A probabilidade que a história nos conta

Ana Lucia Nogueira **Junqueira**
Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil
anajunqueira@gmail.com

Resumo

Encontramos na literatura diferentes abordagens da probabilidade. Cotidianamente nos deparamos com as noções de acaso, incerteza e aleatoriedade, como também com crenças e concepções a elas relacionadas. Para melhor compreender essas noções e conceitos envolvidos no estudo da probabilidade faz-se necessário voltar o olhar para a história para perscrutar a origem e o percurso dessas ideias, bem como as motivações dos pensadores em cada época, os principais empecilhos, resistências ou dificuldades epistêmicas, objetivando evidenciar se algumas incompreensões dessas ainda se refletem em determinados níveis de conhecimento. Nessa direção, trata-se de um extrato da revisão de literatura de minha tese de doutorado no que tange à gênese e evolução histórica do conceito de probabilidade e ideias relacionadas, que muito elucidaram a pesquisa junto a um grupo de professores de matemática da educação básica, permitindo trabalhar as dificuldades que se evidenciaram, aqui apontadas aquelas da análise que se inserem nesse contexto.

Palabras chave: probabilidade, história, evolução conceitual, dificuldades epistemológicas.

Primeiras noções sobre aleatoriedade, acaso e incerteza

Olhando para a História da Matemática vemos que os gregos, além dos amplos conhecimentos de geometria, se destacam por terem inventado a maneira como a matemática moderna é trabalhada, por meio de axiomas, teoremas e provas, apesar de séculos depois, em 1930, Kurt Gödel, amigo de Einstein, com seu Teorema da ter provado que esta abordagem tinha uma inconsistência. Mesmo assim, a matemática seguiu seu caminho ao estilo grego, o estilo de Euclides. Porque os gregos não desenvolveram conhecimentos sobre probabilidades? Afinal eles costumavam apostar num jogo, semelhante a um jogo de dados, jogado com *astrágalos*, feito de

ossos de calcanhar de carcaça de animais; o astrágalo tinha seis faces não uniformes, em virtude da anatomia dos animais, apenas quatro delas eram estáveis para permitir que o osso se apoiasse

ao ser lançado (a probabilidade da peça cair em cada um desses lados era de 40% para as faces estáveis contra 10% para as outras). De acordo com Mlodinow (2009, p. 36), o jogo comum era jogado com quatro astrágalos e o resultado mais raro, em que as quatro peças caiam em lados diferentes, era chamado jogada de Vênus, com probabilidade de, aproximadamente, 384/10.000 de acerto, mas os gregos não sabiam sobre esse cálculo. Na verdade, utilizavam o jogo mais para consultar seus oráculos, sem se preocuparem em entender as regularidades do mesmo. É plausível afirmar que não se preocuparam em perceber essas regularidades porque acreditavam que o futuro se desvelava conforme a vontade dos deuses. Com essa visão de mundo, um entendimento da aleatoriedade seria irrelevante, e mesmo contraditório em relação às suas crenças. Na Antiguidade, chamava-se muitas vezes *probabilidade* àquilo que, segundo as aparências, podia ser considerado como verdadeiro ou certo. De acordo com Ribeiro (2006, p. 14), citando Platão, a retórica de Tísias e Córax consistia na descoberta de que "a probabilidade [εἰκότα – provável, plausível, aparência] deve ser tida em maior apreço do que a verdade [ἀληθεία]" (*Fedro*, 267a)". Essa afirmação torna-se mais significativa considerando o fato de a retórica ter se originado nos meios jurídicos. Ainda segundo Mlodinow (2009, p. 40), o principal legado de Cícero no campo da aleatoriedade foi ter usado o termo *probabilis*, que acabou originando o termo atual. Segundo Franklin (2001, p. 113, tradução nossa): "*Probable* e seus cognatos em outras línguas modernas derivam do aprendido latim medieval *probabilis* e *verosimili*, decorrentes de Cícero e geralmente aplicado a uma opinião para significar *plausível* ou *geralmente aprovado*". No entanto, ainda segundo Mlodinow (2009, p. 40), é numa seção do *Digesto*, código de leis romanas compilado pelo imperador Justiniano, no século VI, que o termo *probabilidade* aparece pela primeira vez como figura jurídica. Por outro lado, na Roma antiga, onde as regras de testemunho eram tribais como na Idade das Pedras, a probabilidade de verdade num testemunho podia variar e apenas o reconhecimento da inconsistência da veracidade de testemunhos sob essa égide é que impulsionou a criação de novas regras para a combinação das possibilidades – isso foi um ponto de partida.

Vale destacar que a palavra probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar). O termo provável é muito utilizado em eventos incertos, sendo também substituído por outros como 'sorte', 'risco', 'azar', 'incerteza', 'duvidoso', dependendo do contexto. No entanto, a noção de probabilidade tem sua origem mais remota relacionada à prática dos jogos, ditos de azar. O jogo foi a mola propulsora e também o primeiro beneficiário da criação da teoria das probabilidades. Parece que tudo começou com o jogo de dados. Entretanto, as informações são um pouco desencontradas, o que é natural uma vez que uma nova escavação pode alterar a data da descoberta, mas sabe-se que por volta de 1200 a. C. já existiam os dados feitos de ossos de animais. Uma combinação cruzada de referências consultadas (Sheynin, 1974; Boyer, 1974; Eves, 1997; Berstein, 1997; Stigler, 1998; Silva, 2004; Hacking, 2006; Kahneman, 2009; Mlodinow, 2009) resultaram nas considerações que se seguem no texto.

