Produção de material para o ensino de Cálculo

Sonia Barbosa Camargo **Igliori**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
sigliori@pucsp.br
Marcio Vieira de **Almeida**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
marcioalmeidasp@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta um material produzido, com o uso do computador, para o ensino de conceitos do Cálculo, no qual encontra-se, por exemplo, a construção com o GeoGebra do gráfico de uma função contínua não diferenciável em todos os pontos de seu domínio, com o intuito de explorar a relação diferenciabilidade/continuidade de funções reais. Esse material é embasado em referências teóricas propostas por David Tall e colaboradores, e na escolha de um *software* adequado a tais referências. A noção de retidão local, por exemplo, é evocada para tratar do conceito de derivada. Espera-se com este artigo contribuir com a ampliação necessária da produção de materiais para o ensino que levem em conta resultados de pesquisas da Educação Matemática.

Palavras-chave: Ensino Superior, Conceitos de Cálculo, uso do GeoGebra, David Tall.

Introdução

Este artigo apresenta um resultado parcial de uma pesquisa de doutoramento realizada no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. É problemática dessa pesquisa a necessidade de elaborar material que visem preparar a Matemática para os estudantes (Wilkelmann, 1994); existência de dificuldades relativas à aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, pois eles possuem uma “condição privilegiada na formação do pensamento matemático avançado” (Igliori, 2009, p. 13).

O alvo da pesquisa é o desenvolvimento de materiais para o ensino de conceitos de Cálculo com o *software* de Geometria Dinâmica, GeoGebra. A escolha desse *software* deve-se ao fato dele ser gratuito, possuir interface simples e intuitiva e possibilitar o trabalho em conjunto da Geometria, da Álgebra e do Cálculo. Esse *software* é munido das ferramentas necessárias para o desenvolvimento das atividades deste artigo e possibilita a replicação das mesmas, pois ele não requer computadores "poderosos" e possui uma versão *mobile* para dispositivos móveis (como, *smartphones* e *tablets*). Além disso, o *software* possibilita a elaboração e modificação de *applets,* tanto para uso em sala de aula quanto para disponibilizar em *websites* da *internet*.

A pesquisa se norteia por elementos teóricos desenvolvidos por Tall e colaboradores que auxiliam a fundamentar a maneira pela qual o computador pode ser utilizado para o desenvolvimento de abordagens de ensino com características específicas nomeadas de abordagens cognitivas, sendo essa uma abordagem para o currículo que considera o estado cognitivo atual do aprendiz e as estruturas do domínio de conhecimento dele de uma maneira apropriadas à aprendizagem (Tall, 1986, p. 71).

Posteriormente, em Tall (2010), ele denominou outro tipo de abordagem para o ensino de conceitos do Cálculo indicada como uma

> "[…] abordagem sensível ao cálculo é construída na evidência de nossos sentidos humanos e utiliza esses *insights* como uma base significativa para vários desenvolvimentos posteriores, do cálculo prático para aplicações para o desenvolvimento teórico na analise matemática e até a abordagem lógica na utilização dos infinitesimais". (Tall, 2010, p. 1, tradução nossa).

O exemplo aqui apresentado foi explorado em Leyva e Padilha (2013) e está disponível, no sítio[1]. Em Igliori e Almeida (2014) é apresentada, detalhadamente, a construção da função "manjar branco" com o *software* GeoGebra, e também é possível ver outra maneira de construir essa função no sítio[2]. O que diferencia o material apresentado neste artigo é o embasamento teórico segundo Tall (1982) para o uso do computador no ensino do Cálculo.

O uso do computador no ensino segundo Tall

O computador pode contribuir para o desenvolvimento de abordagens sensíveis, visto que por meio de *softwares* adequados é possível desenvolver materiais significativos para um dado domínio de conhecimento levando em consideração os obstáculos conhecidos e procurando resolver eventuais conflitos cognitivos potenciais de forma adequada (Tall, 1986, p. 71).

