



## Conocimiento en el Horizonte Matemático de un profesor para enseñar funciones en cuarto año de secundaria en Costa Rica

Ariana **Rodríguez**

Universidad Nacional

Costa Rica

[arodriguez89@gmail.com](mailto:arodriguez89@gmail.com)

Miguel **Picado**

Universidad Nacional

Costa Rica

[miguepicado@hotmail.com](mailto:miguepicado@hotmail.com)

Jonathan **Espinoza**

Universidad Nacional

Costa Rica

[espinozaj25@gmail.com](mailto:espinozaj25@gmail.com)

### Resumen

Esta contribución presenta un estudio cualitativo descriptivo, basado en los estudios de caso, sobre el Conocimiento en el Horizonte Matemático de un profesor cuando enseña los conceptos básicos de función en Costa Rica. Se enmarca en las investigaciones sobre el conocimiento matemático del profesor para la enseñanza. Utiliza el Análisis Didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático. Los resultados destacan las relaciones entre los conceptos abordados y los presentados en otros niveles educativos. Esto demuestra, además, conocimiento del currículo. Se echan en falta referencias a campos de utilidad profesionales de los conceptos sobre función presentados.

*Palabras clave:* conceptos básicos de función; conocimiento en el horizonte matemático; conocimiento matemático del profesor; enseñanza de las matemáticas; secundaria

### Abstract

This contribution presents a qualitative-descriptive study, based on case studies on teacher's knowledge in the mathematical horizon when he teaches the basic concepts

of function in Costa Rica. It is part of the research on teacher mathematical knowledge for teaching. The study uses the Didactic Analysis as a tool to identify mathematical knowledge. The results highlight that the teacher links the concepts addressed and those presented in other educational levels. Also, teacher demonstrates knowledge of the curriculum. References to areas of professional utility of the concepts presented are missed.

*Keywords:* basic concepts of function; knowledge in mathematical horizon, mathematical knowledge; teaching of mathematics; high school.

### **Planteamiento de la investigación**

Desde un marco general, el profesor constituye uno de los agentes claves en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Como participante de estos procesos, guía al estudiante en la construcción del conocimiento (Salcedo, 2012). En este sentido, Espinoza, Espinoza, González, Ramírez y Zumbado (2008) destacan que el papel del profesor es esencial. Además de ser un guía, “conoce el saber a enseñar antes de ser presentado al alumno” (p. 50), influye en la calidad de la enseñanza que el estudiante obtiene. Su propósito —del profesor— es orientar el desarrollo del pensamiento crítico, que se contrapone a lo que comúnmente muestra el sistema educativo costarricense donde el estudiante es solamente un receptor del conocimiento (Badilla, et al., 2004).

En Costa Rica, en 2010, el Ministerio de Educación Pública (MEP) llevó a cabo una prueba para evaluar los conocimientos sobre contenidos matemáticos de los profesores de matemática de Educación Secundaria. Esta prueba se componía de cuestiones (ítems) similares a las presentadas en el examen de bachillerato (prueba estandarizada para los estudiantes en el último nivel de secundaria). El Informe del Estado de la Educación destaca que el 56,7% de estos profesores se ubicó por encima de la media. Esto sugiere que el 43,3% restante no domina los contenidos o buena parte de estos (Cuarto Informe Estado de la Educación, 2013, p. 164). Esto evidencia limitaciones en el conocimiento matemático de los docentes que podría incidir en la enseñanza de las matemáticas.

Por otra parte, un análisis realizado a los resultados de la prueba de bachillerato de matemática aplicadas en el 2013 (MEP, 2014) reconoce dificultades en los estudiantes al resolver problemas relacionados con el tema de funciones. Se encontró un bajo porcentaje de aprobación para los objetivos correspondientes a este tema (la mayoría inferior a 60%), que son los de menor logro. Esto pone de manifiesto posibles dificultades y errores en el aprendizaje de conceptos y procedimientos matemáticos vinculados a las funciones.

El estudio que se presenta enfoca al profesor como un agente responsable de la formación de los estudiantes en matemática. Estudia el Conocimiento en el Horizonte Matemático (CHM) de un profesor de secundaria al enseñar los conceptos básicos de función. Este trabajo pretende aportar información a las autoridades educativas del país y los encargados de formar futuros profesores sobre la importancia del conocimiento matemático que deberían tener los docentes, permitiendo fortalecer la formación de estos profesionales en la enseñanza de la matemática en aquellos temas con mayor dificultad para los estudiantes.

