A conceitualização de volume como grandeza à luz da teoria dos campos conceituais

Leonardo Bernardo de **Morais**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano
Brasil
leonardob.morais@gmail.com

Resumo

O presente artigo é um recorte de uma pesquisa de dissertação que investigou a abordagem da grandeza volume nos livros didáticos brasileiros de Matemática para o ensino médio. Usou-se como aporte teórico a teoria dos campos conceituais de Geràrd Vergnaud (1990) e o modelo teórico de quadros propostos por Règine Douady e Perrin-Glorian (1989) para a conceituação de área como grandeza. Neste artigo, analisaram-se os possíveis teoremas em ação passíveis de serem formulados pelos alunos diante das situações de comparação e de produção de volume elencadas nos livros didáticos analisados. Dentre os resultados, constatou-se que as situações de comparação e de produção possibilitam o desenvolvimento de estratégias variadas, bem como a formulação de teoremas em ação que conduzem a conceituação de volume como grandeza.

Palavras chave: grandezas e medidas, ensino médio, livro didático, volume, teoria dos campos conceituais.

Introdução

O presente artigo é um recorte de uma investigação mais ampla na qual se investigou a abordagem da grandeza volume em livros didáticos de Matemática brasileiros para o ensino médio.

O campo das grandezas e medidas há mais de dez anos vem recebendo notória atenção ao ser colocado em publicações curriculares brasileiras (Brasil, 1998) como um dos grandes blocos de conteúdos do ensino fundamental ao lado de Números e Operações, Espaço e Forma e Tratamento da Informação. Além disso, o mesmo tem despertado, mais recentemente, a realização de diversos estudos por inúmeras razões, dentre as quais elencamos duas: o baixo desempenho dos alunos diante de situações que envolvem grandezas e sua importância no meio social e científico.

O campo das grandezas e medidas é extremamente vasto e sua análise remete à identificação de grandezas de naturezas diversas como temperatura, massa, tempo, entre outras. Nesse campo, destacam-se as grandezas geométricas comprimento, área, volume e ângulo, pois além serem recorrentes em atividades cotidianas, possibilitam a articulação com outros conteúdos matemáticos e com outras áreas do conhecimento.

Nosso interesse em investigações no campo das grandezas e medidas se volta para as grandezas geométricas e mais especificamente para volume.

Na pesquisa acima mencionada, usamos como aporte teórico a teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud (1990) e tendo como objetivos mapear e classificar as situações que abordam a grandeza volume nos livros didáticos de Matemática de ensino médio e identificar as propriedades do conceito de volume e as representações simbólicas exploradas nesses livros didáticos.

Dentre os resultados constatados nessa investigação mais ampla, elencamos os tipos de situações menos frequentes observadas nos livros didáticos analisados, a fim de fazer um estudo mais minucioso, cujos resultados são apresentados neste artigo. Diante disso, delimitamos como objetivo deste estudo, identificar as propriedades do conceito de volume exploradas nos livros didáticos de Matemática do ensino médio que podem ser exploradas em situações de comparação e de produção da grandeza volume.

Considerações de volume como grandeza

A análise das instruções curriculares nacionais oficiais mostra que volume está presente desde a educação infantil até o ensino médio. Inicialmente, o ensino foca o conceito de capacidade (volume interno de recipientes) e mais tarde incorpora o volume de sólidos maciços. Nos 3° e 4° ciclos, são sugeridas atividades envolvendo as unidades de medida mais usuais como metro cúbico, centímetro cúbico, litro e mililitro, além de cálculo do volume de paralelepípedos retângulos por contagem de cubinhos e de prismas retos por composição/decomposição (Brasil, 1998). Por fim, no ensino médio, recomenda-se a identificação de instrumentos mais adequados para medir o volume de objetos geométricos e a exploração das fórmulas de volume mais usuais (Brasil, 2002b).

No que tange à abordagem de comprimento, área, volume e ângulo, estudos têm defendido o ensino dos referidos conceitos na perspectiva de grandeza, que consiste em associar/dissociar o sólido, o numérico e a grandeza. Essa proposta fundamenta-se nas pesquisas desenvolvidas por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), as quais elaboraram e experimentaram uma engenharia didática, em que investigaram a construção da noção de área como grandeza por alunos com idade entre nove e 12 anos.