A potencialidade da utilização dos computadores no ensino dos tópicos avançados da Matemática e no que se refere à aprendizagem é reforçada pelo pesquisador inglês, quando diz que é possível

> "[…] utilizar os computadores para visualizar conceitos matemáticos de maneira útil no Cálculo e em Análise. A utilização criativa dos softwares, que plotam gráficos, e das calculadoras gráficas tem permitido aos estudantes lidar de maneira significativa com conceitos como a diferenciação por meio da noção de "retidão local", integração por meio da soma de áreas, e resolver equações diferenciais (de 1.ª ordem) por meio da visualização da construção das curvas solução com um gradiente dado. Durante esse tempo, me tornei cada vez mais consciente do

---

[1] Endereço eletrônico: http://users.dickinson.edu/~richesod/math361/nowherediff.html.
[2] Endereço eletrônico: http://www.geogebratube.org/student/m51030.

> conceito imagem limitado oferecido por gráficos plotadores de gráficos que só desenham gráficos razoavelmente suaves dados por fórmulas" (Tall, 1993, p. 2, tradução nossa).

Nessa perspectiva, um computador, munido de um *software* adequado, pode ser utilizado "para propiciar imagens que auxiliarão no desenvolvimento de tópicos do Cálculo e da Análise" (Almeida, 2013, p. 114).

Em Tall (2000) foi apresentada outra característica que determinados ambientes computacionais possuem e que pode ser utilizada para promover o desenvolvimento cognitivo dos aprendizes. Tall diz que os computadores

> "[...] podem executar quaisquer algoritmos de forma rápida e eficiente, além de exibir o resultado final com uma gama de diferentes representações. Por exemplo, os resultados podem ser representados visualmente e manipulados fisicamente. Utilizando um mouse é possível ao estudante construir relações corporificadas que fazem parte de uma estrutura conceitual mais rica e ampla" (Tall, 2000, p. 10, tradução nossa).

Softwares, que provêm um retorno imediato às alterações realizadas pelo usuário, são denominados pelo pesquisador como organizadores genéricos[3], que é "um ambiente (ou micromundo[4]) que permite ao aprendiz manipular *exemplos* e (se possível) *contraexemplos* de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados" (Tall, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor). O pesquisador considera parte do desenvolvimento de abordagens cognitivas a utilização de organizadores genéricos, pois elas "dão ao aprendiz experiências apropriadas de modo que ele está cognitivamente pronto para novos conceitos matemáticos quando eles são introduzidos" (Tall, 1986, p. 5, tradução nossa).

Para o desenvolvimento de um organizador genérico é necessário selecionar uma ideia importante e essencial, que será o foco da atenção do estudante. Num primeiro momento, essa ideia não é, necessariamente, fundamental para a teoria matemática, porém, ela auxilia o sujeito a desenvolver intuições apropriadas ao desenvolvimento teórico. Segundo essas características, Tall formulou a noção de raízes cognitivas como "uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento, no entanto deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e desenvolvimento teórico futuro" (Tall, 2000, p. 11, tradução nossa).

Tall (2001) destaca a importância dos aspectos sensório-motores e visuais, na composição do pensamento matemático, e que esses atuam numa interface que utiliza o computador. Por meio de ações simples, como, por exemplo, clicar em determinado local e a utilização do teclado para atribuir um valor a uma variável, "fornecem suporte para conceitos teóricos de alto nível" (Tall, 2001, p. 211, tradução nossa).

A manipulação simbólica, que foi ampliada na década de 80, é outra característica dos ambientes computacionais destacada pelo pesquisador. Essa aprimorou a realização de cálculo numérico dos computadores. Além disso, naquela época, Tall revela-nos a seguinte crença: "Havia a crença generalizada de que o computador poderia acabar com toda a desordem

---

[3] Tradução do termo original *generic organisers*.

[4] Esse termo é utilizado pelo pesquisador no sentido que Papert (1980, p. 117 *apud* Tall, 1986) como "um mundo autossuficientes no qual certas questões são relevantes e outras não".

desnecessária de cálculos e manipulações, permitindo ao indivíduo se concentrar mais em ideias essenciais" (Tall, 2001, p. 212, tradução nossa). Apesar dessa crença, Tall revela um perigo, existente na utilização de determinados *softwares*, que realizam manipulações simbólicas: apesar deles reduzirem o "fardo" das manipulações simbólicas pelo sujeito, eles podem substituir um procedimento realizado com lápis e papel por uma sequência de teclas digitadas (Tall, 2001, p. 213).

