Reflexión sobre el razonamiento algebraico elemental en profesores de primaria y secundaria

Antonio **Estepa**
Universidad de Jaén
España
aestepa@ujaen.esn
Ángel **Contreras**
Universidad de Jaén
España
afuente@ujaen.es
Juan D. **Godino**
Universidad de Granada
España
jgodino@ugr.es
Miguel R. **Wilhelmi**
Universidad Pública de Navarra (Pamplona)
España
miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Resumen

Se propone la realización de un taller para promover en los profesores de primaria y secundaria el desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos y el reconocimiento de distintos niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. La actividad práctica a realizar se basa en la resolución de un conjunto de tareas que ponen en juego conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental y la puesta en común de las soluciones. La visión ampliada del álgebra escolar que se propone desarrollar tiene en cuenta los procesos de generalización, simbolización, modelización estructural y funcional, así como el cálculo analítico, y permite una articulación coherente entre el pensamiento algebraico en educación primaria y secundaria.

Palabras clave: razonamiento algebraico, niveles de algebrización, formación de profesores, conocimiento didáctico – matemático, enfoque ontosemiótico

Introducción

La promoción del razonamiento algebraico desde los primeros niveles educativos se propone como un objetivo importante en diversas orientaciones curriculares (NCTM, 2000), para lo cual se asume una visión ampliada de la naturaleza del álgebra escolar, no limitada al manejo de expresiones algebraica (Godino, Castro, Aké, & Wilhelmi, 2012). Ello supone un reto para la formación de los profesores de matemáticas ya que usualmente los planes de formación no contemplan el desarrollo de dicha visión sobre el álgebra. Aunque algunos autores (Lins & Kaput, 2004), en la agenda de investigación que proponen para los próximos años en su capítulo sobre "Early Algebra", sugieren que se debe poner "especial atención a la formación de profesores" (p. 60).

El objetivo de este taller es la implementación de una actividad práctica orientada al reconocimiento de los rasgos característicos del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), que avance en la capacitación del profesor para la promoción del pensamiento algebraico desde los primeros niveles educativos. Se trata de aplicar un primer paso de la metodología de diseño instruccional descrita en Aké, Godino, Fernández y Gonzato (2014) para promover el desarrollo de competencias de análisis didáctico de los profesores en el campo del RAE.

Se propone la resolución de un conjunto de tareas propias de educación primaria y secundaria y el reconocimiento de diferentes niveles de algebrización en la actividad matemática implicada, basados en la identificación de objetos y procesos algebraicos característicos. La actividad puede ser de interés tanto para profesores de educación primaria como de secundaria, ayudando a progresar en la articulación de los conocimientos didáctico – matemáticos (Godino, 2009) sobre álgebra de dichas etapas educativas.

En este documento se describe la actividad diseñada, la cual está basada en la resolución en equipos del cuestionario sobre conocimientos didáctico – matemáticos sobre RAE (cuestionario CDM – RAE, incluido en el Anexo) y la puesta en común de dichos conocimientos. Previamente se hace una síntesis de las características del RAE, los niveles de razonamiento propuestos en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) y la estructura del conjunto de tareas incluidas en el cuestionario.

Características del razonamiento algebraico elemental

Diversos autores han reflexionado acerca de los rasgos que caracterizan el álgebra escolar (Filloy, Rojano, & Puig, 2008; Kaput, 2008; Kieran, 2007). Parece haber consenso en que un rasgo característico de la actividad algebraica son los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones donde se pasa de considerar casos particulares de conceptos, procedimientos etc., (objetos determinados) a clases o tipos de tales objetos. En la perspectiva del "álgebra temprana" (Cai & Knuth, 2011; Carraher & Schliemann, 2007) el reconocimiento de lo general es condición previa de la expresión de dicha generalidad. Otros autores relacionan el álgebra con el tratamiento de objetos de naturaleza indeterminada, como incógnitas, variables y parámetros. Otro rasgo característico del álgebra es el estudio de las relaciones de equivalencia y sus propiedades, el de las operaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos, o de otro tipo, y las propiedades de las estructuras que se generan. En relación con el pensamiento relacional, la investigación sobre álgebra temprana se ha interesado por indagar la comprensión de los estudiantes de los significados operacional y relacional del signo igual (Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue, 2005; Stephens, 2006).

