El conocimiento especializado del profesor de matemática frente a problemas abiertos

Jeannette **Galleguillos** Bustamante
Universidad de Valparaíso
Chile
jeannette.galleguillos@gmail.com
C. Miguel **Ribeiro**
Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações, Universidade do Algarve
Portugal
Norweegian University of Science and Techonology – NTNU
Noruega
cmribeiro@ualg.pt
Miguel **Montes** Navarro
Universidad de Huelva
España
miguelmontesnavarro@gmail.com

Resumen

En este trabajo se reporta un estudio sobre el conocimiento matemático especializado del profesor en una situación de clase en la que se explora un problema abierto. El problema escogido se encuentra en al ámbito de la investigación matemática y la modelación. La investigación se abordó cualitativamente como un estudio de caso, siendo los informantes profesores de matemática que frecuentaban un curso de posgrado. El análisis de los datos se realizó enfocándose en el conocimiento específico del profesor, observando características respecto a ese conocimiento. Los resultados preliminares indican la existencia de características del conocimiento "ideal" del profesor, que permitirían auxiliar a los estudiantes en procesos de investigación matemática, lo que ayudaría a que los profesores comprendieran qué y por qué sus estudiantes hacen ciertos procesos de desarrollo en determinados momentos.

Palabras clave: conocimiento matemático especializado del profesor, formación de profesores, investigación matemática, problemas abiertos.

Introducción

El conocimiento del profesor de matemáticas puede ser considerado bajo una multipicidad de perspectivas y conceptualizaciones. Una de esas conceptualizaciones se refiere al *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* – MTSK (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013). Lo consideramos como aquel conocimiento especializado "ideal" que requiere un profesor de matemática para la gestión del proceso de enseñanza teniendo como objetivo, entre otros, que sus alumnos entiendan los porqués de las cosas. Este conocimiento especializado del profesor, le permitiría, entre otros, proponer situaciones o problemas de investigación, y comprender qué hacen sus estudiantes en determinados momentos de la resolución y por qué, así como también, perspectivar posibles conexiones entre distintos tópicos y en un mismo tópico.

Por otro lado, según Ponte, Brocardo y Oliveira (2003), una investigación matemática ocurre en torno a uno o más problemas. Un problema, a diferencia de un ejercicio, es una situación 'más abierta', en que no se dispone de un método claro para su pronta resolución y que puede ser resuelta abordando diferentes caminos (Ponte et al., 2003). Así, los procesos que envuelven investigaciones matemáticas, suman un ambiente de *complejidad* (Morin, 1990). Un ambiente complejo es aquel en que ocurre un alto número de interacciones y de interferencias, en el cual puede estar presente la incertidumbre y múltiples posibilidades de imprevistos (Morin, 1990). Ese ambiente complejo puede incomodar tanto al alumno como al profesor, quien guia y orienta en los procesos de resolución, pues el profesor puede sentir que está saliendo de su *zona de comodidad* y está entrando en una *zona de riesgo* (Borba & Penteado, 2001). Sin embargo, ese es un ambiente muy propicio para que los alumnos desarrollen capacidades de orden superior, de construcción de conocimiento, como la capacidad de resolución de problemas a partir de la realidad. La capacidad de nivel superior se entiende como una capacidad de mirar más adelante y con una perspectiva de construir y desarrollar un conjunto de habilidades y conocimientos que le permitan percibir las distintas redes de conceptos matemáticos, para maximizar así sus conexiones.

Las situaciones de investigación se encuentran, necesariamente, relacionadas con la resolución de problemas –uno de los aspectos centrales en los currículos de muchos paises (e.g., NCTM, 2000; Brasil, [Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 1998]; Portugal [Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 2013]; Chile [MINEDUC, 2013]), correspondiendo así a uno de los aspectos centrales en el conocimiento del profesor – formular y enunciar problemas ricos que permitan que los alumnos hagan, entre otras cosas, preguntas de estilo ¿por qué? (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Ribeiro, Amaral, Pinto, & Flores, 2014). En particular, los problemas abiertos son aquellos en que los profesores pueden enfrentar con más facilidad situaciones de improvisación (Ribeiro, Monteiro, & Carrillo, 2009), que implican momentos de contingencia (Rowland, Huckstep, & Thwaites, 2005). Estos problemas corresponden a situaciones en que el alumno necesita diseñar diversas formas de solución, pudiendo resolverlas a través de diferentes mecanismos. Los mecanismos utilizados por los alumnos pueden ser muy distintos a los del profesor, lo que puede condicionar o limitar el *feedback* que el profesor va a proporcionar a los alumnos, y luego, puede también condicionar el desarrollo del conocimiento matemático del propio profesor (Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014).

