemplos da regra de Platão."

Dickson (1971) afirma que Brahmagupta (598 – 670) explicitamente estabeleceu a solução $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ e $z = m^2 + n^2$.

Ainda conforme Dickson, Bhaskara II (1114 – 1185) ou Bhaskaracharya (Bhaskara o professor) estabelece as relações já conhecidas por Brahmagupta.

> Bhaskara (nascido em 1114) estabelece que $\mathrm{x} = 2\mathrm{mn}$, $\mathrm{y} = \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2$ e $\mathrm{z} = \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2$ e a empregou, como fez Brahmagupta, para encontrar o segundo lado $(\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{n}} - \mathrm{n})/2$ e a hipotenusa $(\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{n}} + \mathrm{n})/2$, dado um lado m. Dada a hipotenusa h, os lados são $\mathrm{l} = 2\mathrm{hb}/(\mathrm{b}^2+1)$ e $\mathrm{lb} - \mathrm{h}$ ou $\mathrm{h} - \mathrm{q}$ e bq, onde $\mathrm{q} = 2\mathrm{h}/(\mathrm{b}^2+1)$. Para encontrar um triângulo retângulo cuja área igual à hipotenusa tome 3z, 4x, 5z como os lados. (Dickson, 1971, p. 166)

Ainda, consoante Dickson, encontramos em trabalhos de matemáticos árabes aquelas relações estabelecidas por Brahmagupta e Bhaskara.

> Em um manuscrito anônimo árabe de 972 declara-se que, em cada triângulo retângulo primitivo (ou seja, com lados inteiros relativamente primos), os lados são dados por $\mathrm{x} = 2\mathrm{mn}$, $\mathrm{y} = \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2$ e $\mathrm{z} = \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2$. As condições necessárias para que $\mathrm{x} = 2\mathrm{mn}$, $\mathrm{y} = \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2$ e $\mathrm{z} = \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2$ estabeleçam um triângulo retângulo primitivo são m e n serem relativamente primos e $\mathrm{m} + \mathrm{n}$ ser ímpar. A hipotenusa de um triângulo retângulo primitivo é uma soma de dois quadrados e é da forma $12\mathrm{k} + 1$ ou $12\mathrm{k} + 5$, embora nem todos os números sejam somas de dois quadrados. Mas, 65^2 é uma soma de dois quadrados de duas formas: $63^2 + 16^2 = 33^2 + 56^2$.
> O árabe Ben Alhocain (décimo cento) estabeleceu uma demonstração geométrica que $\mathrm{x} = 2\mathrm{mn}$, $\mathrm{y} = \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2$ e $\mathrm{z} = \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2$ são os lados de um triângulo retângulo, e observou que, se a hipotenusa for par, também ambos os lados são pares, equivalentes às regras que foram estabelecidas por Pitágoras. Também falsos teoremas sobre triângulos formados a partir de vários números consecutivos foram obtidos desta forma.
> Alkarkhi (fim do decimo século) deriva a solução 3, 4, 5 de $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{z}^2$ pela configuração $\mathrm{y} = \mathrm{x} + 1$ e $\mathrm{z} = 2\mathrm{x} - 1$. (Dickson, 1971, p. 166)

Esta é uma conclusão válida que é simples de verificar. E a ideia de como surgiu essa fórmula vem da discussão acima.

Por fim, o matemático persa al Khazin (900 – 971) demonstra três lemas para poder estabelecer a proposição relacionada com as ternas pitagóricas e propõe alguns problemas que se relacionam com essas ternas. Para uma análise completa do trabalho de al Khazin, citamos Rashed.