Desde a pré-história os dados teriam sido utilizados no Oriente; escavações feitas em cemitérios mostram que, provavelmente, têm origem na Ásia. A expressão "jogar dados" aparece no jogo indiano *Rig-veda*, e há indícios que foram inventados na Índia, pois em escavações feitas em Kalibangan, Lothal e Ropar, foram encontrados dados que remontam a mais de 2000 a. C. Na forma primitiva do *Jogo do osso* (ou *knucklebone*, em árabe*)*, crianças atiravam o osso na expectativa de deixar certo lado para cima ou para baixo. Em escavações em Shahr-i Sokhta (na

antiga Pérsia, hoje o Irã), sítios arqueológicos levaram à descoberta de dados, dos mais antigos que se têm conhecimento, como parte de um jogo de Gamão, com mais de cinco mil anos de idade, que provavelmente foi importado da Índia. Encontrados em tumbas egípcias, os dados sugerem um período de cerca de 2000 a. C. Posteriormente os dados de osso ganharam valores numéricos, tornando-se mais parecidos com os atuais. No entanto, o jogo atingiu grande popularidade com os gregos e os romanos. Os romanos eram exímios jogadores, principalmente na era de luxo do Império Romano (século II d. C.), onde jogar dados era um passatempo predileto, tanto que esse jogo por dinheiro foi motivo de leis especiais em Roma. Na Idade Média, a Igreja Católica era contra o jogo, nem tanto pelo jogo em si, mas pelo vício de beber e dizer palavrões, comum durante os torneios. Os jogadores inveterados do século XVI procuravam cientistas de renome para que estes lhes dessem fórmulas 'mágicas' que garantissem ganhos substanciais nas bancas de jogo. O fato é que desde sempre os jogos foram utilizado em apostas, como também serviram para prever futuro, decidir conflitos ou dividir heranças.

Entretanto, não foram apenas os jogos que contribuíram para a formação do conceito de probabilidade. Também a prática dos seguros teve forte influência e parece ter se iniciado com comerciantes mesopotâmicos e fenícios que o aplicavam à perda de cargas dos navios por conta de roubos ou naufrágios. Essa prática teve continuidade com os romanos e gregos estendendo-se até aos comerciantes marítimos italianos em tempos mais recentes. Não se sabe muito sobre a prática das seguradoras, especula-se que se baseavam em estimativas empíricas das probabilidades. O crescimento de conglomerados urbanos, após a idade média, popularizou o uso de seguros. Apesar do crescimento desse tipo de negócio, os prêmios dos carregamentos entre as Américas e as Índias continuavam sendo calculados pelas técnicas milenares. É daí, então, que surgem os primeiros estudos matemáticos acerca desse tipo de negócio. Em 1693 foi publicado o primeiro trabalho sobre seguros, *An Estimate of Degrees of Mortality of Mankind*, de autoria de Edmond Halley (1656-1742), o mesmo cujo nome batizou o cometa. Antes dele, em 1570, na obra *De proportionibus Libre V*, Cardano fez uma tentativa de estudar matematicamente os seguros de vida, no entanto, não alcançou repercussão. Halley mostrou como determinar a anuidade de um seguro (prêmio) em termos da esperança de vida e da probabilidade de sobrevida. O estudo de seguros atingiu a maturidade, em 1730, com Daniel Bernoulli (1700-1782), que utilizou a abordagem de calcular o número esperado de sobreviventes após "n" anos, dado certo número de nascimentos (conceito de probabilidade condicional). Nesse momento começavam a aparecer grandes empresas de seguros que tinham condições de trabalhar com embasamento científico.

Por outro lado, a abordagem matemática do ***acaso*** e do ***risco*** só teve início há cerca de 500 anos. Uma contribuição decisiva para a criação da Teoria das Probabilidades deu-se por meio da correspondência trocada entre os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), nas quais ambos chegaram à solução correta, por caminhos diferentes, de um problema célebre da divisão das apostas, em 1654. Estas cartas históricas são documentos fundadores da Teoria das Probabilidades, que mais tarde desenvolveu-se através dos trabalhos de Jacques Bernoulli (1654-1705), Moivre (1667-1759) e Thomas Bayes (1702-1761). Bernoulli teve publicado seu livro *Ars Conjectandi*, em 1713, oito anos após sua morte por seu sobrinho Nicola. Nesse livro, que foi o primeiro dedicado inteiramente às probabilidades, é que se encontra a lei dos grandes números, hoje chamado Teorema de Bernoulli, que pode assim ser enunciada: *A frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se nas vizinhanças de um valor quando o número de experimentos cresce indefinidamente.* Vale ressaltar que Jacques foi a primeira pessoa a estudar ligações entre probabilidade e qualidade da informação, ao

levantar a questão de como desenvolver probabilidade a partir de amostras de dados em 1703, base do estudo de probabilidade a posteriori. Segundo Bernstein (1997, p. 118), em missivas trocadas com Leibniz comentava achar estranho este fato poder ser resolvido em termos de jogos de dados, mas não sabermos as chances de um homem de 20 anos sobreviver a um de sesenta, ou ainda, se o grau de uma doença é mais provavelmente fatal que outra – a peste do que a hidropsia ou a hidropsia do que febre – limitações considerada graves relatadas no *Ars Conjectandi*.

Moivre introduziu e demonstrou a lei normal e a Bayes deve-se o cálculo da chamada probabilidade das causas, que consiste em determinar a probabilidade dos acontecimentos perante certas condições iniciais.