Considerando estas dos perspectivas – del conocimiento especializado del profesor y del desarrollo de problemas de investigación matemática – como aspectos centrales en el proceso de enseñanza, es así esencial poner el foco en una práctica (el análisis de problemas) que permita obtener una comprensión y visión más amplia y profunda sobre los aspectos involucrados para mejorar y establecer relaciones entre estas dos perspectivas. Esta importancia se asienta también en el hecho de que, el profesor y especialmente su conocimiento, es el factor que más influencia los aprendizajes y resultados de los alumnos (e.g., Nye, Konstantopoulos & Hedges, 2004). En este trabajo, parte de un proyecto más amplio, centramos nuestra atención en una situación de clase en que profesores que frecuentan un curso de posgrado se encuentran frente a problemas abiertos. Acá, a partir de un estudio exploratorio, nos enfocamos en obtener una comprensión más amplia sobre el conocimiento especializado (tipo, forma y contenido) que ponen en juego un conjunto de profesores de matemática en procesos de resolución de un problema abierto, en que su resolución puede estar involucrada en el diseño de diversos modelos y sus correspondientes contenidos matemáticos asociados.

Marco referencial

Los trabajos de Shulman (e.g., Shulman,1986) se configuran como un marco esencial para obtener formas de comprender al profesor y la importancia de su conocimiento para la prática. En particular, ponemos el foco en el conocimiento del contenido y en el conocimiento didáctico del contenido como siendo algo esencial, pero distinto. A partir de sus trabajos, en los ultimos años han emergido varias conceptualizaciones del conocimiento del profesor, siendo una de ellas la que se refiere al *Mathematics Teachers Specialised Knowledge* (MTSK). Esta conceptualización emerge en un intento de refinar la conceptualización del *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball et al., 2008) pretendiendo solventar algunas de las problemáticas que surgen al usar éste como herramienta de análisis del conocimiento del profesor. El modelo MTSK (Figura 1) conserva la dicotomía propuesta por Shulman (1986) entre conocimiento de la materia (SMK), concretado en este caso en conocimiento matemático (MK), y conocimiento didáctico del contenido (PCK).

Por el contexto y objetivo del trabajo que se presenta acá discutimos solamente los subdominios al respecto del MK.[1] En cuanto al conocimiento matemático, se proponen tres subdominios, que pretenden abarcar las diferentes naturalezas que este conocimiento puede adoptar en el razonamiento de un profesor: *Conocimiento de los Temas* (KoT); *Conocimiento de la Estructura Matemática* (KSM); *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM). El KoT engloba el conocimiento de los conceptos, procedimientos, propiedades de los conceptos y los fundamentos de éstas, ejemplos, o fenómenos ligados al concepto en cuestión. Es un subdominio que abarca tanto la matemática que han de conocer los alumnos, como los fundamentos que requiere el profesor para comprender de manera más profunda (Ma, 1999) la matemática abordada en el aula. El KSM abarca las reflexiones establecidas por un profesor en pos de comprender los conceptos matemáticos integrados en una red de relaciones y conexiones. En este subdominio tienen especial relevancia dos elementos, las conexiones (Gamboa & Figueiras, 2014), y los conceptos matemáticos transversales a la matemática escolar, como el infinito, que condicionan la cognición de multitud de conceptos. Cuanto al KPM, se refiere al “saber hacer” en matemáticas, es decir, conocer las reglas de argumentación en matemáticas, distintas formas de demostrar, heurísticos en resolución de problemas, o las propiedades que ha de poseer una definición. En el centro del modelo podemos encontrar las *creencias (Beliefs)*, tanto acerca de las matemáticas, como de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que permean el

[1] Para una explicación más completa de todos los subdominios de esta conceptualización consultar, por ejemplo, Carrillo et al., (2013).

conocimiento del profesor, dotándolo de una componente fuertemente afectiva (Ponte, 1994).

En cuanto al foco en los problemas, Ponte et al. (2003) señalan que un proceso de investigación matemática puede acontecer en torno de uno o más problemas. Un problema, a diferencia de un ejercicio, es una situación en que el alumno no dispone de un método claro para su inmediata resolución. Una investigación se refiere a una situación 'más abierta', donde los alumnos tienen que definir parámetros y variables para abordar el problema, y su resolución puede abarcar diferentes formas de desarrollo. Estas actividades son un poderoso proceso de construcción de conocimiento, que puede incluir la formulación y exploración de preguntas, la formulación de conjeturas, las pruebas de sus formulaciones, y la justificación y evaluación de sus resultados. En nuestro estudio, utilizamos un problema al que caracterizamos como 'abierto' y que para su resolución se requiere que los estudiantes diseñen uno o más modelos que les permitan abordar la situación, y luego de resolverlos, tomar una decisión para responder al problema.