Segundo essas pesquisadoras, a construção desse conceito requer a compreensão de área como grandeza autônoma, fazendo-se necessário fazer duas distinções básicas: a) área, que é uma grandeza, e a superfície, que é um objeto geométrico; b) a grandeza área e sua medida que nesse modelo, é um número. Esse modelo tem influenciado diversos estudos, os quais confirmaram sua pertinência (Lima, 1995; Baltar, 1996; Bellemain & Lima, 2002; Teles, 2007) e o estenderam para a conceituação de outras grandezas como comprimento (Barbosa, 2002), volume (Oliveira, 2002, 2007; Barros, 2002; Anwandter-Cuellar, 2008) e ângulo (Lima & Bellemain, 2010).

Assim por analogia, compreender volume como grandeza consiste em distinguir volume do sólido geométrico e volume de sua medida, que é um número real positivo.

Estudos realizados por Oliveira (2002) e Barros (2002) constataram que alunos dos anos finais do ensino fundamental revelaram uma compreensão insuficiente de volume como grandeza, uma vez que os sujeitos investigados pouco articularam/dissociaram os três componentes: o número, o sólido e a grandeza. Ainda nessa etapa de ensino, Anwandter-cuellar (2008) verificou, no ensino francês, que os alunos têm uma concepção predominantemente numérica de volume, ou seja, prevalece a identificação do volume a um número e não a uma grandeza. Figueiredo (2013) verificou que alunos do ensino médio brasileiro apresentam dificuldades na conceituação de volume quando o representaram utilizando unidades de áreas. Além disso, alguns não reconhecem as fórmulas adequadas para o cálculo de volume de um sólido.

Esses resultados sugerem novos estudos que possibilitem aos alunos uma construção pertinente do conceito de volume. Para tanto, optamos por analisar a abordagem dessa grandeza nos livros didáticos de Matemática brasileiros do ensino médio, tendo em vista a relevância desse recurso didático para alunos e professores no ensino de conceitos matemáticos, em particular o de volume.

No que tange ao livro didático, alguns estudos (Gérard & Roegiers, 1998; Carvalho & Lima, 2010) apontam sua relevância no ensino. O primeiro ressalta que o livro didático é dotado de conceitos matemáticos e de escolhas didáticas (sequências didáticas), uma vez que traz para esse contexto o seu autor, o qual passa a interagir com o aluno e com o professor, reforçando, portanto, a importância em ter nesses livros uma abordagem que favoreça o ensino dos conteúdos matemáticos.

Volume como componente de um campo conceitual

Usamos como aporte teórico a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud (1990), a qual conduz, em nossa investigação, na identificação de situações, de invariantes operatórios e de representações simbólicas em problemas sobre volume explorados nos livros didáticos analisados. Ainda na perspectiva da teoria dos campos conceituais, volume situa-se no campo conceitual das grandezas geométricas, no qual, por um lado, são estabelecidas relações com comprimentos, áreas, ângulos, função linear, proporcionalidade, fórmulas, figuras geométricas planas e espaciais, números, instrumentos de medida, entre outros conceitos e procedimentos matemáticos. Por outro lado, no âmbito desse campo conceitual, articulam-se grandezas físicas básicas como massa, temperatura, velocidade e muitas outras.

O entendimento da grandeza volume como componente de um campo conceitual remete à identificação de tipos de situações, de propriedades (fórmulas, definições, etc.) e de representações simbólicas que permitem dar sentido ao referido conceito.

As situações que possibilitam dá sentido a volume como grandeza são medição, comparação e produção, desenvolvidas a partir de estudos realizados por Baltar (1996) e Anwandter-cuellar (2008). As situações de medição consistem em atribuir um número, numa dada unidade, ao volume de um sólido. As situações de comparação consistem em decidir, em um dado conjunto de sólidos, qual deles tem maior/menor volume ou se têm volumes iguais. E, por fim, as situações de produção caracterizam-se pela produção de um sólido com volume menor, maior ou igual a um volume dado.

Situações de produção e de comparação

Conforme dito antes, neste artigo analisaremos apenas as situações de comparação e de produção, por serem menos frequentes em relação às situações de medição.