Lema 1. Não existe qualquer par de números inteiros quadrados ímpares cuja soma é um quadrado.
Demonstração. Seja (a, b) um par de números inteiros quadrados ímpares tais que $a + b = c$, onde c é um quadrado. (1)
Seja $a = x^2$, $b = y^2$ e $c = z^2$. Então (1) é escrito como $x^2 + y^2 = z^2$.
Como a e b são ímpares, temos que c é par; portanto, x e y são ímpares e z é par. A partir de (1), deduzimos $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) = (z - y)^2 + 2y(z - y)$. (2)
No entanto $(z - y)$ é ímpar, logo $z - y = 2p + 1$.
Por outro lado, $x^2 = [x + (z - y)][x - (z - y)] + (z - y)^2$. (3)
A partir de (2) e (3) deduzimos $2y(z - y) = [x + (z - y)][x - (z - y)]$.
Assumimos $z - y = 2p + 1$, então $x + (z - y)$ são pares e $x - (z - y)$ é par; o segundo membro é divisível por 4; mas, no primeiro membro, $y(z - y)$ é ímpar. Portanto, a igualdade é impossível. Daqui a conclusão.
Lema 2. É impossível que os lados de dois quadrados cuja soma é um quadrado ser sempre par.
Demonstração. Assumimos $x = 2^m$ e $y = 2^n$ com $m < n$. Se $p = n - m$, então $\frac{x}{y} = \frac{1}{2^p}$, de onde deduzimos $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{2^{2p}}$ e $\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+2^{2p}}$.
Mas, $1 + 2^{2p}$ não é um quadrado [já que dois quadrados nunca são consecutivos]; portanto, também, $x^2 + y^2$ não é um quadrado. (p. 211-212)
Lema 3. $(a^2 + b^2)^2 = b^2 + 4\frac{a}{2}\left(b + \frac{a}{2}\right)$
A identidade é verificada para a ímpar e b par, para a e b pares, utilizando a proposição II-8 dos Elementos.
Problema 1. Encontre dois números quadrados, um par, o outro ímpar co-primos, cuja soma é um quadrado. Isto significa encontrar ternos pitagóricos primitivos.
Suponhamos que existem esses números. Sejam x e y dois números tais que x é par e y é ímpar, e que: $x^2 + y^2 = z^2$. (1)
Seja $t = z - y$, t é par já que y e z são ímpares, e isso resulta em $z = \left(y + \frac{t}{2}\right) + \frac{t}{2}$. (2)
De acordo com o lema 3, temos $z^2 = y^2 + 4\left(y + \frac{t}{2}\right)\left(\frac{t}{2}\right)$, daqui $x^2 = 4\left(y + \frac{t}{2}\right)\left(\frac{t}{2}\right)$, logo $\left(y + \frac{t}{2}\right) + \frac{t}{2}$ é um quadrado e, assim, é $\left(y + \frac{t}{2}\right) / \frac{t}{2}$.
Escreva $\left(y + \frac{t}{2}\right) / \frac{t}{2} = \frac{p^2}{q^2}$ com $(p, q) = 1$ e $p > q$, p e q têm diferentes paridades de acordo com (2). Daqui $y = p^2 - q^2$, $x = 2pq$ e $z = p^2 + q^2$. (Rashed, 1994, p. 210-213)

Seguem as análises e os comentários de Rashed.

Observação: É claro que al-Khazin implicitamente utiliza várias proposições dos Elementos - VIII-9, 24, 26; IX-2 - em sua análise. Ele não as cita explicitamente, pois as demonstrações contidas nos Elementos constituiu uma fonte comum para os matemáticos.
AI-Khazin não estabelece a síntese dessa proposição. Com efeito, foi estabelecida, em X-29, Lema 1, dos Elementos. Se combinarmos a análise de Al-Khazin com a síntese de Euclides, obtemos o seguinte teorema:
Sejam x, y e z três números tais que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $(x, y) = 1$ e x par.
As seguintes condições são equivalentes:
(a) Temos $x^2 + y^2 = z^2$.
(b) existe um par de números inteiros (p, q) tais que $p > q > 0$, $(p, q) = 1$, p e q têm paridades opostas, tal que $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$, $z = p^2 + q^2$.

> É o resultado de X-29, lema 1, de Euclides, que (b) ⇒ (a); e a proposição de al-Khazin que (a) ⇒ (b). Ele denomina essa última análise implicação.
> Problema 2. Encontrar números quadrados múltiplos de 9 e 16 tais que a sua soma seja um múltiplo de 5.
> A expressão deste problema de AI-Khazin é um pouco confusa. Ele procede da seguinte forma: Sabemos que se $p = 2$ e $q = 1$ temos $x = 4$, $y = 3$ e $z = 5$, uma terna pitagórica primitiva que responde ao problema. Se $p = 3$ e $q = 1$ temos $x = 6$, $y = 8$ e $z = 10$ uma terna não primitiva, um múltiplo da terna $(3, 4, 5)$ cujos quadrados são respectivamente múltiplos de 9, 16 e 5. É natural nos perguntar que terna de números inteiros positivos (a, b, c) satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$ (tripla ou terna pitagórica). (Rashed, 1994, p. 213)

As ternas pitagóricas em tempos contemporâneos

A mais famosa e padrão terna pitagórica é (3, 4, 5). Mas existem muitas outras, tais como (5, 12, 13), (7, 24, 25), (20, 21, 29) e (8, 15, 17). O que seria uma lista completa de todas as ternas pitagóricas? Há apenas um número finito dessas ternas ou há uma lista infinita dessas ternas?