### **Problema de investigación**

¿Qué características sobre el Conocimiento en el Horizonte Matemático muestra un profesor de matemáticas para enseñar los conceptos básicos de función en cuarto año de la Educación Secundaria en un colegio académico diurno en la provincia de Heredia?

### **Objetivos de la investigación**

Para dar respuesta al problema de investigación se ha planteado un objetivo general del que se desprenden tres objetivos particulares.

**Objetivo general.** Estudiar el Conocimiento en el Horizonte Matemático de un profesor de matemática para la enseñanza de los conceptos básicos de función a estudiantes de cuarto año de Educación Secundaria en un colegio académico diurno en la provincia de Heredia.

#### **Objetivos específicos.**

1. Describir el proceso de enseñanza de los conceptos básicos de función utilizados por un profesor de matemática.
2. Identificar los componentes del Conocimiento en el Horizonte Matemático de un profesor de matemática que enseña los conceptos básicos de función.
3. Determinar indicadores sobre el Conocimiento en el Horizonte Matemático que caracterizan a un profesor de matemática que enseña los conceptos básicos de función.

### **Marco teórico**

#### **Estado de la cuestión**

Diversas investigaciones han abordado el Conocimiento del Contenido Matemático (MKT<sup>1</sup>) para la enseñanza. Ball, Thames y Phelps (2008) categorizan el MKT en dominios de conocimiento; Climent y Carrillo (2003) subrayan el vínculo entre la investigación educativa y la formación profesional del profesor; Rojas (2010) acentúa el conocimiento para la enseñanza y la calidad matemática de la instrucción. Esta autora propone el análisis didáctico como un instrumento óptimo para medir el conocimiento profesional del docente cuando lo pone en práctica durante las lecciones y la observación de clase como mecanismo para interpretar si el profesor muestra alguna característica del conocimiento profesional, tomando en cuenta que podía el profesor estar consciente o no de ello (Rojas, 2010, p.78). Por su parte, Carmona y Climent (2012) desarrollaron un estudio para comprender este conocimiento en un profesor cuando imparte el tema de ecuaciones de una recta. Pino-Fan, Godino, Castro y Font (2012) diseñan un instrumento para medir el conocimiento matemático y didáctico de profesores sobre la derivada.

En cuanto al conocimiento matemático sobre funciones, Shumway (2003) destacó su efecto en la planificación de la lección en secundaria. Haciomeroglu (2006) analizó el conocimiento pedagógico de dos futuros profesores de matemática vinculado al concepto de función. Resalta la dificultad de los futuros profesores en el tema de funciones. Finalmente, Agarwal (2006) subraya que existe en los profesores un conocimiento matemático incompleto (sobre funciones) y una falta de lenguaje matemático formal. Estos estudios acentúan el interés por el estudio de aspectos y la caracterización del conocimiento del contenido matemático del profesor en el marco de la Didáctica de la Matemática.

---

<sup>1</sup> Mathematical Knowledge for Teaching, siglas en inglés

### Fundamentos teóricos

**Conocimiento profesional del profesor de matemática.** El conocimiento profesional del profesor se entiende como aquellos saberes y experiencias que pone en práctica el docente, que viene construyendo desde su formación inicial y durante el desarrollo de su carrera (Climent, 2002). Esta investigación se centrará en la experiencia del profesor participante como el medio de la construcción del conocimiento profesional.

Shulman ha precisado con sus estudios, sobre el conocimiento profesional de los profesores, las diferencias entre el Conocimiento del Contenido y el Conocimiento del Contenido para la Enseñanza. El primero se refiere a la cantidad y a la organización del contenido en la mente del profesor (Shulman, 1986). El profesor debe ser capaz de manejar las definiciones y poder justificar proposiciones en particular, así como conocer cómo se relaciona el conocimiento con otras disciplinas. El conocimiento del contenido para la enseñanza se refiere a la combinación del contenido y la pedagogía (Shulman, 1987). El profesor debe analizar la forma de presentar la materia al estudiante; debe tomar en cuenta las habilidades y dificultades que puedan presentar, además de adaptarla a la diversidad de interés de los jóvenes.

**Conocimiento matemático del profesor para la enseñanza.** Hill, Ball y Schilling (2008) definen el Conocimiento Matemático para la Enseñanza como “el conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos” (p.374). Así, el profesor debe poseer un conocimiento específico para la enseñanza que va más allá del conocimiento matemático.