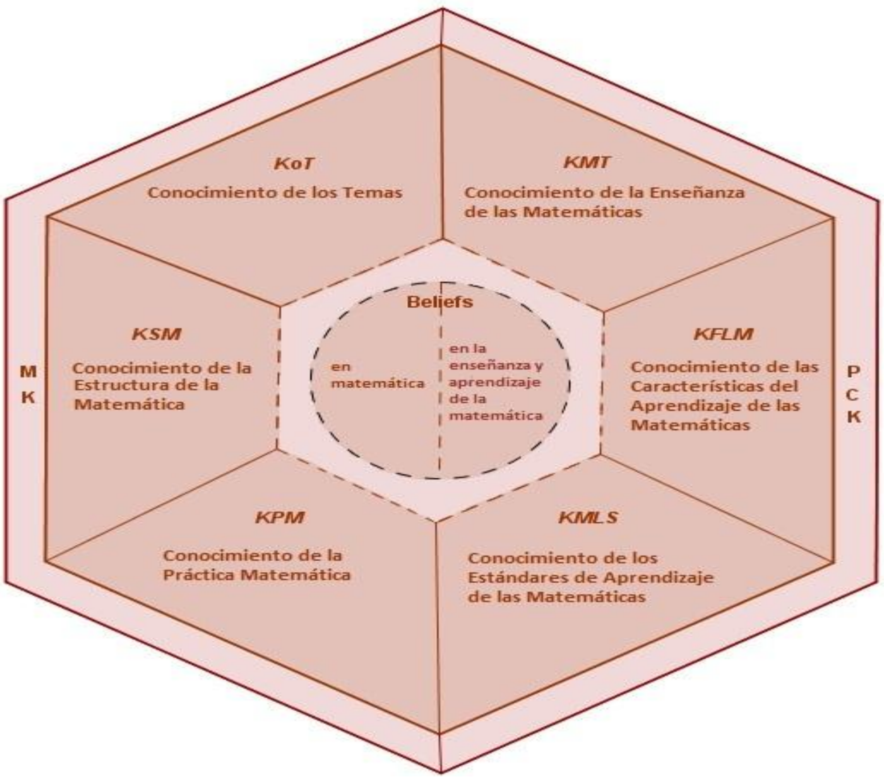

Figura 1. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, MTSK.

Dado que en nuestro contexto, la investigación y la modelación de las respuestas son elementos centrales, creemos necesario discutir la noción de modelación matemática. La modelación matemática, en el contexto de Educación Matemática, considera aspectos como problema, realidad y modelo, que se encuentran en estrecha relación entre sí. Las formas de ver estos aspectos llevan a diferentes perspectivas de lo que es modelación. Por ejemplo, la realidad puede ser vista como la realidad cotidiana del punto de vista del alumno, o bien, como la realidad de un profesional o de un matemático. Un modelo puede ser visto como una representación matemática cualquiera, pudiendo ser una ecuación, una relación, un dibujo, una tabla o un gráfico. Williams y Goos (2013) indican, que a pesar de las diferentes categorizaciones que se establecen en modelación matemática, existe una diversidad siempre creciente de puntos de vista diferentes de lo que es modelación. Las autoras, inspiradas en el trabajo de Wartofsky (1979), abordan una definición de modelo o modelación de una forma amplia, de tal manera que pueda incluir diferentes perspectivas. Williams y Goos (2013, p. 550) establecen que "un modelo (o modelación) es un medio de ver una situación (el dominio destino, a veces llamado lo 'real') a través de lentes de otra situación (el dominio origen o 'modelo' a veces llamado de 'matemática')". Así, un problema es una situación o dominio cualquiera y el modelo es otra forma de ver la misma situación, que puede ser matemática.

El desarrollo de un problema con este conjunto de características, de situaciones de investigación y modelación, promueve un elevado nivel de interación en los participantes en su resolución. Silva (2000) describe que en una clase interactiva el alumno no es un receptor pasivo (como en un modelo de enseñanza emisor/receptor), es un nuevo receptor en la sociedad del conocimiento, capaz de modificar, crear, intervenir y escoger. En ese sistema, el profesor tiene el gran desafío de construir una red de posibilidades para que el alumno pueda recorrer y experimentar; pero también, tiene la responsabilidad de poseer un conocimiento que le permita atribuir sentido y significado a las posibles respuestas de los alumnos, a pesar de que estas esten fuera de su propio espacio de soluciones (Jakobsen et al., 2014). Cuando el profesor adopta en sus clases problemas que involucran investigación y modelación, puede sentir que sale de su *zona de comodidad* y entra en una *zona de riesgo* (Borba & Penteado, 2001). La incomodidad puede responder a que la resolución de un problema abierto puede dar paso a la aparición de diversos tópicos, de situaciones de improvisación y de momentos de contingencia (e.g., Ribeiro et al., 2009; Rowland et al., 2005), como también puede encontrarse con la dificultad de establecer el tiempo concreto que puede envolver la resolución. De la misma forma, el estudiante, en caso que no este acostumbrado a este tipo de problemas, puede sentirse incómodo, ya que frente a problemas abiertos, debe desarrollar y movilizar nuevas capacidades – una aproximación al desarrollo de conocimiento muy distinta de lo que ocurre en la denominada enseñanza tradicional/transmisiva. Ambos, estudiante y profesor, se encuentran en un ambiente de múltiples posibilidades de resolución, y con posibilidades de errores e imprevistos. Por este motivo, es esencial que el profesor posea un conocimiento especializado, en todos sus subdominios, de modo que esté en condiciones de poder interpretar y atribuir sentido a las resoluciones y comentarios de los alumnos, contribuyendo para el desarrollo sostenido de su conocimiento matemático.