De las anteriores descripciones se puede concluir que la consideración de una actividad como algebraica tiene contornos difusos. Por ello Godino et al. (2014) proponen un modelo para caracterizar el RAE en el que distinguen cuatro niveles de algebrización, teniendo en cuenta los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática. En el nivel 0 la actividad matemática no incorpora ningún rasgo algebraico, mientras que el nivel 3 es claramente algebraico, los niveles 1 y 2, o niveles incipientes de algebrización, ponen en juego algunos objetos y procesos de índole algebraica (Figura 1).

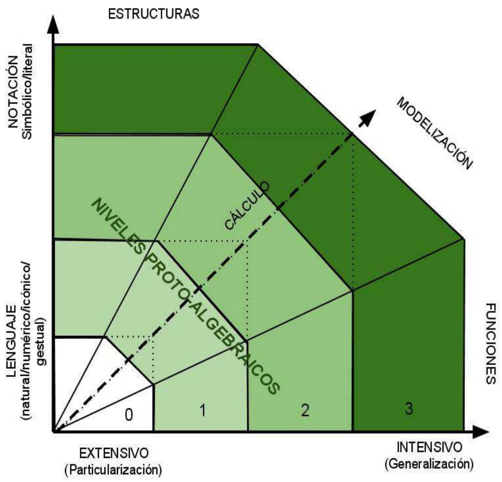


Figura 1. Niveles proto-algebraicos de razonamiento matemático (Godino et. al., 2014).

En la Tabla 1 se resumen las características esenciales de los tres niveles de algebrización descritos en Godino et al. (2014), junto con el nivel 0 (ausencia de rasgos algebraicos), los cuales están basados en las siguientes distinciones ontosemióticas:

1) La presencia de “objetos algebraicos” intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación).

2) El tratamiento que se aplica a dichos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales.

3) Tipo de lenguajes usados.

Tabla 1

Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	No intervienen objetos intensivos. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con objetos extensivos	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES

Ejemplo de problema que se puede resolver de diferentes maneras implicando los diferentes niveles de algebrización:
En una fiesta, los asistentes, al llegar, se saludan dándose un apretón de manos, ¿cuántos apretones de manos se dan si asisten a la fiesta 2 personas? ¿Y tres personas? ¿Y 5 personas? ¿Y 50 personas? … ¿Y n personas?
***Solución 1:* (nivel 0).** Si asiste una persona, no hay apretón de manos. Si asisten 2 personas se dan un apretón de manos. Si asisten 3 personas, la primera le da apretón de manos a las otras dos y las otras dos se dan un apretón de manos, en total 3 apretones de manos. Y así sucesivamente…

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
1	En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales se reconocen los intensivos	En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos

***Solución 2:* (nivel 1)** Supongamos que las personas llegan a la fiesta de 1 en 1. Cuando llega la primera no hay apretón de manos. Conforme van llegando las personas le dan un apretón de manos a las que había anteriormente. De este modo cuando llega la 2ª persona estrecha la mano a la primera persona que llega a la fiesta, un apretón de manos. Cuando llega la 3ª persona estrecha la mano a los dos anteriores, 2 apretones de manos y el que habíamos contado antes, en total 3 apretones de manos. Cuando llega la 4ª persona, teníamos ya 3 apretones de manos más los 3 apretones de manos que da la 4ª persona a los anteriores 3+3= 6 apretones de manos, en general, cada vez que llega una nueva personas los apretones de manos serán los anteriores más el lugar que ocupa la última persona menos 1. Lo resumimos en la siguiente tabla

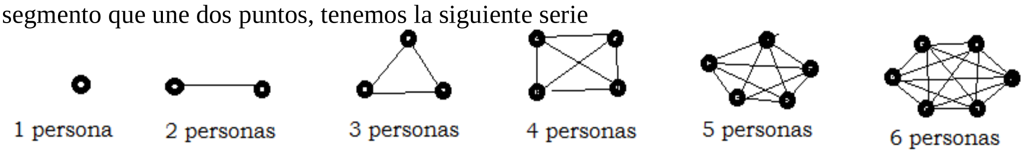
Nº Per.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**…**
Apretón manos	0	1	1+2=3	3+3=6	6+4= 10	10+5=15	15+6=21	21+7=28	28+8=36	36+9=45	…