Aqui, seguem as estratégias e variações que podem ser mobilizadas e/ou interferir na resolução dos problemas de comparação e de produção.

Nas situações de comparação podem ser usadas estratégias como visual (perceptiva), inclusão, decomposição/recomposição, imersão; medição e comparação das medidas, comparação das massas e princípio de Cavalieri. Para tanto, há como variações a quantidade de sólidos, sua natureza (sólidos ocos X sólidos maciços) e sua representação (ausência da figura, figura em perspectiva, vistas planas, planificações, presença da figura que permite gerar o sólido, presença de sólidos concretos).

Na comparação do volume de três ou mais sólidos é suficiente compará-los dois a dois e por transitividade, ordená-los segundo seus volumes. Portanto, essa estratégia faz intervir o conceito em ação da transitividade.

Em se tratando de sólidos maciços e/ou ocos, está em jogo o conceito de volume propriamente dito ou o conceito de volume interno (capacidade). Nesse caso, cabe enfatizar que volume é um atributo de sólidos ocos e maciços, enquanto capacidade associa-se apenas ao primeiro.

Em se tratando de sólidos ocos e maciços, em que pelo menos um dos sólidos for oco, favorece-se a estratégia de inclusão, na qual um sólido pode ser inserido no outro, o que permite levantar o teorema em ação "volume e capacidades são grandezas de mesma natureza".

O teorema em ação acima mencionado decorre da ação do sujeito ao comparar o volume dos sólidos. E mesmo sem estar consciente dessa propriedade, ele está comparando uma capacidade com um volume (ou seja, está implícito na ação do sujeito que capacidade e volume são comparáveis e, portanto são de mesma natureza). Isso permite afirmar que o sujeito está mobilizando o teorema em ação, segundo o qual volume e capacidade são grandezas de mesma natureza, embora esse sujeito não seja necessariamente capaz de explicitar essa propriedade, mesmo se a utiliza na ação.

A ausência/presença da figura ou dos objetos concretos que permite a visualização ou manipulação pode conduzir a estratégias como a visual perceptiva, na qual a comparação é feita do ponto de vista geométrico e a composição-recomposição, em que um sólido é decomposto e recomposto.

A comparação das massas possibilita comparar o volume de sólidos em se tratando de objetos de mesma densidade. Esse tipo de situação, sobretudo sem a interferência da medida, possibilita dissociar o sólido e a grandeza como nas atividades com argila e as que permitem decompor e recompor um sólido. Esse tipo de estratégia favorece o teorema em ação sólidos diferentes podem ter mesmo volume, o que conduz a distinção entre o sólido e a grandeza volume.

Em se tratando das situações de produção, as mesmas possibilitam o uso de estratégias como composição, decomposição-recomposição e princípio de Cavalieri.

Assim como nos problemas de comparação, esse tipo de situação favorece a distinção entre o sólido e a grandeza que permite observar a independência entre volume e o objeto geométrico.

A estratégia de composição consiste em produzir um sólido compondo as unidades de medida; e o princípio de Cavalieri caracteriza-se pela construção de uma figura a partir do que afirma tal princípio. O uso das referidas estratégias pode remeter ao teorema em ação "diferentes sólidos podem ter o mesmo volume", o qual favorece a compreensão de volume enquanto grandeza.

A estratégia de decomposição-recomposição versa sobre a produção de um "novo" sólido com volume maior/menor ou igual ao volume de um sólido dado.

Com isso, foram analisados o que os exercícios propostos nos referidos livros didáticos permitem explorar no que se referem às estratégias, variações e elaboração de possíveis teoremas em ação e propriedades subjacentes ao conceito de volume.

Método

Para a coleta dos dados, foram analisadas as sete coleções aprovadas no PNLD 2012 (Brasil, 2011), explicitadas na tabela 1:

Tabela 1

Coleções aprovadas no PNLD 2012

Coleção	Autor (a)	Editora
Conexões com a Matemática	Juliane Matsubara Barroso	Moderna
Matemática- Contexto e Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática
Matemática – Paiva	Manoel Paiva	Moderna
Matemática Ciência e Aplicações	David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce, Roberto Périgo	Saraiva
Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia	Jackson Ribeiro	Scipione
Matemática Ensino Médio	Maria Ignez Diniz, Kátia Stocco Smole	Saraiva
Novo Olhar – Matemática	Joamir Souza	FTD

Nas análises as coleções não foram identificadas, pois nosso interesse não é de natureza comparativa.