Com o intuito de reduzir a tensão cognitiva do aprendiz em um currículo de Matemática que utiliza o computador, Tall formulou o Princípio da Construção Seletiva[5]. Com esse princípio, o educador deve elaborar um ambiente no qual o aprendiz possa focar em determinada parte da teoria, ao passo que determinados processos subjacentes, que não são o objetivo do educador naquele momento, são executados pelo computador (Tall, 2001, p. 213). Um exemplo de utilização desse princípio, relatado por Tall, aconteceu na pesquisa de Gray e Pitta (1997 *apud* Tall, 2001). Nessa pesquisa, o *software* realizava os cálculos e o sujeito concentrava-se nas relações numéricas apresentadas e não nos processos de contagem que faziam parte de repertório de estratégias dele.

Outra característica valiosa dos ambientes computacionais é que eles possibilitam o desenvolvimento de atividades de experimentação. Por meio de atividades adequadas, o sujeito pode observar determinado fenômeno e atribuir sentido a ele. Esse pode auxiliá-lo no desenvolvimento das propriedades matemáticas envolvidas naquela atividade (Tall, 2001, p. 225).

Entretanto, Tall chama atenção para um importante aspecto que deve ser considerado quando a tecnologia é utilizada para o desenvolvimento da Matemática, pois as "experiências desenvolvem aspectos perspicazes que apoiam a teoria, mas também podem levar a uma variedade de outras imagens mentais que podem ser diferentes das ideias matemáticas atualmente detidas por especialistas" (Tall, 2001, p. 230, tradução nossa).

No que segue são apresentados elementos, desenvolvidos por David Tall e colaboradores, para o desenvolvimento de abordagens de ensino especificamente para o conceito de derivada. Esses elementos foram implementados pelo pesquisador inglês utilizando outras plataformas, como o *software Graphic Calculus*, desenvolvido pelo próprio pesquisador e outros. Neste artigo esses elementos são implementados no *software* GeoGebra e visam facilitar a utilização das ideias desenvolvidas por David Tall por pesquisadores e pessoas interessadas pela Educação Matemática no Ensino Superior.

Elementos teóricos para o desenvolvimento do conceito de derivada de uma função real

Nesta seção é apresentada a noção de retidão local definida pelo pesquisador inglês como uma raiz cognitiva apropriada para o conceito de derivada. Essa noção está baseada na percepção de quanto maior a ampliação menor será a curvatura (Tall, 1989). Tal noção seria apropriada ao conceito de derivada, pois ela permite que a inclinação da função seja vista no próprio gráfico (Tall, 2000, p. 11). Nesse sentido, a representação gráfica de função diferenciável, quando ampliada em determinada porção, assemelha-se localmente a um segmento de reta. Observe a Figura 1, nela é possível perceber que uma curva diferenciável, localmente, assemelha-se a um segmento de reta:

[5] Tradução para o termo original *The Principle of Selective Construction* (Tall, 1993 *apud* Tall, 2001, p. 222)

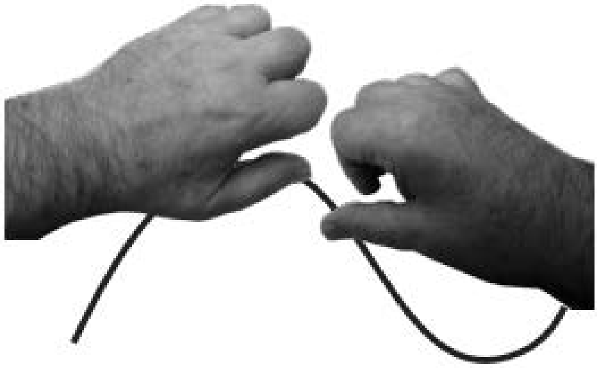

Figura 1. Uma pequena porção da curva assemelhasse a um segmento de reta (Tall, 2010, p. 11).