Na segunda metade do século XVIII e primeira metade do século XIX a probabilidade adquiriu uma forma concisa e sistemática. Laplace, em 1812, publicou importante obra *Teoria Analítica das Probabilidades*, sistematizando os conhecimentos da época e produzindo a Lei de Laplace. Destaca-se também a participação de Gauss (1777-1855) no aprofundamento da Lei Normal e a de Poisson na sua *Teoria da lei dos grandes números e da lei de repartição*. No século XIX e princípio do século XX a teoria das probabilidades tornou-se um eficaz instrumento, exato e fiável do conhecimento. Surge daí a célebre escola de San Petersburgo, com grandes nomes como Tchébychev (1821-1894), Markov (1856-1922) e Liapounav (1857-1918). À escola de San Petersburgo sucedeu a escola soviética, cujo grande destaque foi Kolmogorov (1903-1987), que axiomatizou corretamente a Teoria das Probabilidades e um dos sucessos da sua abordagem foi dar uma definição rigorosa da expectância condicional.

A teoria das probabilidades começou com um ***jogo***. Fermat e Pascal viabilizaram que o estudo do *acaso* tomasse uma expressão matemática, introduzindo o *Cálculo das Probabilidades*. Hoje a Teoria das Probabilidades transformou-se num dos ramos da matemática com mais aplicações nas outras ciências, exatas, naturais e sociais, inclusive em situações bem mais cotidianas. Por exemplo, deparamo-nos com uma grande quantidade de jogos, como loteria esportiva, sena, entre outras ofertas de variados prêmios ou sorteios, em que as pessoas querem saber quais são suas chances de ganhar antes de apostar ou concorrer, ou ainda, se resolvemos fazer um investimento, poupança, ações ou de outro tipo, desejamos saber a priori como estes se comportam no mercado investidor para decidir qual deles dará melhor retorno financeiro que possa atender às nossas expectativas. Ou ainda, um médico pode se deparar com a incerteza dos efeitos que poderão ser provocados num paciente ao administrar-lhe um novo remédio e terá que deter conhecimentos para uma tomada de decisão, enfim, em diversas ocasiões da vida cotidiana nos deparamos com situações em que temos de tomar uma decisão, sem a certeza do que poderá ocorrer exatamente.

Entretanto, como é de se esperar em todo processo de construção do conhecimento, muitas concepções equivocadas ocorreram e até hoje aparecem, motivando larga escala de pesquisas, tanto entre os cientistas das áreas afetas, como entre pesquisadores envolvidos com o ensino desse tipo de conhecimento. O fato é que alguns equívocos (*misconceptions*) e falácias se refletem até os dias de hoje no campo da probabilidade.

Sobre as noções relacionadas à probabilidade

Desde a antiguidade, filósofos, físicos e matemáticos dedicam-se à tarefa de compreender e dar um sentido ao que chamamos de “evento aleatório” e “probabilidade”. Entretanto, nessa tarefa as divergências cuidaram de dividir os estudiosos em diferentes correntes de pensamento acerca do conceito de probabilidade, entre as quais três se destacam: o “frequentismo”,

defendido por aqueles que entendem probabilidade como “intensidade de ocorrência”; o “subjetivismo”, defendido pelos que entendem probabilidade como “grau individual de convencimento em uma ocorrência”, expresso por sua disposição em “agir” de alguma forma específica; e o “logicismo”, defendido pelos que entendem probabilidade como “noção lógica relacional” a ser valorada relativamente a um corpo de “evidência”.

Kasner e Newman (1976) ao falar sobre acaso e probabilidade, fazem referência a Sherlock Holmes, detetive de histórias de ficção, como uma caricatura do raciocínio por dedução provável. Esse método de raciocínio, embora se assemelhe ao procedimento formal do silogismo, é menos rígido sem se enquadrar em normas exatas, por isso mais apropriado para o raciocínio diário. Na Matemática, certas suposições fundamentais são feitas e delas são deduzidas as conclusões, segundo o raciocínio lógico formal, garantindo assim validade ao nosso pensamento. Entretanto, nem todos os pensamentos são matemáticos, grande parte das crenças não é certa, apenas provável. Mas dizer que um acontecimento é determinado pelo acaso é declarar que não se sabe como ele é determinado. Mesmo assim, no “reino do acaso”, percebe-se certa regularidade, certa “ordem dentro da desordem” e acerca de acontecimentos atribuídos ao acaso formamos uma gradação de crença racional.

Embora a maioria dos nossos julgamentos seja baseada na probabilidade e não na certeza, raramente dedicamos um pensamento cuidadoso à “mecânica” desse modo de raciocínio. Em geral, os julgamentos na tomada de decisão são feitas por dedução provável, nos negócios, na mesa de jogos, em um processo de júri, até mesmo em experimentos. Costumamos dizer em dias quentes e nebulosos que provavelmente choverá. Um meteorologista pode precisar de maiores evidências, mas não o cidadão comum. Costuma-se raciocinar assim, no senso comum, em assuntos que vão do mais trivial ao mais importante, com o uso frequente das palavras “provável” e “probabilidade”, sem precisar seu significado. De fato, segundo Bennett (2003), se a incerteza em um processo aleatório é fruto da nossa ignorância a respeito das forças que determinam o seu desfecho ou da existência de mecanismos inacessíveis inerentes aos recursos e condições que o circunscrevem e que determinam o seu desfecho, estas são questões que estão no centro da discussão filosófica envolvendo as noções de aleatoriedade e chance e que continuam em debate até os dias de hoje.