A partir de las propuestas de Shulman (1986, 1987) sobre el Conocimiento del Contenido y el Conocimiento del Contenido para la Enseñanza, Ball, Thames y Phelps (2008) establecen un modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza. En este se destaca una distinción entre el Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido. La figura 1 muestra el modelo propuesto por los autores (Hill, Ball y Schilling, 2008, p.37).

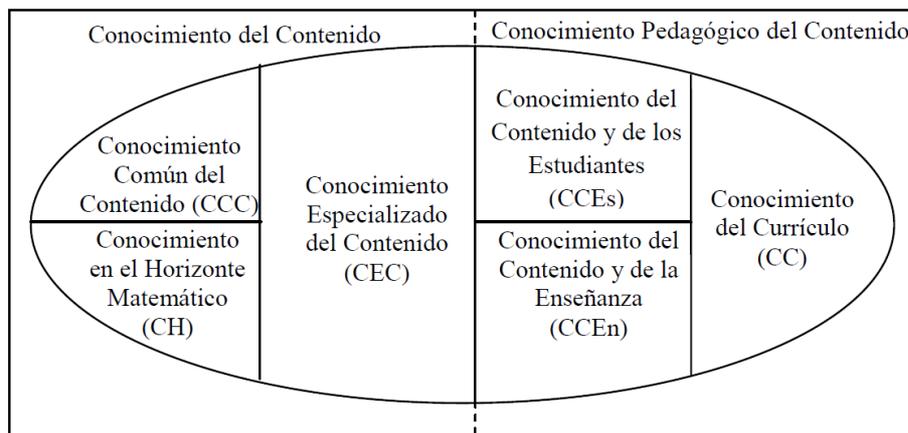


Figura 1. Dominios de Conocimiento Matemático para la Enseñanza.

El Conocimiento del Contenido, que enfoca las matemáticas, se compone de tres subdominios: Conocimiento Común del Contenido (CCC), Conocimiento en el Horizonte Matemático (CHM) y Conocimiento Especializado del Contenido (CEC). Para este estudio solo se considerará el CHM. Este se refiere a las relaciones existentes entre temas matemáticos en distintos niveles escolares. El profesor debe saber las conexiones de un contenido respecto a

otros temas en matemáticas, como también con otras disciplinas, y además debe saber su importancia durante la trayectoria curricular (Sosa, 2011). El CHM es “conocimiento que aporta una perspectiva a los profesores para su trabajo” (Godino, 2009, p. 17).

El Conocimiento Pedagógico del Contenido acentúa los procesos de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se integra por tres subdominios: Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (CCE), Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (CCEs) y Conocimiento del Currículo (CC). Estos dominios no serán considerados en este estudio, pues el foco de atención es el Conocimiento del Contenido Matemático.

**Análisis didáctico.** Gómez (2007) define el Análisis Didáctico como el “procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje”. El Análisis Didáctico se integra por cinco análisis parciales: (a) análisis conceptual, (b) análisis de contenido, (c) análisis cognitivo, (d) análisis de instrucción y (e) análisis de actuación o evaluación (Rico y Fernández-Cano, 2013).

El análisis conceptual indaga la variedad de significados, las posibles relaciones entre los términos, las creencias y concepciones de cada campo conceptual. Su objetivo es fundamentar y clarificar conceptos y términos. Este análisis va a sustentar la primera dimensión del análisis del contenido (Rico y Fernández-Cano, 2013). El análisis de contenido explora el significado de un concepto matemático en tres dimensiones: estructura conceptual, fenomenología y sistema de representación. El docente debe disponer de una organización del contenido para elegir las tareas que realizará en el proceso de enseñanza (Rojas, Flores y Ramos, 2013).

El análisis cognitivo se estructura en expectativas, limitaciones y oportunidades en el aprendizaje escolar (Lupiañez, 2009). Las expectativas son los fines, objetivos y capacidades, para establecer caminos de aprendizaje. Las limitaciones se refieren a los errores y dificultades que tienen los estudiantes al aprender un tema. Las oportunidades muestran las tareas planteadas o propuestas para la enseñanza de un contenido. El análisis de instrucción en este el profesor diseña, analiza y selecciona una variedad de tareas como elementos de la unidad didáctica de planificación. Analiza también instrumentos de evaluación y recursos didácticos (Lupiañez, 2009). El análisis de actuación (de evaluación) logra describir las habilidades y dificultades que han manifestado los estudiantes durante el proceso escolar (Gómez, 2007). Este permite una evaluación de los análisis previos y su utilidad para establecer modificaciones e iniciar nuevamente el ciclo de análisis.