Em um ambiente computacional, Tall elaborou o organizador genérico *Magnify*, que faz algo similar ao feito na *Figura 1*, pois "permite ao usuário focar sua atenção no gráfico e traçar uma parte ampliada dele numa segunda janela" (Tall, 2000, p. 11, tradução nossa). Na *Figura 2* apresenta a função real dada pela seguinte sentença $g(x)$ = sen x:

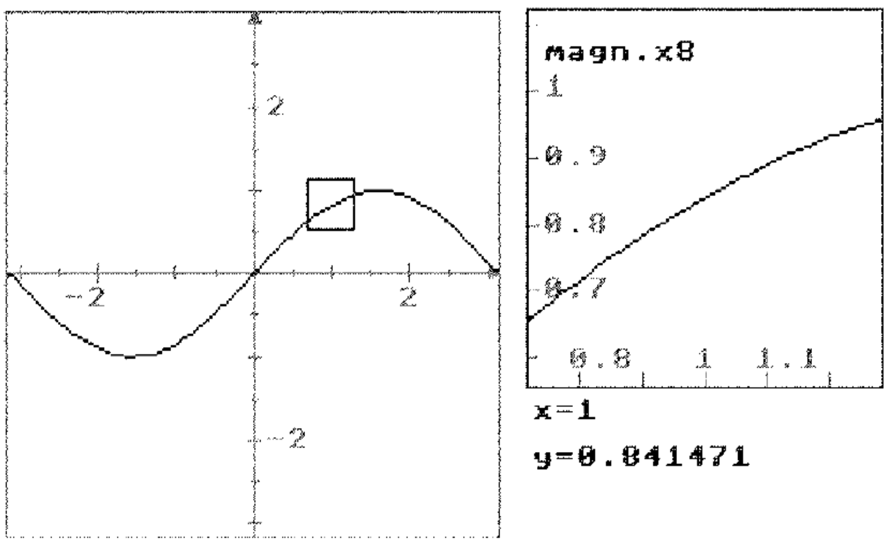

Figura 2. A utilização do organizador genérico *Magnify* (Tall, 2000, p. 12).

A relação entre os conceitos de continuidade e diferenciabilidade de uma função real, é dada pelo seguinte resultado: Seja f: $X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, se f é diferenciável em x_0 então f é contínua em x_0. A recíproca desse resultado é falsa, pois existem funções contínuas em determinado ponto do domínio, que não é diferenciável nesse ponto. Em geral, o contraexemplo para a recíproca do teorema é a função modular, ou seja, a função real definida pela $h(x) = |\, x\,|$. Em $x = 0$, ela é uma função contínua, mas não é diferenciável em 0, pois o $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}$ não existe. No entanto, essa é uma função em que a diferenciabilidade não é garantida apenas em um ponto, o ponto zero. Um exemplo de uma função contínua e não diferenciável em nenhum ponto de seu domínio pode causar desconforto e por isso não é comumente apresentado.

Pela retidão local, é possível inferir que uma função que é contínua num determinado ponto, e não diferenciável nele, localmente, possui uma representação gráfica, que não se assemelha a um segmento de reta. Por exemplo, considere a função real dada pela seguinte sentença $m(x)=x^{\frac{2}{3}}$. A representação gráfica dessa função, numa vizinhança de 0, é a seguinte:

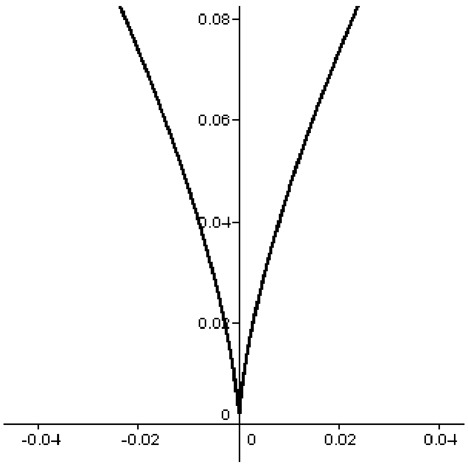

Figura 3. O gráfico da função *m*, dada pela sentença $m(x)=x^{\frac{2}{3}}$, numa vizinhança de 0.

Nessa vizinhança o gráfico da função não se assemelha a uma linha reta, então para concluir que a função *m* não é diferenciável em $x = 0$ é preciso verificar que não existe o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{m(x)-m(x_0)}{x-x_0} \quad (1)$$

Fato que é comprovado, porque os limites laterais, pela direita e pela esquerda, não são finitos.