También podía haber sido la ***solución 3*** (nivel 1): (uso de una fórmula conocida):). El problema propuesto equivale al número de parejas distintas que se pueden formar con n personas, es decir, las combinaciones de *n* elementos tomados de 2 en 2, es decir, $C_{n,2} = ((n(n-1))/2! = (n^2-n)/2$

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
2	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal

***Solución 4*: (nivel 2).** Si colocamos las *n* personas en una tabla como la siguiente, para calcular los apretones de manos procederemos de la siguiente manera: n^2 es el número de pares que se obtienen en la tabla, pero para calcular el número de apretones de manos debemos eliminar los pares que tienen igual componente (1,1), (2,2), …., es decir, los de la diagonal principal que son *n*, ya que, una persona no se da apretón de manos consigo misma, además , en cuanto a los apretones de manos, los pares restantes los debemos dividir por 2, ya que los que tienen componentes simétricas, *(a,b)* y *(b,a)* corresponden al mismo apretón de manos, en consecuencia el número de apretones de manos es = $(n^2 - n)/2$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	**n**
1							
2							
3							
4							
5							
…							
n							

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
3	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal ; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto
	***Solución 5*. (Nivel 3).** Si representamos cada persona por un punto y el apretón de manos por el segmento que une dos puntos, tenemos la siguiente serie  De dicha serie se deduce que el número de apretones de manos que se dan *n* personas, para *n*>2, se corresponde con el número de diagonales de un polígono convexo de *n* lados más el número de lados n, es decir, $\frac{n(n-3)}{2}+n=\frac{n^2-3n}{2}+\frac{2n}{2}=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$		

La resolución de problemas de distintas maneras contribuye a desarrollar la competencia matemática del estudiante (Niss, 2003). Si pedimos a nuestros estudiantes que resuelvan los problemas de distintas maneras, paulatinamente irán apareciendo, de manera natural, los distintos niveles de algebrización y contribuiremos al desarrollo de la competencia matemática.

Categorías de conocimientos didáctico-matemáticos sobre RAE

El conjunto de ítems que componen el cuestionario CDM-RAE (Anexo), que será usado como instrumento de reflexión en el taller, está estructurado según dos tipos de variables: Contenido algebraico y contenido didáctico. Para la variable contenido algebraico se consideran tres valores o categorías, en las cuales a su vez se pueden distinguir diversas subcategorías:

- Estructuras (relación de equivalencia; propiedades de las operaciones, ecuaciones,…).
- Funciones (patrones aritméticos, patrones geométricos; función lineal, afín, cuadrática,…).
- Modelización (problemas de contexto resueltos mediante el planteo de ecuaciones o relaciones funcionales).

Las tareas involucran contenido algebraico propio de educación primaria (conocimiento común del contenido), o propio de niveles superiores (conocimiento avanzado, p. e., educación secundaria). El cálculo analítico puede tener lugar ligado a las estructuras, funciones y modelización, y ser realizado con lenguaje simbólico – literal o de otro tipo.

Para la variable *contenido didáctico*, el cual refiere a un contenido algebraico, sea común o avanzado, se consideran las categorías siguientes:

- Faceta epistémica: reconocimiento de objetos y procesos algebraicos (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades; generalización, modelización); reconocimiento de niveles de algebrización.
- Faceta cognitiva: significados personales de los alumnos (conocimiento, comprensión y competencia sobre contenidos algebraicos elementales); conflictos de aprendizaje sobre objetos y procesos algebraicos.
- Faceta instruccional: recursos para la enseñanza del álgebra en primaria (situaciones – problema, medios técnicos).

- Faceta ecológica: directrices curriculares; uso de RAE en distintos bloques de contenido matemático; conexiones inter-disciplinares).

La evaluación del conocimiento didáctico-matemático del profesor tiene en cuenta tanto el contenido algebraico en sí mismo, como el conocimiento didáctico relativo a tales contenidos matemáticos. Usualmente las tareas incluyen apartados centrados en la solución de una tarea matemática (mediante la cual se evalúa el conocimiento del contenido matemático) y apartados que cuestionan sobre alguno de los aspectos del conocimiento didáctico de los contenidos puestos en juego.

Desarrollo de conocimientos didácticos sobre RAE

La actividad práctica mediante la cual se pretende desarrollar el conocimiento didáctico – matemático sobre RAE se describe a continuación:

Metodología del taller:

1. Presentación de las características del RAE basadas en los trabajos de Godino y colaboradores (Aké, Godino, & Gonzato, 2013; Godino et al., 2014) y de los niveles de algebrización.