Contexto y método

El trabajo que ahora se presenta es parte de un proyecto más amplio, que tiene por objetivo último conceptualizar tareas para la formación de profesores, que se enfoquen en desarrollar su conocimiento matemático especializado. El trabajo se aborda como un estudio de caso, el que según Goldenberg (2004), busca la exploración intensa de un único caso, para el cual no interesa obtener medidas estadísticas ni la generalización de los resultados. El caso en nuestro estudio corresponde a dos grupos de profesores que frecuentaban una asignatura de posgrado enfocada en el desarrollo del conocimiento matemático especializado del profesor y del investigador.

El estudio incluyó dos sesiones de clases en las cuales se desarrolló un problema y sus variantes, cuya gestión realizó la primera autora, que presentó un problema abierto con el fin de discutir el conocimiento del profesor involucrado en esa situación. En este trabajo solo se reporta lo relativo al problema inicial en una de las sesiones. En el estudio participaron siete profesores que formaron dos grupos de trabajo. Todos los participantes son profesores de matemática titulados, estudiantes de posgrado y algunos de ellos candidatos a ingresar al posgrado, que ejercen o ya han ejercido como profesores de matemática en diferentes niveles educativos. La recolección de datos incluyó hacer en cada grupo grabaciones de audio, y en el grupo en pleno, grabaciones de audio y vídeo. Se obtuvieron también las producciones de cada grupo de profesores en papel.

Inicialmente los profesores discutieron y resolvieron el problema en el seno de los grupos, y posteriormente, expusieron sus procedimientos, razonamientos y resultados en la clase en pleno, formulando sus conjeturas y fundamentando sus respuestas, siendo este un espacio de discusión para complementar las diferentes construcciones de las respuestas.

El problema presentado (inicialmente) fue el siguiente:

Considere que usted quiere hacer un corral para sus animales, y usted tiene una malla de alambre de 80 metros de largo. Si usted quiere que sus animales tengan el mayor espacio posible para andar, ¿cuál es la forma que debe poseer el corral cercado con la malla y por qué? (Registren todos los pasos de razonamiento que efectuaren y justifiquen la respuesta que presentan).

En la primera actividad, frente a un modelo de corral rectangular/cuadrado, se esperaba desarrollar o ampliar el conocimiento matemático del profesor relativo al área y perímetro de figuras planas, en el cual los profesores podrían llegar a utilizar también una ecuación cuadrática. Frente a un modelo de corral circular, se esperaba que aplicaran los conceptos de área y perímetro del círculo, y finalmente, que compararan ambos modelos de corral, para conseguir visualizar cuál es el corral de mayor área.

Para analizar los resultados, nos centramos en episodios matemáticamente críticos envolviendo oportunidades perdidas o respuestas alternativas, de modo que nos permitieran extraer e interpretar características “ideales” del conocimiento del profesor que le permitieran preparar e implementar tareas de investigación y modelación en sus clases. Al analizar estas situaciones identificadas en el trabajo de los participantes, los primeros resultados permiten identificar algunas características ideales del conocimiento especializado del profesor, para trabajar con problemas abiertos em ambientes de investigación.

Algunos resultados

En este epígrafe presentamos y discutimos las soluciones de los dos grupos de trabajo y el camino que han seguido en la búsqueda de sus soluciones. Primeramente, presentamos las resoluciones de forma separada, y posteriormente, la discusión ocurrida en la clase en pleno, ya que no se pretende comparar las resoluciones de los grupos ni el conocimiento de los profesores envueltos, pero si obtener una más amplia comprensión sobre ese conocimiento en su contenido, forma y naturaleza.

Producciones del grupo 1

El primer grupo comenzó considerando un modelo rectangular, en el cual conocía su perímetro (80 metros) y calculó su área en función de uno de los lados. Luego, maximizó esa área como se muestra en la parte superior de la Figura 2.