Para Kasner e Newman (1976, p. 219), o ponto de vista subjetivo da probabilidade, não tão em moda nos dias de hoje, manteve por certo tempo, notadamente no século XIX, uma posição respeitável. Um dos primeiros adeptos foi Augustus De Morgan, conceituado lógico matemático, que se referia à probabilidade como um “estado de espírito e ao grau de certeza ou incerteza que caracteriza nossas crenças”. Não é um ponto de vista totalmente errôneo, mas traz dificuldades como fundamento para o cálculo de probabilidades. Na lógica matemática uma proposição ou é falsa ou é verdadeira, mas nossos conhecimentos, na maioria das vezes limitados, nos impedem de estarmos racionalmente certos, quer seja da verdade ou da falsidade. Esses autores reforçam que não há como medir a intensidade de uma crença, havendo ainda grande variação entre as crenças das pessoas acerca de um mesmo conjunto de fatos. Uma das dificuldades do ponto de vista subjetivo da probabilidade resulta do *princípio da razão insuficiente* – tido como base lógica em que repousa o cálculo da probabilidade subjetiva – e estabelece que “se ignoramos completamente as diferentes maneiras pelas quais um acontecimento pode ocorrer e, por isso, não temos base razoável para preferência, consideraremos como ocorrendo de um modo ou de outro”. Este princípio, de acordo com Kasner e Newman (1976, p. 221), foi apresentado primeiramente por Jacob Bernoulli e, à época, analisado exaustivamente pelos matemáticos.

Entretanto, este princípio contém parte da verdade, notadamente o critério de negação – não se pode dizer que dois acontecimentos são igualmente prováveis se há razões de preferência por um ou outro – e, portanto, qualquer cálculo de probabilidades consistente depende dele de alguma forma.

Em relação à probabilidade subjetiva, Kahneman e Tversky (1972) afirmam que as pessoas julgam a probabilidade de eventos com base na heurística da representatividade ao invés da probabilidade real. Representatividade, embora um pouco difícil de definir, reflete dois aspectos – as características da população e do processo que a gerou. Por exemplo, no caso do nascimento de seis filhos, a sequência de nascimento, em ordem do sexo, ser dada por MFMMMM é julgada menos provável do que FMFMMF (porque a primeira não reflete a proporção de meninos na população), ou também MMMFFF contra FMMFMF (porque a primeira não reflete a aleatoriedade da determinação do sexo). As pessoas também costumam ignorar o efeito do tamanho da amostra sobre a probabilidade de um evento, resultando desse raciocínio por representatividade que o tamanho da amostra não afeta o resultado, o que nem sempre é verdade.

Já a *frequência relativa* ou *interpretação estatística* (que se aproxima da visão Aristotélica) é uma teoria considerada bastante viável e aceita mais amplamente ao evitar muitas destas dificuldades. Em grande parte esse ponto de vista é o responsável pela ampliação do uso das probabilidades no campo da Física, Astronomia, Biologia, Ciências Sociais e no mundo dos negócios. Para Kasner & Newmon (1976, p. 222): “Probabilidade é considerada como a frequência relativa em que um acontecimento ocorre em certa classe de acontecimentos”. Dessa forma, a frequência relativa da classe de acontecimentos na classe maior de tentativas representa a probabilidade de o evento ocorrer. “Avançamos, então, para uma predição geral em um grande número de situações particulares e supomos que o futuro será consistente em relação ao passado”.

Apesar do sucesso do método estatístico, ele sofre objeções. Algumas dificuldades podem ser facilmente sobrepujadas, outras não. Vale lembrar que o conceito de probabilidade obteve uma interpretação em termos de frequência relativa originalmente pensada para descrever certos jogos de azar onde as jogadas podem ser repetidas um grande número de vezes e onde é razoável assumir que os eventos elementares de interesse são igualmente prováveis. Similarmente, existem situações em que se obtêm muitas observações sob as mesmas condições, o que permite dar uma interpretação frequentista à probabilidade. Uma das limitações é o conceito de limite – embora matemáticamente defensável e usado por físicos e estatísticos – uma vez que os fenômenos estudados, por mais complexos que sejam, costumam ser finitos e limitados. Por outro lado, existem muitos eventos que podem ser pensados em um sentido probabilístico, mas que não podem ter uma probabilidade em termos de uma interpretação frequentista. Nesse caso, tal afirmação de probabilidade descreve o grau de convicção do observador sobre uma situação que ocorrerá uma única vez, não sendo possível observar ensaios repetidos nessa situação de incerteza. Entretanto, não é preciso que um experimento seja não-repetitivo para aplicar a interpretação subjetivista de probabilidade, a interpretação subjetivista de probabilidade faz sentido se o experimento for repetível ou não. A justificativa de frequências em séries de repetições está baseada em certas suposições: uma delas é que os ensaios desta série de repetições são independentes; outra é que os ensaios são realizados sob idênticas condições. Apesar disso, em última instância, a decisão de razoabilidade destas suposições é uma decisão subjetiva, portanto, existe uma parcela de subjetividade na interpretação frequentista de probabilidade.

Tudo o que se disse até agora conduz sem dúvida a um fato: nenhuma proposição contém qualquer verdade provável exceto em relação a outro conhecimento. Dizer que uma proposição é provável, quando o conhecimento em que se baseia é obscuro ou inexistente, é absurdo. É preciso esclarecer que, muitas vezes, fazemos declarações sobre probabilidade sem menção clara sobre qual ramo do conhecimento a que nos estamos referindo. Dificuldades filosóficas foram prevalentes na probabilidade desde a sua criação, a probabilidade não é uma propriedade inerente de um evento, mas baseada no modelo subjacente escolhido. Conceitos probabilísticos estão mais perto de uma forma (consistente) de pensar sobre o mundo ao invés de descrever o mundo de uma forma consistente, o que pode parecer paradoxal, e só resolvido através de uma análise cuidadosa.