Consideremos a equação do segundo grau com três incógnitas, $x^2 + y^2 = z^2$, denominada equação pitagórica (equação diofantina). Queremos encontrar todas as soluções inteiras dessa equação. Desse modo, consideremos apenas aquelas formadas por números naturais. Se os números x, y, z são naturais que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = z^2$, então dizemos que a terna (x, y, x) representa um triângulo pitagórico.

A solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$ é denominada uma solução primitiva se os números naturais x, y, z não têm divisor comum maior do que um. Se λ, μ, ν é uma solução primitiva da equação $x^2 + y^2 = z^2$ e d é um número natural arbitrário, então $x = \lambda d$, $y = \mu d$ e $z = \nu d$ é também uma solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$. De fato, se $\lambda^2 + \mu^2 = \nu^2$, então multiplicando ambos os lados dessa equação por d^2 e utilizando $x^2 = \lambda^2 d^2$, $y^2 = \mu^2 d^2$ e $z^2 = \nu^2 d^2$ obtemos a equação $x^2 + y^2 = z^2$.

Reciprocamente, se os números naturais x, y, z são uma solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$, então colocando $(x, y, x) = d$ temos $x = \lambda d$, $y = \mu d$ e $z = \nu d$, onde $(\lambda, \mu, \nu) = 1$. Então, em virtude da equação $x^2 + y^2 = z^2$, temos $(\lambda d)^2 + (\mu d)^2 = (\nu d)^2$. Dividindo ambos os lados dessa equação por d^2 observamos que os números naturais λ, μ, ν constituem uma solução primitiva da equação $x^2 + y^2 = z^2$.

Dizemos que uma solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$ em números naturais x, y, z pertence à d-ésima classe se $(x, y, x) = d$. Em virtude do que foi dito acima, a fim de obter todas as soluções em números naturais que pertencem à d-ésima classe, basta multiplicar todas as soluções primitivas da equação $x^2 + y^2 = z^2$ por d. Assim, sem perda de generalidade, podemos limitar-nos a encontrar apenas as soluções primitivas da equação $x^2 + y^2 = z^2$.

Suponha que x, y, z é uma solução primitiva da equação $x^2 + y^2 = z^2$. Demonstraremos que um dos números x, y é par e o outro é impar. Suponha que isto não é o caso, ou seja, que ambos são pares ou ímpares. No primeiro caso, o número $x^2 + y^2 = z^2$ seria par e, assim, também o número z seria par. Portanto, os números x, y, z teriam um divisor comum 2, contrariando a suposição.

A fim de mostrar que o segundo caso também é impossível demonstramos que: *Dividindo o quadrado de um número natural ímpar por 8 obtemos resto 1*. Para ver isso, note que um número ímpar pode ser escrito na forma $2k-1$, onde k é um inteiro.

Daqui, $(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1$. Mas um dos números k e $k-1$ devem ser par; assim, é divisível por 2, onde o número $4k(k-1)$ é divisível por 8 e assim, como requerido, dividindo $(2k-1)^2$ por 8 obtemos resto 1.

Por conseguinte, dividindo-se a soma dos quadrados de dois números naturais ímpares por 8 obtém-se resto 2, o qual, em virtude do que se demonstrou acima, mostra que a soma dos quadrados de dois números ímpares naturais não é o quadrado de um número ímpar. Ele também não pode ser o quadrado de um número par, uma vez que, neste caso, seria divisível por 4, de modo que o resto obtido dividindo-o por 8 seria 0 ou 4.

Assim, demonstramos que se x, y, z é solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$, então x, y não podem ser ambos ímpares e z um inteiro. Daqui resulta que, se x, y, z é uma solução primitiva da equação $x^2 + y^2 = z^2$, então um dos números x, y, é par, e o outro ímpar. As soluções restantes são obtidas simplesmente trocando x e y.