Los profesores de este grupo utilizaron diferentes nociones matemáticas, como la definición de perímetro, área, un sistema de ecuaciones, la función cuadrática, la noción de vértice de la cuadrática (o parábola, como ellos indican) y la derivada de la función cuadrática, hasta obtener el área máxima de 400 metros cuadrados, como se muestra al final de la Figura 2.

Este grupo utilizó una diversidad de recursos matemáticos para fundamentar su respuesta. En cierto momento de la discusión, se generó un ambiente de sospecha, y después de releer la pregunta, observaron que la pregunta ‘es abierta’ y no necesariamente estaba referida a un corral de diseño rectangular, como *'aquel típico problema de maximización de área de un curso de cálculo'* (como lo expresa una de las profesoras miembros del grupo). Solo en este momento piensan en otras formas del corral y llegan a considerar un modelo de corral circular, como se muestra en la Figura 3.

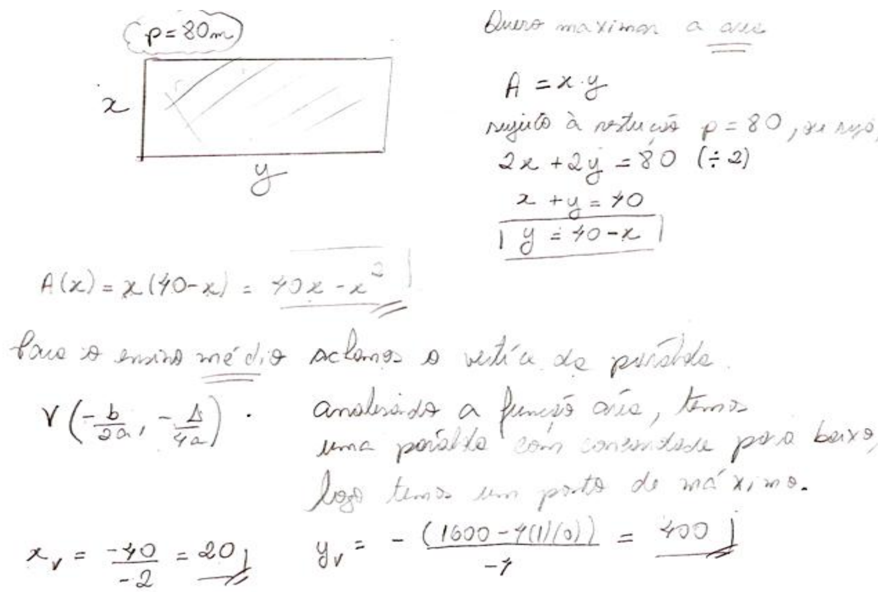

Figura 2. Diseño de corral rectangular.

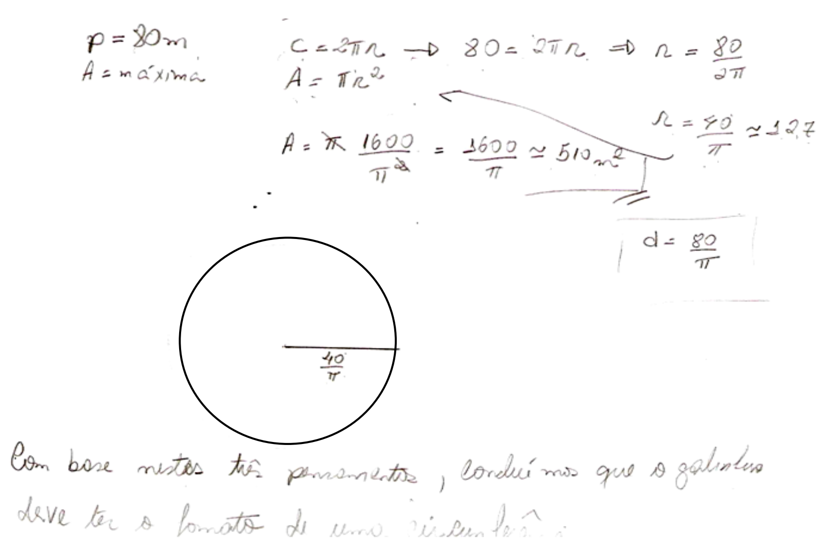

Figura 3. Diseño de corral circular.

El grupo considera entonces un modelo de corral circular, para lo cual aplican la noción de perímetro y área de una circunferencia, que les permite calcular el radio, obteniendo un área de 510 metros cuadrados (ver la Figura 3). Luego, comparan ambos modelos, rectangular y circular, lo que les permite concluir que el diseño de corral en forma de círculo tiene un área mayor. Frente a este último modelo el grupo presenta amplia seguridad en sus resultados.