Foram elaborados critérios que nortearam a análise minuciosa dos livros didáticos. Esses critérios emergiram de indicações pontuadas no Guia do PNLD 2012 (Brasil, 2011), de sugestões propostas nos documentos de orientações curriculares brasileiros, de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da grandeza volume (e de modo geral das grandezas geométricas) e da fundamentação didática e matemática do conceito de volume.

Tendo em vista o objetivo deste artigo, ou seja, a identificação de possíveis teoremas em ação que possibilitam conceituar volume como grandeza em situações de comparação e produção, delimitaram para a condução das análises, as questões seguintes, as quais permitem compreender o conceito de volume à luz do tripé da teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1990) e do modelo didático de quadros (Douady & Perrin-Glorian,1989).

Questões

- Que propriedades da grandeza volume os livros didáticos exploram ou permitem trabalhar?

- Que representações simbólicas referentes à grandeza volume são exploradas?
- Há articulação entre os quadros geométrico, numérico e da grandeza?

Foi feito um mapeamento minucioso nos livros didáticos analisados a fim de identificar os capítulos em que volume é objeto de estudo. Feito isso, foram analisadas tanto as explicações como os exercícios propostos.

Após a listagem dos exercícios propostos, os mesmos foram categorizados em situações de medição, comparação ou produção, conforme definidas anteriormente.

Principais resultados

Conforme mostra a tabela 2, as situações de medição são as mais exploradas nos livros didáticos analisados. Para a contagem dos tipos de situações usamos como unidade de análise os exercícios propostos e quando uma atividade trazia itens (a, b, c, etc.), eles eram contados como um exercício.

Elencamos as situações de comparação e de produção para a análise mais minuciosa, tendo em vista a menor ocorrência das mesmas quando comparadas com as situações de medição.

Tabela 2

Quantidade de situações identificadas[1]

Coleção	**Total**	**Medição**		**Comparação**		**Produção**	
		#	%	#	%	#	%
A	98	94	95,9	3	3,1	1	1,0
B	111	105	94,6	3	2,7	3	2,7
C	92	81	88,0	7	7,6	4	4,3
D	97	93	95,9	2	2,1	2	2,1
E	122	111	91,0	4	3,3	7	5,7
F	71	68	95,8	1	1,4	2	2,8
G	113	100	88,5	8	7,1	5	4,4
Total	704	652	92,6	28	4,0	24	3,4

Conforme dito antes, as situações de comparação consistem em comparar o volume de dois ou mais sólidos e as de produção em produzir sólidos com volumes menor/maior ou igual a volumes dados.

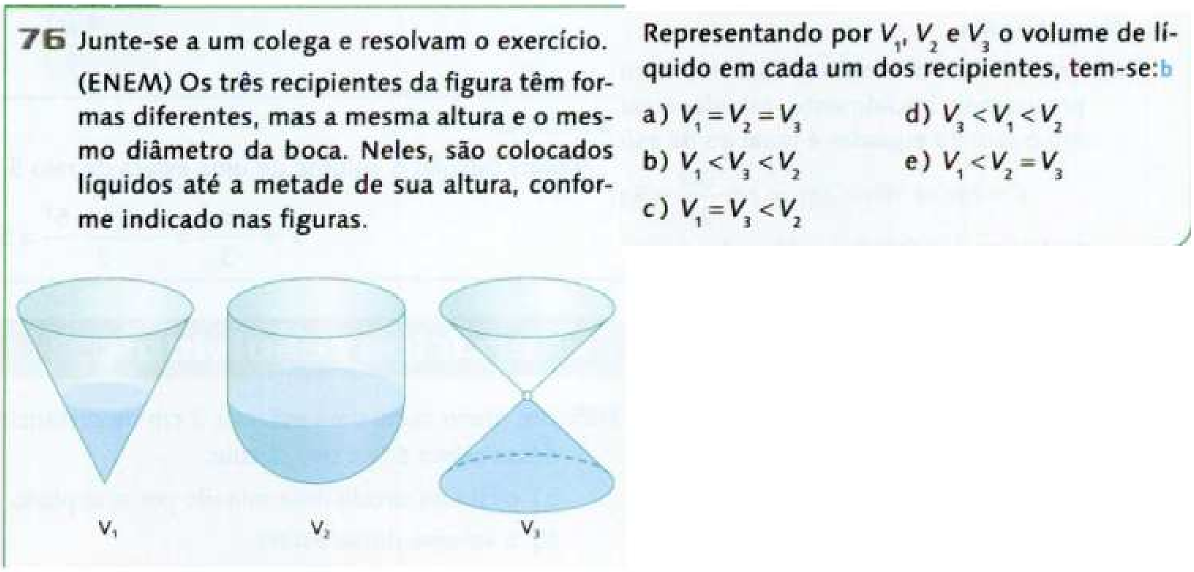
Foram elencados exercícios dos livros didáticos analisados categorizados em situações de comparação e de produção, a fim de identificarmos os invariantes operatórios que favorecem a conceituação de volume enquanto grandeza.