Esta investigación enfoca los dos primeros análisis desde la perspectiva de Rojas, Ramos y Flores (2013) como procedimiento para identificar conocimiento en la acción.

### **Metodología**

Este apartado expone el tipo de investigación, la selección del participante, los procedimientos que se emplearán para recoger los datos y la técnica para el análisis de la información.

#### **Tipo de investigación y participantes**

La investigación es cualitativa descriptiva basada en los estudios de caso. Se enmarca en la línea de investigación “Formación del profesorado de matemáticas<sup>2</sup>”. Enfoca el Conocimiento en

---

<sup>2</sup> [http://www.ugr.es/~dpto\\_did/](http://www.ugr.es/~dpto_did/)

el Horizonte Matemático de un profesor para la enseñanza de funciones en el ciclo diversificado de la educación matemática en Costa Rica.

La fuente de información es un profesor de matemáticas. Su selección responde a una serie de criterios definidos a partir de los propósitos del estudio, los planteamientos del equipo investigador del proyecto en que se enmarca esta investigación y las propuestas de investigaciones previas (Rojas, Carrillo y Flores, 2012). Estos criterios incluyen requisitos para localizar al participante en el contexto y asegurar su disponibilidad. También, requerimientos para seleccionar un profesor experto: “aspectos generales de la experiencia profesional del profesor” (Rojas, Carrillo y Flores, 2012, p. 483).

### **Recolección de datos**

**Observación.** Los datos se recolectaron mediante observaciones de clase. La observación es no participante. Además del registro de la información en el protocolo de observación, se grabaron las lecciones en audio y video para mantener un registro real y cercano a lo acontecido en la clase durante la fase de análisis y evitar la omisión de detalles trascendentales para los resultados del estudio.

### **Análisis de la información**

Para analizar la información se utilizarán las categorías sobre el CHM propuestas por Rojas, Flores y Ramos (2013). Para cada categoría se establece una serie de unidades de análisis para estudiar el CHM de un profesor para la enseñanza de funciones. Estas se destacan en las tablas 1 y 2. Los datos relacionados a los conocimientos CCC, CEC, CCE, CCEs y CC serán analizados dentro del proyecto en el que se enmarca esta investigación.

**Categorías de análisis según el CHM.** Se han considerado dos categorías de análisis. (a) Relaciones entre los contenidos matemáticos que enseña con los niveles escolares anteriores y posteriores (RCM). (b) Referencias a campo de utilidad del contenido en ámbitos específicos (educativo, laboral, personal) (RCU)

## **Discusión y resultados**

### **Análisis del Conocimiento en el Horizonte Matemático**

La información obtenida se organizó por medio de episodios. Cada episodio corresponde a una sesión de clase de 40 minutos (algunos episodios son de 80 minutos, según el número de lecciones impartidas durante la observación). La descripción de los episodios muestra una síntesis del trabajo del profesor en la clase, los conocimientos abarcados y las evidencias sobre las categorías de análisis. Para ejemplificar el tratamiento de los datos, de los seis episodios analizados se presenta únicamente la información de los dos primeros. La totalidad de los datos se muestra en las tablas 1 y 2.

#### **Episodio [1]**

Síntesis del episodio: Introducción del contenido de funciones. Planteamiento de un problema, resolución y revisión en la pizarra.

Conocimientos: cantidad constante, cantidad variable, variable dependiente, variable independiente, función y criterio de una función.

#### ***Conocimiento en el Horizonte Matemático***

Categoría RCM: No se muestra.

Categoría RCU: el problema propuesto por el profesor se encuentra dentro del ámbito comercial —tarifa de taxi—. El profesor presenta a los estudiantes una situación cotidiana que evidencia un uso práctico de los conceptos cantidad constante, cantidad variable, variable dependiente, variable independiente, función y criterio de una función.

**Episodio [2]**

Síntesis del episodio: el profesor retoma el problema de la clase anterior. Utiliza el material impreso (folleto) para exponer ejemplos, ejercicios y conceptos.