Sobre ideias que desafiam a racionalidade

Segundo Taleb (2011, p. 15), antes da descoberta da Austrália, as pessoas do Antigo Mundo estavam convencidas de que todos os cisnes eram brancos, pois ninguém nunca tinha visto um cisne negro. Esta era uma crença inquestionável por ser absolutamente confirmada por evidências empíricas, no entanto, não é porque não eram conhecidos, que os cisnes negros não existiam – o que remete ao clássico problema formulado pelo Popper: um único caso falsifica uma tese. Taleb usa a metáfora para se referir a eventos raros, improváveis ou de difícil previsão, mas que causam grande impacto (cita, por exemplo, o ataque às Torres Gêmeas do World Trade Center, de 11 de setembros de 2001). De acordo com o livro, não somos preparados para lidar com esses eventos e diante da complexidade e incerteza crescentes, sua opinião é de que serão cada vez mais frequentes (e influentes) do que o senso comum imagina. Este autor, árduo defensor do impacto do altamente improvável, critica com certa avidez os defensores do comportamento gaussiniano para eventos probabilísticos em que predominam fenômenos aleatórios e de análise de incertezas, por exemplo, no comportamento do mercado financeiro e de bolsas de valores, em fenômenos de cataclismos que provocam grandes tragédias ambientais, entre outros. Para este autor, esses fenômenos são considerados *outliers* nas análises estatísticas, isto é, com grandes desvios da curva normal gaussiana

No livro Outliers, Gladwell (2008) elabora uma extensa pesquisa destinada a comprovar que são inúmeras as variáveis que levam uma pessoa ao topo. A princípio podemos pensar que pessoas de sucesso, como celebridades, cientistas ilustres, prodígios da matemática, músicos e atletas bem sucedidos, não se enquadram na experiência dos comuns mortais. Mas isto não é verdade: eles são produto da história, da comunidade, das oportunidades e dos legados. Os indivíduos fora de série – como Mozart, Bill Gates ou os britânicos da banda The Beatles – além de terem praticado suas habilidades por uma quantidade de tempo extraordinária, se beneficiaram de oportunidades disponíveis, vantagens ocultas ou heranças culturais. Além de estudar as pessoas em si, é preciso focar a análise em questões como o meio e a época em que viveram, quem foram seus amigos, dentre outros fatores, pois tudo isso exerce influência nas realizações humanas. No fim das contas, os *outliers* não estão tão à margem assim.

Dan Ariely, americano de origem israelita e professor de psicologia, tornou-se uma das maiores referências no que hoje se chama Economia Comportamental. É autor do livro *Previsivelmente Irracional: Aprenda a Tomar Melhores Decisões*, publicado em 2008, em que desmonta alguns preconceitos em relação à tomada de decisões baseadas em critérios puramente racionais. Ariely indica que seu objetivo é ajudar a pensar profundamente sobre o que move as pessoas em situações de tomada de decisão, trazendo um leque de experiências científicas,

descobertas e até situações divertidas, visando levar as pessoas a reparar que certos erros que cometemos são sistemáticos, portanto, se percebidos podem ser evitados.

Na análise do papel do risco na sociedade, Bernstein (1997) argumenta que a concepção do controle do risco constitui uma das ideias centrais que distinguem os tempos modernos do passado mais remoto. Em seu livro *Desafio aos deuses* comenta que a vastidão do tema é imensa e o risco afeta aspectos profundos da psicologia, matemática, estatística e história; relata a notável aventura intelectual que libertou a humanidade dos oráculos e adivinhos, mediante as ferramentas poderosas da administração do risco disponíveis nos dias de hoje. O autor esclarece os conceitos de probabilidade, amostragem, teoria dos jogos e tomada de decisões racional versus irracional. As seções finais do livro levantam questões importantes sobre o papel do computador, a relação entre fatos e crenças subjetivas, o impacto da teoria do caos, o papel dos mercados de derivativos em franco desenvolvimento e a total predominância dos números. Quando corremos um risco, apostamos em um resultado que será consequência de uma decisão que tomamos, embora não saibamos ao certo qual será o resultado. Enfatiza que o problema está nas consequências de nossas decisões e não nas próprias decisões, a decisão é apenas o início.

Alguns equívocos recorrentes relativos ao raciocínio probabilístico

Vamos pensar em uma questão aparentemente simples: qual resultado é mais provável no lançamento simultâneo de duas moedas: duas caras, duas coroas ou uma de cada? Para esta pergunta, algumas pessoas poderiam pensar (equivocadamente) que os três resultados são equiprováveis, cada um com probabilidade de 1/3. É comum deixarem de considerar que sair faces distintas nesse tipo de lançamento de moedas tem probabilidade dobrada do que faces iguais, pois o espaço amostral, indicando C para cara e K para coroa, é dado por $\{(C,C),(C,K),(K,C),(K,K)\}$. Podem-se fazer diversas variações desse tipo de questão, como, por exemplo, qual a probabilidade de sair apenas uma face cara em dois lançamentos consecutivos da moeda, cujo resultado é o mesmo. Entretanto, mesmo o conceituado matemático do século XVIII, Jean Le Rond D'Alembert, à época um dos mais influentes cientistas franceses, sustentou que a probabilidade de se conseguir uma cara em dois lançamentos consecutivos era de 2/3, por entender que haveria apenas três casos possíveis equiprováveis, ou seja, C, KC e KK. Na verdade, ao pensar num primeiro lançamento sendo cara, nem cogitou o segundo lançamento neste caso, por já ter obtido o resultado esperado. Vários autores relatam este 'erro' de D'Alembert, em especial Todhunter (1865, pp. 258-259, 263), comentando ainda que a questão consta do artigo *Croix ou Pile*, de autoria de D'Alembert, publicado pela primeira vez em 1754 na *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Science, des arts et des métiers*. De acordo com Bennett (2003, pp. 74-75) muitas pessoas por meio de um raciocínio errado ainda chegam à resposta correta, uma vez que na opinião delas um resultado com as faces diferentes das moedas voltadas para cima reflete com mais precisão o comportamento das moedas em longo prazo. Tversky e Kahneman (1971) rotulam este equívoco de "crença na lei dos pequenos números" e afirmam que essa crença surge da confiança exagerada na estabilidade de resultados observados em pequenas amostragens.