Vale destacar que casos como esses são explorados em livros de Cálculo, editados atualmente.

Por exemplo, em Boulos (1999, p. 73) foi exemplificado, na Figura 4, situações nas quais não existe a reta tangente a um gráfico.

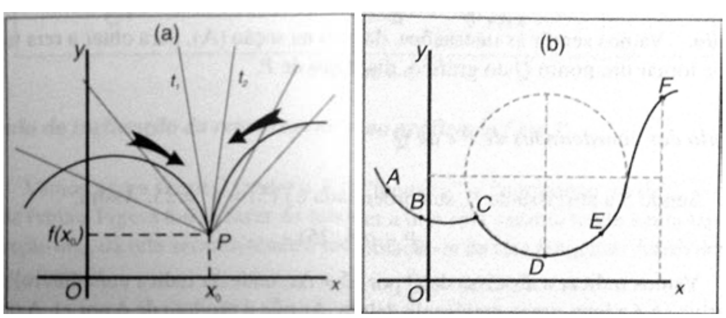

Figura 4. Exemplos de gráficos de funções que não possuíam derivadas em determinados pontos de Boulos (1999).

Em Stewart (2005) são apresentados outros exemplos nos quais é possível verificar quando o gráfico de função não é diferenciável. Segundo esse autor, “se o gráfico de uma função *f* tiver uma "quina" ou uma "dobra", então o gráfico não terá tangente nesse ponto e *f* não será diferenciável ali" (p. 145).

Na *Figura 5*, são apresentadas três maneiras, nas quais é possível identificar quando o gráfico de uma função não é diferenciável num dado ponto.

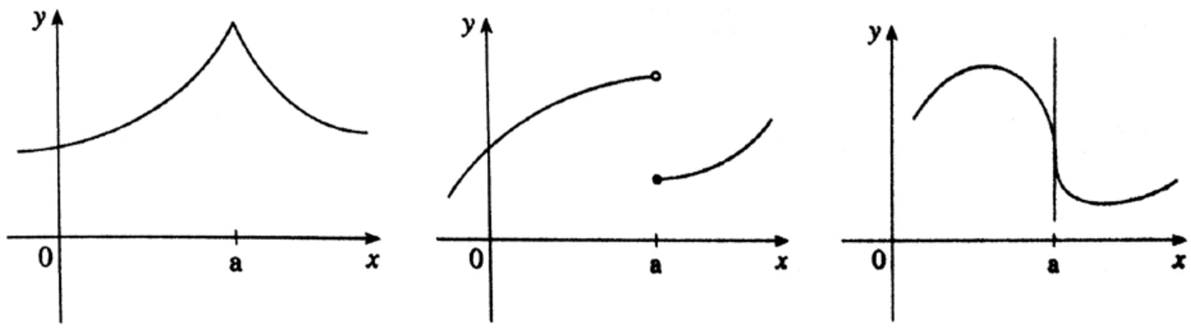

Figura 5. Três maneiras nas quais uma função *f* não é diferenciável em *a* (Stewart, 2013, p. 145).

Além dessa figura, na seção "*Como uma Função Pode Não Ser Diferenciável?*", de Stewart (2013), é apresentado algo se assemelha com a noção de retidão local, pois o autor salienta que no caso de uma função diferenciável, "o gráfico vai se endireitando e se parecerá cada vez mais com uma reta" (p. 175) e no caso de uma função não diferenciável, o fenômeno descrito não ocorre.

Objetivando ampliar a compreensão do aprendiz sobre a noção de diferenciável, o pesquisador inglês promoveu um estudo de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio: a função "manjar branco"[6]. A partir desse exemplo, segundo David Tall, é possível formular "uma explicação conceitual da continuidade e da diferenciabilidade que são formalmente corretas e têm uma interpretação pictórica adequada" (Tall, 1982, p. 11, tradução nossa).

Por meio da noção de retidão local seria possível estimular a imaginação do estudante a conceber como seria a representação gráfica tanto de uma função diferenciável quanto de uma função não diferenciável em determinado ponto do domínio. Para que isso ocorresse, a representação gráfica dessa função deveria permanecer "com bicos", não importando o quanto essa função fosse ampliada.