Conocimientos: cantidad constante, cantidad variable, variable dependiente, variable independiente, relación.

**Conocimiento en el Horizonte Matemático**

RCM: el profesor hace referencia a conocimientos previos a los conceptos abordados: fórmulas correspondientes al área del círculo y la longitud de una circunferencia abordados en la educación primaria. También, relaciona las ecuaciones con el concepto de incógnita tratado en el segundo año de Secundaria. Sobre conocimientos posteriores, menciona la función inversa, criterio de una función, función, área del triángulo equilátero y preimagen, que se imparten en quinto año de Secundaria.

RCU: propone tareas en situaciones del ámbito educativo: ejemplos vinculados al movimiento rectilíneo, peso de una ballena (otras ciencias naturales) y modelos de ejercicios similares a los evaluados en la prueba de bachillerato. El material didáctico utilizado (folleto) contiene una reseña histórica sobre el concepto de función. Sobre el ámbito personal, presenta un problema sobre el fumado y hace énfasis en los estudiantes sobre las consecuencias de este vicio.

La tabla 1 muestra la relación entre los conceptos matemáticos sobre función que se abordaron y los conceptos previos y futuros referidos por el profesor.

Tabla 1

*Relaciones entre conceptos matemáticos sobre función y conceptos previos/futuros referidos*

Concepto matemático	Conceptos previos referidos	Conceptos futuros referidos
Relación	Ninguno	Función
Cantidad constante	Área del círculo (PI). Longitud de circunferencia (perímetro)	Área del triángulo equilátero
Cantidad variable	Área del círculo (A, radio). Longitud de circunferencia (perímetro)	Área del triángulo equilátero
Variable independiente	Área del círculo (radio). Ecuación de primer grado. Longitud de circunferencia (perímetro)	Concepto de función inversa Criterio de una función Área del triángulo equilátero. Abscisa
Variable dependiente	Área del círculo (A). Ecuación de primer grado. Longitud de circunferencia (perímetro)	Concepto de función inversa. Criterio de una función. Área del triángulo equilátero. Ordenada
Función	Relación. Factorización, ecuaciones cuadráticas. Gráfico	Preimagen. Clasificación de funciones. Función cuadrática

Concepto matemático	Conceptos previos referidos	Conceptos futuros referidos
Dominio	Par ordenado. Gráfico. Conjunto por extensión	Plano Cartesiano
Codominio	Par ordenado. Gráfico. Conjunto por extensión	Plano Cartesiano
Ámbito	Subconjunto. Conjunto dado por extensión. Conjunto de los números naturales. Intervalo real	Análisis de gráfica
Preimagen	Ecuación lineal. Ecuación cuadrática. Ecuación algebraica fraccionaria. Proporciones. Teorema de Thales. Ley distributiva. Propiedad de los radicales. Simplificación	Abscisa. Dominio Máximo. Clasificación de funciones. Función radical. Función cuadrática
Imagen	Ecuación lineal	Ordenada
Criterio de función	Ecuación	Ninguno
Otro: Gráfica de función	Gráfico. Pares ordenados. Plano cartesiano	Parábola

Un dato que es importante destacar es que el docente no indicó el nivel posterior en que estudian los conceptos futuros referidos. Respecto a los conceptos previos referidos enfatizó que ecuaciones de primer grado y las ecuaciones lineales se estudian en segundo y tercer año de secundaria y que en este último nivel también se analizan las ecuaciones cuadráticas. Además indicó que en primaria se estudian los conceptos de área y longitud de circunferencia de un círculo.

Tabla 2

Referencias a campos de utilidad del contenido en ámbitos específicos expuestos por el profesor

Concepto matemático	Campo		
	Comercial	Educativo	Personal y laboral
Relación	Ninguno	Ninguno	Ninguno
Cantidad constante	Tarifa de taxi (tarifa primer kilómetro)	Preparación bachillerato (ejercicios) Movimiento de rectilíneo (Física)	Salario de un trabajador (salario base)
Cantidad variable	Tarifa de taxi (Kilómetros adicionales y costo)	Preparación bachillerato (ejercicios) Movimiento rectilíneo (física)	Ninguno
Variable independiente	Tarifa de taxi (Kilómetros adicionales) Venta de revistas	Movimiento rectilíneo (física) Peso de una ballena Preparación bachillerato (ejercicios)	Vicio del fumado
Variable dependiente	Tarifa de taxi (costo)	Movimiento de rectilíneo (física) Peso de una ballena Preparación bachillerato	Desarrollo de un niño Fumado Salario