Situações de comparação

De acordo com a tabela 2, foram listados apenas 28 exercícios classificados como de comparação, o que consideramos insuficiente, sobretudo, em relação aos de mediação.

[1] A soma das quantidades de situações dos três tipos não é o total, porque há situações que não foram classificadas e que serão comentadas adiante.

Para a inferência dos possíveis teoremas em ação nas situações de comparação, selecionamos os exercícios mostrados nas figuras 1, 2, 3, 4 e 5.



76 Junte-se a um colega e resolvam o exercício.

(ENEM) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles, são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras.

Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se: b

a) $V_1 = V_2 = V_3$

b) $V_1 < V_3 < V_2$

c) $V_1 = V_3 < V_2$

d) $V_3 < V_1 < V_2$

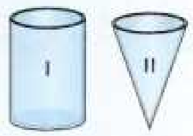
e) $V_1 < V_2 = V_3$

Figura 1. Situação de comparação, coleção C (2010, p. 156).

Nesse exemplo, está em jogo a comparação não numérica de volume, o que pode remeter ao quadro geométrico. É possível também que sejam mobilizadas estratégias do ponto de vista algébrico. De todo modo, a não explicitação de medidas é um dado relevante, uma vez que as mesmas são demasiadamente recorrentes em situações de medição. A imagem auxilia o sujeito na mobilização de conceito em ação, como o princípio de Cavalieri. Além disso, a quantidade de recipientes remete ao conceito em ação da transitividade, em que o aluno compara os volumes dos sólidos dois a dois e, por transitividade, decido qual deles têm maior/menor volume.

Destaca-se, portanto, nesse exercício a possibilidade da comparação de volumes sem necessariamente medi-lo, o que leva ao desenvolvimento de estratégias não convencionais (manipulações algébricas) e, sobretudo, a ideia de que os recipientes podem ser comparados segundo suas capacidades ou volume interno, o que leva ao teorema em ação “o volume se distingue do sólido”.

48 Junte-se a um colega e resolvam o exercício. (UFMT – MT) Admita que os interiores dos recipientes I e II da figura tenham, respectivamente, as formas de um cilindro circular reto e de um cone circular reto, de áreas das bases iguais e alturas iguais. Sabe-se que o recipiente I está com a metade de sua capacidade ocupada por água.



Se toda a água do recipiente I for despejada no recipiente II, pode-se afirmar: b

a) Todo o recipiente II será preenchido e sobrará água correspondente a $\frac{1}{3}$ da capacidade do recipiente I.

b) Todo o recipiente II será preenchido e sobrará água correspondente a $\frac{1}{6}$ da capacidade do recipiente I.

c) Faltará água correspondente a $\frac{1}{6}$ da capacidade do recipiente I para preencher todo o recipiente II.

d) Faltará água correspondente a $\frac{1}{3}$ da capacidade do recipiente I para preencher todo o recipiente II.

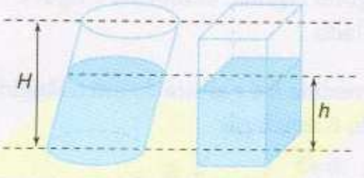
e) Todo o recipiente II será preenchido e não sobrará água no recipiente I.

Figura 2. Situação de comparação, coleção C (2010, p. 146).