2. Trabajando en equipos realizar las siguientes actividades:

   2.1. Resolver las tareas del Cuestionario CDM-RAE (Anexo), a ser posible, de varias maneras.

   2.2. Asignar niveles de pensamiento algebraico a las distintas soluciones dadas, en el punto anterior, a las tareas del cuestionario, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

   2.3. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

3. Presentación, discusión de resultados y extracción de conclusiones

Reflexiones finales

Consideramos que la distinción de niveles de razonamiento algebraico elemental puede ser útil en la formación didáctico-matemática de profesores al permitir desarrollar en ellos el *sentido algebraico*. Se trata de reconocer rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales los profesores pueden intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos. Este sentido algebraico se puede entender como la capacidad de un sujeto para,

1) Usar sistemáticamente símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.

2) Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.

3) Reconocer patrones, regularidades y funciones.

4) Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta en la situación dada.

El sentido algebraico se puede desarrollar en los niños mediante actividades debidamente planificadas, que partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización, la modelización y cálculo analítico. Se contribuye de este modo al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes cuando resuelven un problema de distintas maneras (Niss, 2003).

Es claro que para que los alumnos vayan construyendo el sentido algebraico los maestros deben también tenerlo y saber cómo desarrollarlo. No basta con elaborar propuestas curriculares (NCTM, 2000) que incluyan el álgebra desde los primeros niveles educativos, se precisa que el docente actúe como principal agente de cambio en la introducción y desarrollo del razonamiento algebraico en las aulas de primaria, y de su progresión en la educación secundaria.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

Referencias y bibliografía

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T., & Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5*, 25 – 48.

Aké, L., Godino, J. D., & Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33,* 39-52.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Carpenter, TH. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, *37(1)*, 53-59.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Berlin: Springer.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, *26*(42B), 483-511.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The current State of the Field. En K. Stacy, H. Chick, & M. Kendall (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study*, (pp. 47-70). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Niss M. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. En B. L. Madison, & L. A. Steen, (Eds), *Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy*, held at the National Academy of Sciences in Washington, D.C. on December 1-2, 2001. National Council on Education and the Disciplines, Princeton, New Jersey, 2003. Disponible el 1 de Agosto de 2014 en: https://www.docenti.unina.it/downloadPub.do?tipoFile=md&id=297768

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers’ awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 249-278.

ANEXO. Cuestionario CDM-RAE

1. Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria:

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

8 + 4 = ___ + 5

Un alumno responde que el número es el 12,
a) Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.
b) ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

2. Se ha pedido a un alumno que indique si la expresión "13 + 11 = 12 + 12" es verdadera o falsa.
El alumno responde lo siguiente:

Es verdadera porque restamos uno al doce y lo sumamos al otro doce, y se obtiene lo que está ahí (en el lado izquierdo).

a) Explica el razonamiento que pudo seguir el alumno para plantear su respuesta.
b) ¿Qué propiedades de la adición moviliza el alumno que justifica su respuesta?

3. Un alumno formuló la siguiente conjetura: *"Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número"*

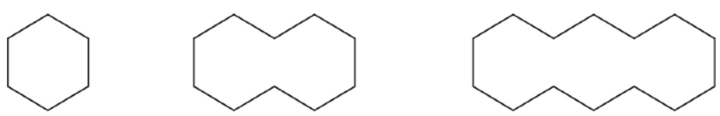
a) ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?
b) ¿Qué tipo de justificación piensas podría dar un alumno de primaria a esta conjetura?

4. Observa detenidamente la siguiente suma, y determina el número que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline 2 & A & C & C \end{array}$$

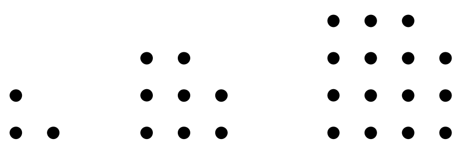
a) ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C? ¿Cómo sabes que son correctos? Explica tu razonamiento
b) ¿Se puede resolver la tarea usando algún procedimiento algebraico? ¿Cómo sería esa resolución y qué nociones algebraicas se usarían?
c) ¿Qué tipo de respuesta y justificación piensas podría dar un alumno de primaria a este problema?