A função "manjar branco", denotada por *b*, é uma função cujo domínio é o intervalo fechado [0,1] e o contradomínio é o conjunto dos números reais, e é definida em cada ponto de seu domínio como o limite da série de funções nesse ponto, isto é:

$$b(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \quad (2)$$

O termo geral da sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ é $f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} f(2^{n-1} \cdot x)$ sendo *f*, uma função real de uma variável real definida por $f(x) = \left| x - (x) \right|$[7].

[6] Tradução do termo inglês *blancmange function*, que segundo Tall (1982) foi cunhado por John Mills.
[7] Sendo que (*x*) denota a imagem da função real ( ), que é definida do seguinte modo: sabe-se número real *x* pode ser escrito como $x = z + d$, com $z \in \mathbb{Z}$, um inteiro fixo, e $d \in [0,1)$. Com isso, essa função é definida pelas sentenças:

Na *Figura 6*, é apresentada a representação gráfica da soma parcial dos trinta primeiros termos da sequência de funções, cujo limite é a função “manjar branco” [8].

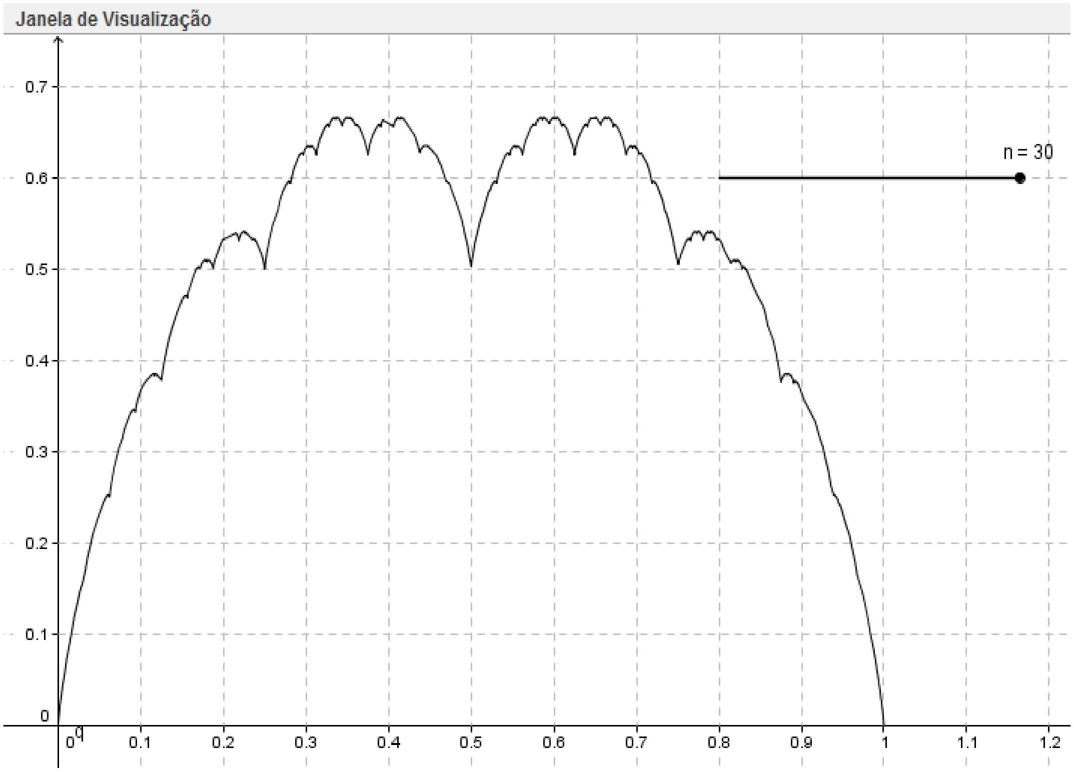

Figura 6. Representação da soma parcial $\sum_{i=1}^{30} f_i(x)$, sendo que $(f_n)_{n \in N}$ é a sequência de funções definida nos parágrafos anteriores.

No ponto de vista do pesquisador inglês, por meio do exemplo da função “manjar branco” seria possível formular “uma explicação conceitual da continuidade e da diferenciabilidade que são formalmente corretas e tem uma interpretação pictórica adequada” (Tall, 1982, p. 11, tradução nossa).