Nesse exercício, além da comparação não numérica, relacionam-se os volumes do cilindro e do cone (para o caso em que ambos têm bases de mesma área). Aqui, novamente valorizam-se estratégias do quadro geométrico, ou seja, sem uso de procedimentos numéricos-algébrico. Como no exemplo anterior, a presença da imagem favorece o desenvolvimento de estratégias variadas. Comparações no campo algébrico podem aparecer, uma vez que o volume de um cone (mantida as condições dadas no problema) equivale a um terço do volume do cilindro. Essa atividade possibilita também a verificação empírica, o que leva a consolidação da relação entre o volume dos recipientes em jogo. Cabe ressaltar a não necessidade da medição dos volumes, mostrando que nem sempre o interesse é determinar o volume dos sólidos.

O exemplo seguinte compara o volume de dois recipientes com bases e alturas iguais (de mesma área e mesmo comprimento, respectivamente).

16 Dois vasos de formas diferentes têm, internamente, a mesma altura H e bases planas de mesma área. Essas bases estão apoiadas sobre o mesmo plano horizontal de uma mesa, conforme mostra a figura. Colocando água em ambos até a mesma altura h (qualquer que seja h, com $0 < h \leq H$), verificamos que, nos dois vasos, a área da superfície da água é a mesma. Que relação existe entre os volumes internos desses dois vasos? Justifique sua resposta.



Os volumes são iguais pelo princípio de Cavalieri.

Figura 3. Situação de comparação, coleção F (2009, p. 224).

Nessa atividade, explicitam-se as alturas dos recipientes, o que pode levar ao uso de procedimentos algébricos. No entanto, o princípio de Cavalieri é uma estratégia favorecida, uma vez que se toma como hipótese a igualdade das áreas das bases dos sólidos. Do ponto de vista do modelo de quadros (Douady & Perrin-Glorian, 1989), esse exercício permite explorar também o invariante operatório “sólidos diferentes podem ter mesmo volume”. Novamente, como no exemplo 1, a comparação dos recipientes é feita segundo seus volumes, o que possibilita concluir que tal grandeza é um atributo do recipiente e, portanto, se distingue do mesmo.

Os exemplos das situações de comparação mostrados anteriormente revelam a não necessidade de recorrer a medições e que nem sempre o interesse é medir.

Essas situações destacam-se também por favorecer o uso de estratégias variadas. Na figura 1, por exemplo, é possível comparar os volumes dos sólidos a partir do quadro geométrico e na figura 3, recorrendo ao princípio de Cavalieri. Além disso, situações dessa natureza permitem explorar outras características da grandeza, como sólidos diferentes podem ter mesmo volume, sem necessariamente recorrer a procedimentos numéricos-algébricos, os quais são exaustivamente trabalhados em situações de medição.

Diante das estratégias variadas e dos possíveis teoremas em ação que podem emergir nas situações de comparação, consideramos insuficiente a quantidade observadas nos livros didáticos analisados, principalmente aquelas que dispensam procedimentos numéricos-algébricos, pois constatamos também exercícios nos quais é necessário recorrer a medições para comparar os volumes, como mostram as figuras 4 e 5.

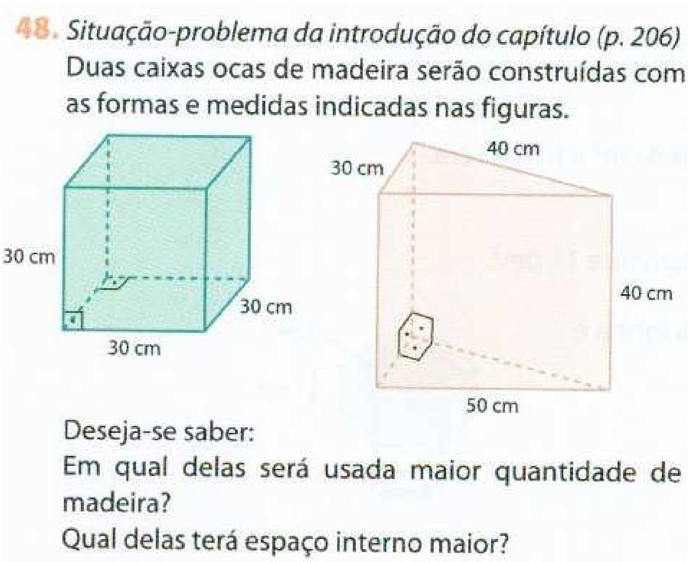


Figura 4. Situação de comparação, coleção D (2010, p. 226).