Los resultados de este grupo se enmarcan dentro de las situaciones esperadas de resolución, y su estilo de resolución está en concordancia con el hecho que ellos son profesores que ejercen mayoritariamente en la enseñanza superior.

Producciones del grupo 2

El segundo grupo comenzó considerando un modelo de corral rectangular, analizando las áreas de un cuadrado comparativamente con las de un rectángulo (Figura 4).

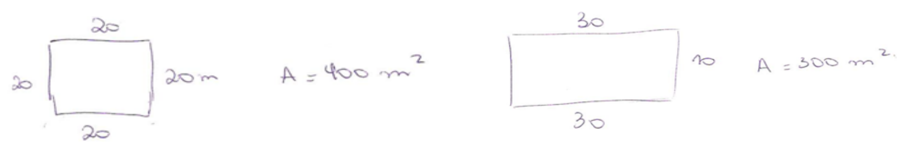

Figura 4. Comparación de áreas de un cuadrado y rectángulo.

La primera advertencia de los profesores es que el área de un cuadrado es mayor que la de un rectángulo, lo que lleva a la observación de que la figura, para tener un área mayor, 'debe ser regular', como se muestra en la segunda línea de la Figura 5.

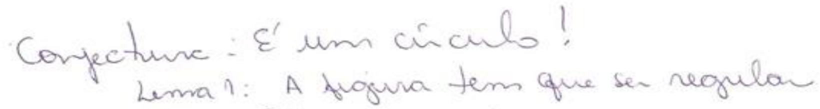

Figura 5. Conjetura modelo de corral circular.

Después, el proceso de pensamiento del grupo fue analizar la secuencia de polígonos regulares, incrementando el número de lados, hasta llegar al círculo. Los profesores no calculan detalladamente las área de todos estos polígonos, sino van observando el incremento del área de de algunas de las figuras. La Figura 6 muestra el modelo de un pentágono con lados de longitud 16 que suman 80 metros. Finalmente, los profesores calculan el área del círculo, obteniendo la conjetura de que el corral con modelo de círculo tiene la mayor área, escribiendo la sencilla expresión '*Es un círculo!*' (mostrado en la primera línea de la Figura 5). El cálculo del área se puede la visualizar en la Figura 7 donde obtienen un área de 509,29 metros cuadrados.

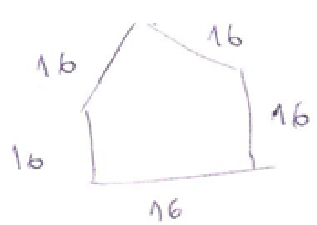

Figura 6. Diseño de corral hexagonal.

$$A = \pi r^2 \qquad 2\pi r = 80 \qquad r = \frac{80}{2\pi}$$

$$A = \pi \cdot \left(\frac{80}{2\pi}\right)^2 = \frac{\cancel{\pi} \cdot 6400}{4\pi^2} = \frac{6400}{4\pi} = 509{,}29\ m^2$$

Figura 7. Área del modelo circular.

Sin duda los profesores encontraron una relación entre las áreas de polígonos regulares, con una cantidad de lados cada vez mayor, y el aumento progresivo del área; así, llegaron a diseñar un corral en forma de un círculo de 80 metros de perímetro, comprobando la situación por medio de sus cálculos. Los profesores de este grupo ejercen principalmente en la enseñanza básica, lo que explica las producciones y la matemática involucrada en la resolución.

El primer grupo, compuesto por profesores que ejercen principalmente en la enseñanza superior, utilizó una matemática más avanzada para la construcción y fundamentación de sus soluciones pero, con todo, vivió la evolución de un modelo rectangular a uno circular, pasando por un conjunto distinto de pasos intermedios que enriqueció la discusión de los grupos en pleno – por las reflexiones subyacentes. Este grupo comenzó considerando un modelo rectangular/cuadrado, pasando luego a un modelo circular. Su expresión de que '*la pregunta es abierta*' les hizo considerar un modelo circular, situación a la que no están acostumbrados a encontrar en problemas de maximización de áreas (los usuales en su contexto de enseñanza). Su forma de abordar la situación, tal como comentaron durante la exploración de los grupos en pleno, se relaciona con el hecho de que al leer el problema han abordado inmediatamente la resolución de un modo algébrico de maximización, ya que eso era el contenido que habían impartido recientemente a sus alumnos (de matemáticas) sin pensar en que el corral podría tener otra forma distinta de la "tradicional", en problemas puramente matemáticos.

El segundo grupo, muestra una evolución de la forma de pensamiento de los participantes, a partir de un modelo rectangular/cuadrado para uno poligonal, y luego, yendo a un modelo circular. La posibilidad de comparación entre los modelos diseñados, y el conocimiento para determinar algébricamente las distintas áreas, permitió tener una amplia confianza en sus resultados. Notamos la intuición de la generación de la noción de área del círculo.