5. Considera la siguiente secuencia de figuras.



a) Representa los dos términos siguientes de la secuencia e indica el número de segmentos necesarios para construir cada una. Explica cómo lo haces.
b) ¿Cómo cambiarías el enunciado de la tarea para inducir algún procedimiento de resolución que ponga en juego conocimientos de tipo algebraico?
c) ¿Cuáles serían tales conocimientos algebraicos?

6. Observa la siguiente secuencia de tres figuras formadas por puntos:



a) Determinar el número de puntos que tendrá la figura que estuviera en la vigésimo quinta (25ª) posición de esta secuencia, suponiendo que se continúa con la misma regla de formación de las figuras. Justifica la respuesta.
b) Indicar las técnicas o diferentes maneras mediante las cuales se puede resolver el problema.
c) ¿Consideras que esta tarea se puede proponer a alumnos de tercer ciclo de primaria? ¿Cómo podrían abordar la solución?

7. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días.
a) ¿Cuánto dinero recibió?
b) ¿Se puede resolver el problema mediante procedimientos exclusivamente aritméticos? ¿Cómo?
c) ¿Se puede resolver el problema usando conocimientos algebraicos? ¿De qué manera?

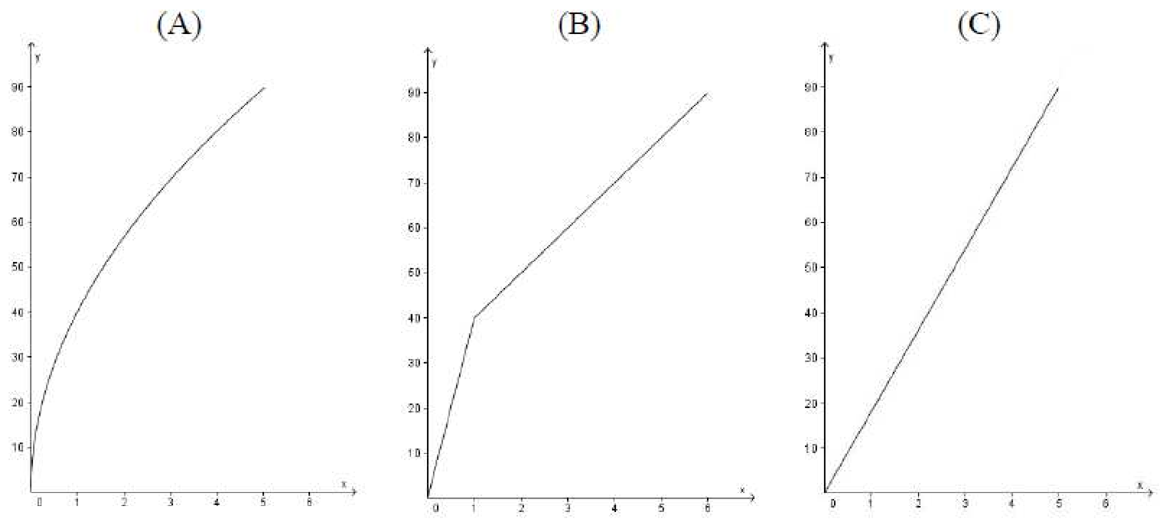
8. Analiza las siguientes expresiones y contesta:

1. $4x + 5 = 25$
2. $y = 2x + 1$
3. $P = 2c + 2l$

a) Describe la interpretación que haces de cada una de las expresiones anteriores.
b) Enuncia tres problemas que se puedan proponer a alumnos de primaria cuya solución lleve a plantear estas expresiones.

9. Para llenar con agua un recipiente de una capacidad máxima de 90 litros se usa un grifo cuyo caudal es constante e igual a 18 litros por minuto.

a) Indica cuál de las tres representaciones gráficas corresponde a la situación descrita, siendo que en el eje de las X se representa el tiempo en minutos y en el eje de las Y el volumen de agua en litros.



Respuesta: _____; Justificación:

b) ¿Qué conocimientos matemáticos o de otro tipo se usan para resolver esta tarea?

c) ¿Consideras que esta tarea es adecuada para ser propuesta a niños de educación primaria? En tal caso, de qué ciclo. Justifica tus respuestas.

10. Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:

En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa.
¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?

a) Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones lineales. Supón que en una bolsa caben 4 kg.
b) Resuelve el problema que enuncies e indica los conocimientos algebraicos que se usan.