A tarefa principal desse exercício é comparar o espaço interno das caixas. Para isso, recorre-se a medições tendo em vista a explicitação dos comprimentos das caixas. Embora esteja em jogo a comparação do volume das caixas, a estratégia favorecida é o uso de fórmulas, o que remete à situação de medição. Tal estratégia é valorizada também na atividade seguinte.

40. Uma sorveteria utiliza copos de forma cônica para colocar sorvete. O copo tem 10 cm de profundidade por 4 cm de diâmetro na abertura. Num copo, foram colocadas duas colheradas de sorvete, cada uma delas com um volume de $\frac{16\pi}{3}$ cm^3. Se o sorvete colocado no copo derreter, ele transbordará?

Figura 5: Situação de comparação, coleção D (2010, p. 261).

Nessa atividade, o uso da fórmula e, portanto a medição, é claramente valorizada, tendo em vista o domínio numérico do volume das "colheradas de sorvete", a saber, 16π /3. A comparação empírica, ainda que improvável, torna-se inviável, pois as medidas em jogo são números irracionais.

Embora não apresentamos todas as situações de comparação observadas nos livros didáticos analisados, explicitamos aquelas que contemplam as demais. A partir dos exemplos apresentados é possível perceber que essas situações têm um papel relevante para a construção do conceito de volume como grandeza que dificilmente pode ser explorado nas situações, por exemplo, de medição. A distinção entre o sólido e seu volume é claramente favorecida nas situações de comparação, assim como o desenvolvimento de estratégias variadas, a exemplo do princípio de Cavalieri.

Situações de produção

As situações de produção também são pouco abordadas, uma vez que identificamos apenas 24 exercícios desse tipo para um total de 704 exercícios classificados (ou analisados). Além disso, constatamos ocorrências de atividades de produção que remetem a procedimentos numéricos-algébricos como mostra o exemplo seguinte.

32. Qual deve ser a medida da aresta de uma caixa-d'água cúbica para que ela possa conter 8 000 ℓ de água?

Figura 6. Situação de produção, Coleção D (2010, p. 222).

Nessa atividade é dado um volume e pede-se o comprimento da aresta de uma caixa que o contenha. Tendo em vista que o volume é dado em litros, para a obtenção do sólido são requeridos procedimentos numéricos-algébricos. A ausência de imagem e a especificidade do sólido a ser obtido pode favorecer o uso de fórmulas. Porém, tem-se uma atividade importante por explorar a produção de um sólido dado o seu volume. É possível também que sejam produzidos sólidos com volume maior que o volume dado, pois é suficiente que tal sólido contenha 8000 *l* de água. Por exemplo, um recipiente cúbico com 2,5 m de aresta contém 15 625 litros de água e, portanto, contém 8000 litros.

No exercício mostrado na figura 7, tem-se uma situação de produção que possibilita explorar estratégias e teoremas em ação diversos.

Muitas embalagens de leite que utilizamos têm a forma de um prisma com a base retangular e capacidade de 1 litro.

a) Como você deve cortar uma dessas embalagens de leite de modo a obter um recipiente que permita medir no máximo meio litro?
Procure duas maneiras diferentes de fazer esse corte.

b) Usando ainda embalagens desse tipo, como você faria para obter recipientes que permitissem medir um terço de litro, um quarto de litro, ..., um decilitro?

c) E se as embalagens tivessem a forma de um prisma de base pentagonal, como você faria para obter meio litro?

Figura 7. Situação de produção, coleção E (2010, p. 283).

Esse exercício envolve a produção de sólidos com volume menor que um volume dado. Estratégias numérico-algébricas não são favorecidas, pois não são dadas as medidas das arestas da caixa. No item *a*, por exemplo, é possível fazer diferentes cortes de modo que a caixa contenha meio litro como: um corte com um plano que contém a diagonal do prisma e é perpendicular ao plano tomado como base; e outro, cujo plano de corte é paralelo ao plano tomado como base intersectando as arestas em seus respectivos pontos médios. A produção de diferentes sólidos com mesmo volume possibilita distinguir o objeto geométrico da grandeza.