Dentre as histórias relatadas por Bernstein situa-se a que trata de Thomas Bayes, nascido em Londres, em 1791, pastor presbiteriano, inconformista, que deixou um legado importante para a matemática, em apenas dois trabalhos, só publicados postumamente. Um desses trabalhos, *Essay towards solving a problem in the doutrine of chances*, foi uma obra que o imortalizou entre os estatísticos, economistas e cientistas sociais. O artigo estabeleceu a base do moderno método de inferência estatística, questão anteriormente levantada por Jacob Bernoulli. Quando

morreu em 1761, em testamento, Bayer legou o manuscrito desse ensaio para Richard Price, que além de pastor e defensor da liberdade, foi também um matemático e apenas a liberdade de contrair empréstimos o incomodava. Após estudar os trabalhos de Harley e Moivre, entre outros, publicou no *Philosophical Transations of the Royal Society of London* dois artigos sobre este assunto relacionando tabelas de mortalidade com prêmios de seguros de vida e anuidades. Atualmente esses dois clérigos são conhecidos pelo Teorema de Bayes e pela Tabela Price.

Dentre esses dois legados, o Teorema de Bayes é particularmente importante para o estudo de probabilidade. Após a publicação do artigo de Bayes, em 1764, no *Philosophical Transactions*, o trabalho caiu no esquecimento, sendo resgatado mais tarde pelo matemático francês Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), que o revelou ao mundo. Os fundamentos da teoria de probabilidade foram então colocados por Laplace em uma forma (hoje dita clássica) que se manteve praticamente inalterada até o início do século 20. Nesse tratado Laplace fez novas contribuições e reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus predecessores. Uma das contribuições é quando define a probabilidade a priori (que originou grandes controvérsias) para o cálculo da chamada probabilidade inversa (ou probabilidade de causas ou a posteriori), conceito este sugerido pelo trabalho de Bayes em 1764. A solução de Bayes para um problema de "probabilidade inversa" foi apresentada naquele seu ensaio, com a declaração de um caso especial do teorema de Bayes. Vale recordar que, nas primeiras décadas do século XVIII, foram resolvidos muitos problemas, relativos à probabilidade de certos eventos, dadas as condições especificadas, a chamada *probabilidade condicional*. Por exemplo, dado um determinado número de bolas brancas e pretas em uma urna, quando se quer saber qual é a probabilidade de se tirar uma bola preta, é o tipo de questão que se enquadra nos chamados problemas de probabilidade a posteriori. Mas a atenção logo se voltou para o inverso deste tipo de problema: uma vez que já se retirou uma ou mais bolas da urna, o que pode ser dito sobre o número de bolas brancas e pretas na urna? O Ensaio de Bayes contém a solução para um problema similar, de Abraham de Moivre, autor da Doutrina das Chances, de 1718.

Vamos nos concentrar na forma elementar de inferência bayesiana, que consiste em inferir um ponto único - uma estimativa de probabilidade (probabilidade a posteriori) ou uma frequência – de duas hipóteses mutuamente exclusivas e complementares, com base na observação de uma delas. Segundo Gigerenzer e Hoffrage (1995, p. 687) esta tarefa elementar tem sido alvo de quase todos os estudos experimentais sobre inferência bayesiana nos últimos 25 anos. O seguinte "problema da mamografia" é um exemplo adaptado do artigo em questão*: "A probabilidade de câncer de mama é de 1% para uma mulher de quarenta anos de idade que participa de exames de rotina. Sabe-se que a mamografia apresenta resultado positivo em 80% das mulheres com câncer de mama, mas esse mesmo resultado ocorre também com 9,6% das mulheres sem o câncer. Uma paciente nessa faixa etária tinha uma mamografia positiva em um exame de rotina. Qual é a probabilidade dessa paciente realmente ter um câncer de mama?"*

Montando o problema de maneira bayesiana temos como probabilidade *a priori* – ter câncer (CA) ou não câncer (NCA). Como, em média, 1% das mulheres por volta dos 40 anos tem tumor de mama, a probabilidade *a priori* desta paciente é de 0,01 e de não ter é de 0,99. Incorporando o resultado da mamografía temos: se o câncer estiver presente, a probabilidade condicional de a mamografia dar resultado positivo é de 0,80 (80%) e, de não estar presente, é de 0,096 (9,6%). Multiplicando a probabilidade a priori pela condicional, obtemos as probabilidades conjuntas:

$0{,}01 \times 0{,}8 = 0{,}008$ P (CA $\cap +$) e $0{,}99 \times 0{,}096 \cong 0{,}095$ P (NCA $\cap +$)

Tabela 1
Probabilidade conjunta

	CA∩+	NCA∩+
Probabilidade a priori	0,01	0,99
Probabilidade condicional	0,8	0,096
Probabilidade conjunta	**0,008**	**0,095**