Los participantes hicieron también algunas observaciones a modo de conjeturas. El grupo 2 observó que una figura con lados regulares tiene mayor área que una de lados no regulares. Una observación implícita en su resolución es la evolución de un polígono regular a una circunferencia, dando así la posibilidad de intuir la construcción del concepto de área de un círculo – algo que no se aborda tradicionalmente y que no se encuentra, por ejemplo, en los libros de texto. Hay que resaltar el hecho de que esta actividad ha sido implementada al final del curso, y que los profesores ya estaban habituados a que, a partir de una actividad "simple" se discutieran algunos aspectos de la matemática avanzada y de la multiplicidad de conexiones que se pueden hacer. El grupo 1 formuló de una manera más completa su conjetura de respuesta final '*con base en estos pensamientos concluimos que el corral debe tener el formato de una circunferencia*', lo que el grupo 2 resumió con la expresión '*Es un círculo!*', lo anterior muestra el contexto de ejercicio laboral de los profesores, dando o no importancia a la redacción de sus conjeturas. Las conjeturas de los grupos, la discusión de ellas y la comparación de los modelos, muestran que los profesores vivieron una investigación matemática (Ponte et al., 2003). Los modelos rectangular, cuadrado, poligonales y circular de corral, que experimentaron los grupos, muestran la evolución de los modelos de corral, en base a figuras geométricas.

Discusión

El profesor debe tener en cuenta que el enfrentarse a problemas abiertos puede generar un ambiente de complejidad (Morin, 1990) y de incomodidad, que puede subsanarlo conociendo las diferentes formas de abordar ese problema abierto. Así, el profesor no debe tener en mente un solo proceso de construcción como respuesta ni considerar el suyo propio como el único válido, lo que se traduce en valorar otros tipos de respuestas con una actitud reflexiva. Esta actitud permitirá a los estudiantes pensar que el profesor no quiere una respuesta encajada en un método particular, lo que es característico de un ejercicio, y podrán adentrarse en la creación de modelos de resolución, algunos de ellos pudiendo ser inesperados para el profesor.

Según lo observado en la experiencia, el *resolutor* (alumno) muestra su punto de vista, y el profesor, a partir de ello, comienza a guiar y orientar. En el ámbito del *Conocimiento de los Temas (KoT)*, se puede referir que el profesor deberá "comprender respuestas alternativas de los estudiantes, a partir de los fundamentos matemáticos que la sustentan", coincidiendo con Ribeiro et al. (2014, p. 4), íntimamente relacionado con conocer lo que el *resolutor* está pensando respecto al problema, ligado al *Conocimiento de las Características del Aprendizaje en Matemáticas (KFLM)*, y a partir de ahí guiar y orientar la actividad matemática del alumno. En ese sentido es esencial que el profesor desarrolle un conocimiento especializado que le permita atribuir sentido a las resoluciones y/o comentarios de sus alumnos, sobre todo si estas se configuran como raras y *non-standard* (Jakobsen et al., 2014).

La evolución del proceso de resolución, y los resultados obtenidos, fue provechosa en el sentido que los primeros modelos no fueron considerados modelos erróneos, sino que fueron mirados como parte de la construcción necesaria del conocimiento para avanzar a un modelo de área mayor. Con la mirada en la evolución de resultados desde modelos simples a complejos, usando su *Conocimiento de la Estructura Matemática* (KSM) (Ribeiro et al., 2014). El KSM permitiría explicar que el comprender diferentes modelos de resolución le ayudaría al profesor a comprender conceptos más avanzados. Por otro lado, los modelos que encontraron los profesores les sirvieron como fundamentación del resultado, por medio de las comparaciones entre los modelos, integrando confianza ante sus resultados. Además, los diferentes caminos recorridos, las conexiones establecidas entre ellos, y su discusión en conjunto, fueron de gran utilidad principalmente por la posibilidad de integrar diferentes contenidos matemáticos de un modelo a otro. En ese sentido, la importancia de que los participantes tuvieran diversos grados de experiencia resultó fructífera, ya que se complementaron – unos con una perspectiva más matemática y otros con una experiencia más cercana a las resoluciones de los alumnos de los primeros niveles escolares.