Concepto matemático	Campo		
	Comercial	Educativo	Personal y laboral
Función (Gráfica)	Tarifa de taxi (Introducción al tema)	(ejercicios) Reseña histórica de función Preparación a bachillerato (ejercicios) Calificaciones	Fumado
Preimagen	Venta de revistas	Ninguno	Ninguno
Imagen	Ninguno	Ninguno	Salario
Criterio de una función	Tarifa de taxi (calcular tarifa)	Ninguno	Salario
Otro: Gráfica de una función	Ninguno	Movimiento parabólico (Física)	Ninguno

En cuanto a las unidades de análisis dominio, codominio y ámbito se omiten indicaciones y referencias sobre campos de utilidad.

### Análisis del Conocimiento en el Horizonte por episodio

Se describe cada uno de los seis episodios respecto a las dos categorías sobre el CHM observadas.

**Episodio [1].** El problema planteado por el profesor destaca una situación cotidiana: la tarifa de un taxi. Su resolución permite a los estudiantes una introducción a conceptos nuevos sobre el tema de funciones. El docente destaca la utilidad del concepto en el campo comercial.

**Episodio [2].** El profesor muestra un conocimiento amplio sobre los conocimientos previos y posteriores al tema de funciones. Mediante ejemplos el profesor retoma conocimientos anteriores de los estudiantes y los aplica con los nuevos conceptos.

*P: Si yo les diera a ustedes esta otra fórmula, el área de un círculo, recordemos, escuela, ¿cómo se calcula el área de un círculo?*

*P: Por “Pi” correcto. El área del círculo es “Pi” multiplicado por radio a la dos. Díganme ustedes ¿quién es la variable dependiente ahí en esa fórmula?*

Sobre los conocimientos posteriores el profesor los menciona con el avance de la clase, sin especificar a cuál nivel corresponde.

*P: Entonces perfectamente, esto nos va a relacionar con un concepto que vamos a ver más adelante, todavía no, el concepto de función inversa. Una variable dependiente perfectamente yo haciendo un despeje la puedo convertir en una variable independiente y en forma viceversa.*

El profesor propone ejemplos que evidencian aplicaciones del tema en el ámbito educativo y personal: destaca una reseña histórica sobre el tema de funciones y propone ejercicios que son modelo de las pruebas de bachillerato. También, muestra dominio de campos de utilidad en otras disciplinas como la Física, esto mientras lee un ejercicio del material.

*P: [lee] Por ejemplo para describir el movimiento en línea recta de un cuerpo, (comenta) o sea movimiento rectilíneo, tema de Física, verdad?, que me imagino que ya ustedes están analizando con los profesores, (lee) que se mueve a una velocidad constante...*

Dentro del ámbito personal, resalta las consecuencias del fumado como la afectación de los bronquios. Los estudiantes ponen en práctica los conceptos de variable dependiente, variable independiente y la noción de función, además de ver la aplicación en una problemática de salud.

**Episodio [3].** El profesor retoma el concepto de relación tratado en la clase anterior. Esto para introducir el concepto de función. Luego, hace referencia sobre particularidades de las funciones que van a ver más adelante.

*P: Más adelante que estemos viendo clasificaciones de las funciones según el estudio de este segundo conjunto entonces ahí vamos a ver ¿qué pasa si sobra?, ¿qué pasa si no sobra?, ¿qué pasa por ejemplo en una relación como esta que el 1 y el 2 van al mismo elemento? Entonces ¿qué nombre reciben esas funciones?*

En esta clase el profesor improvisa un ejemplo propio del ámbito educativo: calificaciones y estudiantes.

**Episodio [4].** Cuando explica los conceptos de dominio y codominio de una función, el profesor retoma conocimientos previos, presentados en clases anteriores. También se refiere a conceptos que se tratarán en clases futuras.

*P: [se refiere al ámbito] Del codominio B correcto. Es un subconjunto del codominio B, recordemos que este signo significa subconjunto.*

Sobre los usos en distintos campos, se utilizan situaciones para que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos sobre cantidad constante, variable independiente, variable dependiente, preimagen, imagen y criterio de una función.