Considerações finais

Neste artigo foram apresentados materiais que auxiliam o desenvolvimento de uma abordagem de ensino baseada em elementos desenvolvidos por David Tall e colaboradores, para o conceito de diferenciabilidade. Essa abordagem é integrante da tarefa de organização de material que visa à “preparação da matemática para os estudantes” conforme Wilkelmann (1994). E os materiais para o ensino podem auxiliar o professor a desenvolver, no aprendiz, um conceito imagem rico para o conceito de derivada.

$$(x) = (z + d) = \begin{cases} z & \text{se } 0 \leq d < 0{,}5 \\ z + 1 & \text{se } 0{,}5 \leq d < 1 \end{cases}$$

[8] Para mais detalhes sobre a construção dessa função no *software* GeoGebra, consulte Igliori e Almeida (2014).

Para o conceito de derivada foi apresentada a noção de retidão local, na qual o aprendiz pode desenvolver elementos que o auxiliem a identificar quanto uma função é diferenciável, num dado ponto, a partir do gráfico da função. Além disso, pelas reflexões propostas pela noção é possível discutir como seria o gráfico de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio da função.

Outro ponto objetivado no artigo é mostrar que o *software* GeoGebra possui ferramentas, comandos e funções predefinidas que possibilita ao professor a elaboração de materiais didáticos significativos para o ensino e aprendizagem de conceitos abordados na Educação Superior, em especial do Cálculo Diferencial e Integral.

Por fim, espera-se que tanto com os exemplos expostos quanto as ferramentas exploradas possam ser utilizadas no desenvolvimento de novas abordagens que contribuam com o avanço da Educação Matemática no Ensino Superior.

Referências Bibliográficas

Almeida, M. A. (2013). *Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, SP, Brasil.

Boulos, P. (1999). *Cálculo Diferencial e Integral, volume 1*. São Paulo: Pearson Makron Books.

Igliori, S. B. C. (2009). Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In Frota, M. C. R & Nasser, L. (Orgs.) *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates* (pp. 11-26). Recife: SBEM.

Igliori, S. B. & Almeida, M. V. (2014). A Utilização do GeoGebra para a Construção da Representação de um Exemplo de Função Contínua Não Diferenciável. *Anais da V Jornada Nacional de Educação Matemática: V JNEM. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo*, 1 -15.

Leyva, Y. & Padilha, A. (2013). Monsters: Everywhere Continuous, Nowhere Differentiable Functions. *Proceedings of the Southwestern Undergraduate Mathematics Research Conference* (SUnMaRC), New Mexico, Mexico, University of New Mexico. Disponível em: <https://ejournals.unm.edu/index.php/nmskc/article/download/3036/2511>. Acesso em: 17 out. 2014.

Stewart, J. (2013). *Cálculo, volume 1*. 4 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Tall, D. O. (1982). The Blancmange Function Continuous Everywhere but Differentiable Nowhere. *The Mathematical Gazette*, *66*(435), 11-22. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/ staff/David.Tall/pdfs/dot1982a-blancmange.pdf>. Acesso em: 23 set. 2014.

Tall, D. O. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. Doctoral thesis. University of Warwick.

Tall, D. O. (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers and Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 37 – 42. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/ download?doi=10.1.1.377.2004&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 23 set. 2014.

Tall, D. O. (1993). Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. *Proceedings of the Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching*. Addison-Wesley, (pp. 243 – 258). Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/ dot1993h-real-rat-cmplx.pdf >. Acesso em: 23 set. 2014

Tall, D. O. (2000). Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). *Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics*, Chiang Mai, Thailand. ATCM Inc, Blackwood, 3 – 20. Disponível em:

<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf>. Acesso em: 23 set. 2014

Tall, D. O. (2001). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal, 12*(3), 210 – 230. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff /David.Tall/pdfs/dot2001b-merj-amt.pdf>. Acesso em: 23 set. 2014.

Tall, D. O. (2010). A Sensible Approach to the Calculus. *The National and International Meeting on the Teaching of Calculus,* Setembro de 2010, Puebla, Mexico. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/calculus.html>. Acesso em: 23 set. 2014.

Winkelmann, B. (1994). Preparing Mathematics for Students. En Biehler, R. *et al*. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. New York: Springer.