Esta experiencia nos permite resaltar la importancia de que los profesores conozcan las ventajas de trabajar con problemas abiertos. Un problema abierto, que permite la investigación matemática y modelación, desarrolla capacidades interesantes en los estudiantes, como aquellas oportunidades de crear, diseñar, modelar y analizar sus resoluciones, lo que puede envolver distintos temas matemáticos. El hecho de trabajar en grupos hace que ellos aprendan a colaborar mutuamente y a fundamentar unos a otros sus resultados. La creación de un ambiente de discusión constructiva, al interior del grupo y en la clase en pleno, permite a los alumnos explicar sus resultados y discutir diferentes puntos de vista en una aula interactiva, en la línea de lo propuesto por Silva (2000). El abordaje de problemas abiertos permitiría a los alumnos crear, conjeturar y analizar sus resoluciones, como en esta experiencia de clase que permitió a cada grupo de estudiantes experimentar y *hacer por sí mismo* (Silva, 2000). El profesor debe tejer este ambiente de clase, en el que él no está ausente, sino totalmente envuelto, guiando a través de preguntas de estilo ¿por qué?, ¿existe otro modelo? y ¿cuál es el mejor modelo?, como las que aparecieron en el enfrentamiento a un problema abierto.

Conclusiones

La inclusión de problemas abiertos en el ámbito de investigaciones y modelación, puede conformar un ambiente de complejidad e incomodidad para el profesor. El hecho de presentar a profesores de matemática un problema abierto nos ha permitido por un lado enlazar estos enfoques y analizar los resultados en el marco del conocimiento especializado del profesor. Sin embargo, el abordar problemas abiertos está profundamente ligado con abrir las puertas de la creatividad al estudiante, y no esa idea de considerar un solo método de resolución como válido, lo que está más ligado a un ejercicio. Así, el profesor debe valorar los diferentes tipos de respuestas de los estudiantes, de modo reflexivo, atribuyendo sentido a las resoluciones y comentarios de los estudiantes, incluso en aquellas resoluciones y comentarios *non-standard* (Jakobsen et al., 2014).

Los modelos en evolución permitirían un conocimiento más profundo del profesor sobre conceptos simples, desde una perspectiva avanzada, según las definiciones de KSM (Carrillo et al., 2013; Ribeiro et al., 2014). Es deseable la consideración de diferentes construcciones en evolución, pues a partir de una construcción simple, y focalizándose en el punto de vista del estudiante, puede iniciarse el apoyo y ayuda del profesor en la construcción de un modelo mejor. Así, un conocimiento de estas características permitirá que el camino recorrido por el estudiante, si no es el correcto, no se considere algo negativo, sino una muestra de su forma de pensamiento, que puede involucrar aspectos constructivos y ricos a distinguir, y que lo puede llevar a considerar aspectos más complejos. Uno de ellos puede ser la fundamentación de su respuesta final, para lo cual requiere de la confianza en sus resultados y de la comprensión profunda de ellos. El profesor debe de crear y propiciar un ambiente de discusión constructiva en clase, permitiendo así a los estudiantes crear, modelar y conjeturar. Debe permitir a los alumnos experimentar y hacer por sí mismos (Silva, 2000), guiándoles en su construcción de conocimiento a través de preguntas.

Referencias bibliográficas

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389–407.

Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2001). *Informática e Educação Matemática* (1st ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985–2994). Ankara: Middle East Technical University.

Gamboa, G. de, & Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

Goldenberg, M. (2004). *A Arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H.S., & Winbourne, P. (2011). Professional knowledge related to big ideas in mathematics - an empirical study with preservice teachers. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Actas del CERME 7*. (pp. 2717-2726). Rzeszow: Polonia.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah: Lawence Erlbaum.

MEC. (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos de Ensino Fundamental - Matemática. Brasil. Retrieved from http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

MINEDUC. (2013). Estándares de Aprendizaje - Matemática: 8vo. Básico, MINEDUC, Chile. Retrieved from http://curriculumenlinea.mineduc.cl

Morin, E. (1990). *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona, España: Editorial Gedisa.

NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics - National Council of Teacher of Mathematics. Reston, VA.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 26(3), 237–257.

Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' profesional knowledge. En J.P. Ponte, & J.F. Matos (Eds.). *Actas del PME 18, Vol 1* (pp. 195-210), Lisboa.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* (1st ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Ribeiro, C. M., Amaral, R. B., Pinto, H., & Flores, É. (2014). Conhecimento matemático especializado do professor - discutindo um caso na formulação de problemas de divisão. In *II Congresso Nacional de Formação de Professores e XII Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Educadores* (pp. 2058–2070). São Paulo, UNESP.

Ribeiro, C. M., Monteiro, R., & Carrillo, J. (2009). Professional knowledge in an improvisation episode: the importance of a cognitive model. In V. D. Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), Actas *CERME 6* (pp. 2030–2039). Lyon, France.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, pp. 255–281.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(4), 4–14. doi:10.3102/0013189X015002004

Silva, M. (2000). *Sala de Aula Interativa*. Rio de Janeiro: Quartet.

Wartofsky, M. (1979). *Models, representations and the scientific understanding*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Williams, J., & Goos, M. (2013). Modelling with Mathematics and Technologies. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & L. Frederick, *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, pp. 549–569). New York: Springer.