Fonte: elaborada pela pesquisadora

Observemos que a soma das probabilidades a priori é 1, mas o mesmo não ocorre com a probabilidade conjunta. Para fazer esta soma dar 1, precisamos normalizar, isto é, dividir cada probabilidade conjunta pela soma das duas probabilidade conjuntas. Assim, como 0,008+0,095=0,103 teremos: 0,008/0,103≅ 0,0776 (CA) e 0,095/0,103 ≅ 0,922 (NCA)

Tabela 2
Probabilidade a posteriori

	CA	NCA
Probabilidade a priori	0,01	0,99
Probabilidade condicional	0,8	0,096
Probabilidade conjunta	0,008	0,095
Probabilidade a posteriori	**0,0776**	**0,922**

Fonte: elaborada pela pesquisadora

Vemos, portanto, que usando o raciocínio bayesiano podemos concluir que a chance de a paciente não ter câncer de mama é de 92,2%, contra 7,76 % de ter. Podemos resolver o mesmo problema usando diretamente o Teorema de Bayes, sabendo que queremos encontrar a probabilidade a *posteriori* p (câncer |positivo). Usando os símbolos H e $-H$ para as para as duas hipóteses complementares (ter e não ter câncer) e D para o diagnóstico positivo da mamografia, teremos:

$$p(H|D) = \frac{p(H).p(D|H)}{p(H).p(D|H)+p(-H).p(D|-H)} \cong \frac{(0,01).(0,8)}{(0,1).(0,8)+(0,99).(0,96)} \cong 0,078$$

Vale ressaltar que situações semelhantes aplicadas a especialistas, de diversas áreas, da saúde às finanças, revelam equívocos de análises, com tendências em superestimar a probabilidade a posteriori ou mesmo ignorar a probabilidade a priori, fenômeno denominado por Kahneman de 'falácia da probabilidade de base' (*a priori*). É bom lembrar, como alerta Diáz e Fuentes (2005), bem como Batanero, Contrera e Díaz (2012), que a probabilidade condicional é fundamental em aplicações de estatísticas, porque permite incorporar mudanças em nosso grau de crença sobre eventos aleatórios à medida que adquirimos novas informações. Portanto, a compreensão e raciocínio corretos sobre a mesma são requisitos necessários para o estudo da inferência estatística, tanto clássica como bayesiana. No campo profissional e até mesmo na vida cotidiana, tomar boas decisões em situações de incerteza é em grande parte baseada no raciocínio condicional. As autoras ainda reforçam que investigações recentes em ensino da probabilidade mostram a existência de intuições incorretas, equívocos de raciocínio e erros de compreensão e aplicação do conceito de probabilidade condicional, alguns deles já bastante difundidos e que o ensino formal de probabilidade é insuficiente para superá-los. É necessário tomar consciência destas dificuldades para lidar com os problemas condicionais com ferramentas adequadas.

Falk (1986) também comenta que muitos estudantes não discriminam adequadamente entre os dois sentidos da probabilidade condicional P (A | B) e P (B | A) e esse erro é denominado de ‘falácia da condicional transposta’. Aparece com freqüência em contextos médicos, onde se confunde a probabilidade de ter uma doença, quando o teste teve um diagnóstico positivo, com a probabilidade de um resultado positivo do teste diagnóstico, uma vez que se têm a doença. A prevalência desse erro pode ter consequências importantes, por exemplo, a confusão entre a probabilidade de uma criança afetada com a Síndrome de Down ter o resultado de amniocentese pré-natal positivo, que tem alta probabilidade, e o fato de que, uma vez que o teste foi positivo, realmente a criança ter a síndrome de Down, que é muito menor. No artigo Falk relata que um problema deste tipo foi apresentado aos alunos para avaliar a presença deste viés, sendo que pouco mais de 40% dos futuros professores e cerca de um terço dos alunos de Psicologia deram a resposta correta. Os resultados foram um pouco melhores no estudo de caso realizado por Pollatsek, Well, Konold e Hardman (1987), entretanto afirmam suspeitar de que o grande erro é uma confusão entre P(A| B) e P (A ∩ B). O erro mais comum foi calcular a probabilidade conjunta em vez da probabilidade condicional solicitada. Em certo sentido, estes resultados são complementares ao "efeito conjunção" discutido por Tversky e Kahneman, sendo mais freqüente em ambos os grupos considerar a mesma confiança em ambas as previsões, que Pollatsek *et al*. indicam como falácia da condicional transposta.

Considerando que mesmo profissionais experientes podem errar na interpretação de dados estatísticos e probabilísticos, não surpreende o fato da probabilidade estar em conflito com opiniões intuitivas de pacientes, pessoas leigas e até alunos. Experiências adquiridas ao longo da vida solidificam intuições a respeito de probabilidades, corretas ou equivocadas. Além disso, algumas ideias intuitivas a respeito da probabilidade parecem preceder as ideias formais e, se corretas são um auxílio à aprendizagem, mas se incorretas, podem prejudicar a compreensão dos conceitos probabilísticos. Não surpreende que, ao longo da história, a conquista de um entendimento de probabilidade tenha sido extremamente gradual, espelhando a forma como o entendimento da aleatoriedade e da probabilidade se desenvolve em um indivíduo.

Essa visão é o que se pretendeu dar neste extrato da tese, mesmo que parcial frente ao volume de ideias e informações, mas procurando transcender à descrição apenas histórica da evolução do pensamento probabilístico para mostrar também sua influência em várias áreas do saber, bem como os percalços, equívocos, ou mesmo divergências, que ocorreram ao longo da construção desse conhecimento, notadamente aqueles que se referem mais especificamente ao teor da pesquisa.