Bem como nas situações de comparação, elencamos os exercícios que representam o conjunto daqueles observados nos livros didáticos. Constatamos também para as situações de produção, a possibilidade de formular teoremas em ação e o uso de estratégias que auxiliam na conceituação de volume como grandeza, que em outras situações não são evidenciadas.

Conclusões

As situações de comparação e de produção contempladas neste artigo são necessárias para a conceituação de volume enquanto grandeza, assim como as de medição. Entretanto, esta última predomina em relação às demais.

Como já mencionado, as situações de comparação e de produção favorecem o desenvolvimento de estratégias diversas e a formulação de teoremas em ação verdadeiros, os quais auxiliam na conceituação de volume como grandeza, ou seja, que consiste em distinguir o sólido (recipiente, em se tratando de capacidade) de seu volume e da medida do volume, numa dada unidade. Essa distinção/associação é demasiadamente favorecida nas situações aqui analisadas, conforme mostram as análises em que, por exemplo, dois sólidos qualitativamente diferentes podem ter mesmo volume (figura 3) e a possibilidade da produção de diferentes sólidos com mesmo volume (figura 7).

Diante disso, sugerimos que seja dada mais ênfase as situações de comparação e de produção nos livros didáticos de matemática analisados, pois entendemos que as mesmas são importantes para a compreensão de volume como grandeza e o enfoque dado nesses manuais escolares são insuficientes. Além disso, a efetiva abordagem das situações mencionadas pode contribuir significantemente para a superação de entraves e dos baixos desempenhos constatados por Oliveira (2002), Barros (2002), Anwandter-Cuellar (2008) e Figueiredo (2013) na construção do conceito de volume.

Referências e bibliografia

Anwandter-Cuellar, N. (2008). *Etude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume* (Mémoire de master - 2 HPDS, Histoire Philosophie et Didactique des Sciences). Université Montpellier 2.

Barroso, J. M. (2011). *Conexões com a Matemática* (Vol. 1, 2, 3). Ed. Moderna.

Baltar, P. M. (1996). *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège* (Tese de Doutorado). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Barros, J. S. (2002). *Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório* (Dissertação de Mestrado em Educação). Programa de Pós Graduação em Educação, Centro de Educação, UFPE, Recife.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental*. Brasília.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. (2002b). *PCN+: Ensino Médio orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília.

Carvalho, J. B. P., & Lima, P. F. (2010). *Escolha e uso do livro didático* (Vol.17, pp.15-30). Brasília,

Dante, L. R. (2010). *Matemática: contexto e aplicações* (Vol. 1, 2 e 3). São Paulo: *Ática*.

Douady, R., & Perrin-Glorian. M-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(4), 387 424.

Figueiredo, A. P. N. B. (2013). *Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, UFPE, Recife.

Gérard, F.M., & Roegiers, X. (1998). *Conceber e avaliar manuais escolares*. Porto: Porto Editora.

Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., & Almeida, N. 92010). *Matemática: ciência e aplicações* (Vol. 1, 2 e 3, 6ª ed.). São Paulo: Saraiva.

Lima, P.F. (1995). Considerações sobre o conceito de área. In *Anais da Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife.

Morais, L. B. (2013). *Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de Matemática do ensino médio* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, UFPE, Recife.

Oliveira, G. R. F. (2002). *Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso* (Dissertação de Mestrado em Educação). Programa de Pós Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Ribeiro, J. (2010). *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia* (Vol. 1, 2 e 3). São Paulo: Scipione.

Paiva, M. (2009). *Matemática – Paiva* (Vol. 1, 2 e 3). São Paulo: Moderna.

Smole, K. C. S., & Diniz, I. S. V. (2010). *Matemática: ensino médio* (Vol. 1, 2 e 3, 6ª ed.). São Paulo: Saraiva.

Souza, J. R. (2010). *Novo olhar matemática* (Vol. 1, 2 e 3, 1ª ed.). São Paulo: FTD.

Teles, R. (2007). *Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas* (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches em Didactique des Mathématiques – RDM*, *10*(2, 3), 133 – 170. Grenoble.