Se numa dada solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$, o número y é par e o número x é ímpar, então o número z é ímpar. A equação $x^2 + y^2 = z^2$ pode ser escrita na forma $y^2 = (z+x) + (z-x)$. Os números $z+x$ e $z-x$, como a soma e a diferença de dois números ímpares, respectivamente, são ambos pares. Consequentemente, $z+x = 2a$ e $z-x = 2b$, onde a e b são números naturais. Daqui, $z = a+b$ e $x = a-b$.

Essas igualdades implicam que os números a e b devem ser relativamente primos, pois caso contrário eles teriam um divisor comum $\delta > 1$, e então teríamos $z = k\delta$ e $x = l\delta$, onde k e l são números naturais.

Recentemente, o Problema dos Números Congruentes surgiu de novo com a descoberta da sua forte conexão com a Aritmética das Curvas Elípticas, um assunto muito discutido nas últimas décadas. As curvas elípticas são equações cúbicas e elas são importantes, especialmente, na Criptografia, pois o conjunto de seus pontos apresenta uma estrutura algébrica (grupo abeliano).

Considerações

As ternas pitagóricas apareceram em problemas na Matemática Babilônia e, posteriormente, foram estudadas no período grego pelos pitagóricos e por Platão e aparecem de forma explícita na obra de Euclides e nos estudos de Diofanto. Também foi estuda por alguns matemáticos islâmicos e, nesse caso, estavam relacionadas com o Problema dos Números Congruentes, um antigo problema que remonta à época do matemático italiano Leonardo Fibonacci.

Através dos séculos diversas gerações de estudiosos, cientistas e matemáticos têm tentado achar uma solução geral para esse problema, encontrando, na maioria das vezes, soluções parciais. Uma solução geral implicaria encontrar um algoritmo que permitisse determinar quando um número natural é congruente ou não.

O Teorema de Pitágoras (e, portanto, as ternas pitagóricas) é a mais bela jóia da tradição pitagórica. Como lembrança inesquecível da época escolar, ele pertence à base cultural comum da humanidade. O seu estudo introduziu uma radical inflexão intelectual entre a prática empírica e indutiva e a argumentação lógico-dedutiva, tanto no aspecto histórico cultural matemático como no âmbito escolar.

As várias pesquisas realizadas em torno das ternas pitagóricas e dos números congruentes por uma gama extensa de pesquisadores e estudiosos ilustres destaca a ideia de que existem muitas formas de alcançar a mesma verdade. Como a origem da geometria racional, fundamento de uma multidão de teoremas e resultados, causa primeira da incomensurabilidade, e fronteira entre a matemática empírica e a dedutiva, as ternas pitagóricas e o teorema de Pitágoras aparecem como paradigma para a História da Matemática e da Matemática, representando um legado cultural para todos os povos da terra.

Gostaríamos de destacar que o estudo dos números congruentes e das curvas elípticas é extremamente significativo para muitos pesquisadores pelo simples fato de ter em aberto uma série de questões ainda sem resposta. Inicia-se com um inocente problema acerca de áreas de triângulos retângulos com lados racionais e então surgem as curvas elípticas de maneira natural no estudo de números congruentes. Além disso, se observa que a determinação de um número congruente se resume em determinar a cardinalidade de um conjunto finito – um problema de contagem (conjectura de Birch and Swinnerton-Dyer).

Referências Bibliográficas

Balieiro Filho, I. F. (2004). *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya - Quatro Episódios da História da Heurística* (Tese de Doutorado). Rio Claro: Unesp.

Chahal, J. S. (1998). *Topic in Number Theory*. New York: Springer.

Clagett, M. (1999). *Ancient Egyptian Science: A Source Book. Volume Three. Ancient Egyptian Mathematics*. Philadelphia: American Philosophical Society.

Dickson, L. E. (1971). *History of the Theory of Numbers* (Vol. II.)New York: Chelsea Publishing Company.

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: Addison-Wesley.

Duvillié, B. (1999). *Sur les traces de l'Homo Mathematicus: Les mathématiques avant Euclide*. Paris: Ellipses.

Gillings, R. J. (1982). *Mathematics in the time of the Pharaohs.* New York: Dover.

Heath, T. L. (1981). *A History of Greek Mathematics* (Vol. 1). New York: Dover.

Rashed, R. (1994). *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Dordrecht: Springer.

Washington, L. C. (2008). *Elliptic Curves, Number Theory and Cryptography*. New York: Taylor & Francis Group.