Considerações finais

A história da evolução das ideias estocásticas evidenciam os percalços, dificuldades e equívocos por quais passaram as figuras chave e outros pensadores na construção da Teoria da Probabilidade. Como exemplo, podemos citar as interpretações místicas atribuídas ao acaso e à incerteza, o ‘erro de D’Alembert’, o ‘erro de Bernoulli’, os percalços no desenvolvimento do raciocínio bayesiano, entre outras. Com certeza, a pesquisa histórico-epistemológica do desenvolvimento do raciocínio e dos conceitos probabilísticos muito contribuiu para ampliar o olhar para as dificuldades inerentes à aprendizagem destes conceitos por parte de alunos, em qualquer nível de escolaridade, e mesmo em cursos de formação de professores. Nesse sentido, considero essencial esse tipo de conhecimento por parte do professor para que possa se preparar e planejar sua prática em sala de aula de forma a minimizar erros conceituais ou raciocínios equivocados, favorecendo a aprendizagem e contribuindo com a melhoria da educação.

Meus pressupostos acerca tanto da construção do pensamento estocástico ser mais complexo do que costuma ser apresentado nos cursos de formação e nos livros didáticos, como da necessidade de uma ruptura com o pensamento determinístico e linear, que se perpetua em nossos currículos, ficaram confirmados nos estudos realizados na pesquisa. Nessa direção, podemos destacar, de uma maneira geral, que ficaram evidenciadas algumas crenças e concepções consolidadas nos processos de formação dos professores-cursistas, sujeitos da pesquisa. A análise dos dados levantados na pesquisa (Junqueira, 2014), relativa aos conteúdos específicos, evidenciaram, em menor ou maior grau, dificuldades na compreensão de processos aleatórios, notadamente em experimentos frequentistas, na distinção entre os conceitos de eventos mutuamente exclusivos e de eventos independentes, na compreensão do conceito de probabilidade condicional. Evidenciaram também a presença de falácias (do jogador e da representatividade), que representam equívocos no modo de pensar em situações de acaso, incerteza e aleatoriedade. Essas evidências demonstram concepções dos cursistas em relação ao conteúdo de probabilidade, no que tange aos conceitos básicos, e revelam, sobretudo, a dificuldade no desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Entretanto, esses resultados só confirmam o que vêm apontando muitas pesquisas similares na área de Educação Estatística, referenciadas na análise e na revisão de literatura, como por exemplo, Falk (1986), Lopes (1998), Díaz e La Fuente (2005), Ben-Zvi e Garfield (2005), Batanero, Contreras e Díaz (2012), Azcarate e Cardenoso (2011), Santana (2011), entre outros.

Sobre ideias que desafiam a racionalidade, dificultando o desenvolvimento do pensamento e raciocínio probabilísticos, pudemos confirmar na pesquisa a presença de equívocos, que encontramos registradas nas obras de Kahneman e Tversky (1982, 2012), Stigler (1986), Bernstein (1997), Taleb (2011), entre outros. Dentre as dificuldades de ordem histórico-epistemológicas, pudemos constatar na pesquisa a presença de duas falácias (do jogador e da representatividade) e a dificuldade em perceber o pensamento equivocado de D'Alembert na atividade que reproduzia a situação sobre o 'erro de D'Alembert'.

Bibliografia e referências

Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 12*(2). Marzo/Agosto, 1-13.

Bennett, D. J. (2002). *Aleatoriedade.* São Paulo: Martins Fontes.

Bernstein, P. L. (1997). *O Desafio dos deuses: a fascinante história do risco* (23ª ed.) Rio de Janeiro: Elsevier.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

Díaz, C., & La Fuente, E. I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon, 59,* 245-260.

Eves, H. (1997). *Introdução à História da Matemática* (2ª ed.). Campinas: Editora da Unicamp.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In R. Davidson, & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Franklin, J. (2001). *The science of conjecture: evidence and probability before Pascal.* Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychological Review, 102*(4), 684-704.

Gladwell, M. (2008). *Fora de série: outliers.* Rio de Janeiro: Sextante.

Hacking, I. (2006). *The emergence of probability* (2ª ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Junqueira, A. L. N. (2014). *Probabilidade na educação básica: um estudo sobre concepções de professores de matemática* (Tese de doutorado). Universidade Anhanguera, São Paulo, SP.

Kahneman, D. (2012). *Rápido e Devagar: duas formas de pensar.* Rio de Janeiro: Objetiva.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: a judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*, 430-454.

Kasner, E. & Newman, J. (1976). *Matemática e imaginação: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos* (2ª ed.). Rio de Janeiro: Zahar.

Mlodinow, L. (2009). *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas*. Rio de Janeiro: Zahar.

Pollatsek, A., Well, A. D, Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes, 40*, 255-269.

Ribeiro, A. A. (2006). *A filosofia da linguagem em Platão* (Dissertação de mestrado). Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil.

Sheynin, O.B. (1974). On the prehistory of the Theory of Probabilities. *Archive for History of Exact Sciences, 12*(2), 97-141

Silva, J. G. C. (2004). *Introdução à Probabilidade. Notas de aula.* Pelotas: Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. 838 p.

Stigler, S. M. (1998). *The History of Statistics: the measurement of uncertainty before 1900* (7ª ed.). Cambrige: Harvard University Press.

Taleb, N. N. (2011). *A lógica do Cisne Negro: o impacto do altamente improvável* (5ª ed.). Rio de Janeiro: Best Seller.

Tversky, A, & Kahneman, D. (1971). The belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin, 2*, 105-110.

Todhunter, I. (1865). *A history of the mathematical theory of probability: from the time of Pascal to that of Laplace.* Cambridge: Macmillan.