**Episodio [5].** Se subrayan conceptos previos sobre la teoría de conjuntos y relaciones aritméticas y algebraicas.

*P: ¿Cómo resolvemos esa ecuación? Vean que es una ecuación un poquito particular a la que ustedes conocen, es una fracción igualada a otra fracción, en noveno año ustedes vieron lo que fue proporciones cuando vieron el teorema de Thales, por lo tanto si pueden tener la noción de cómo resolver ésta ecuación...*

El docente acentúa conocimientos posteriores como análisis de la gráfica para el concepto de ámbito. Se refiere también al dominio máximo, clasificación de funciones: función radical y función cuadrática para el concepto de preimagen.

*P: Por lo tanto hay dos pares ordenados  $(-2,3)$  y  $(2,3)$ , es una función particular que vamos a llamar más adelante función cuadrática, una función cuadrática perfectamente un elemento del ámbito puede tener dos preimagenes, eso sucede en las funciones cuadráticas.*

**Episodio [6].** El profesor destaca conceptos preliminares. Algunos se enmarcan en el campo educativo.

*P: Una parábola, que está asociado con el movimiento parabólico que ustedes están viendo en Física.*

### Conclusiones

La descripción del proceso de enseñanza de un profesor de matemáticas cuando enseña los conceptos básicos de función en cuarto curso de secundaria y el análisis realizado permiten las siguientes conclusiones.

El profesor refiere a otros niveles educativos (preliminares y posteriores) cuando aborda diversos conceptos vinculados al concepto de función. Sobre los niveles previos, el profesor destaca conceptos propios de la educación primaria sin especificar el año escolar en que se ubican. Respecto a los conceptos previos que hace alusión y que se estudian en secundaria, menciona con exactitud el año al que corresponde y su utilidad.

En cuanto a conocimientos posteriores, el profesor acentúa diversos conceptos que serán abordados en niveles futuros (quinto año de secundaria). Esto resalta la utilidad inmediata y futura de los conceptos estudiados en el aprendizaje de los estudiantes. Cabe señalar que se omiten referencias sobre el uso de los conceptos básicos de función en la Educación Superior.

Esto pone de manifiesto que el profesor conoce el currículo de matemática para la Educación General Básica y Diversificada. Sobre primaria, muestra, a nivel general, un dominio de nociones sobre los contenidos que se abordan. Para secundaria, el dominio mostrado de la organización de los conceptos matemáticos por curso es mayor.

Sobre las referencias a campos de utilidad, el profesor se limita a situaciones de ámbitos como el comercio, la educación, el trabajo y lo personal. Destaca el énfasis que se hace en el uso de los conceptos matemáticos como parte de la preparación para la prueba de Bachillerato. Se omite información sobre el uso de los conceptos matemáticos en campos profesionales específicos y con mayor grado de formalización.

Finalmente, las categorías de análisis sobre el Conocimiento en el Horizonte Matemático utilizadas han permitido caracterizar el desempeño profesional del profesor. El profesor sometido a estudio es un profesional que establece vínculos entre los conceptos matemáticas que se abordan y otros estudiados o que se estudiarán; además, destaca la utilidad de estos conceptos en distintos ámbitos de aplicación sin alcanzar un alto nivel de formalización. También, el estudio ha permitido identificar rasgos sobre el Conocimiento del Currículo, uno de los subdominios del Conocimiento Pedagógico del Contenido. Esto conduce a profundizar, en estudios futuros, sobre este conocimiento en el profesor de matemáticas y establecer vínculos entre estos subdominios.

### Referencias bibliográficas

- Agarwal, S. (2006). *The Nature of Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Knowledge of Mathematics for Teaching of Functions* (Tesis doctoral). University Of New York At Buffalo.
- Badilla, J., et al. (2004). *Propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de álgebra y funciones: clases tipo taller* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Costa Rica.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Carmona, E., & Climent, N. (2012). Comprensión del conocimiento matemático para la enseñanza que sustenta el diseño de una actividad sobre las ecuaciones de la recta en 1° de Bachillerato. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 165-175). Jaén, España: SEIEM
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva. España.
- Climent, N., & Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 21(3), 387-404.

- Espinoza, J., Espinoza, J., González, M., Ramírez, I., & Zumbado, M. (2008). *La resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas: una experiencia con la función exponencial, polígonos y estadística* (Memoria de seminario de graduación para optar al grado de licenciatura en la enseñanza de la matemática). Universidad Nacional de Costa Rica.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20,13-31.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. España.
- Haciomeroglu, G. (2006). *Prospective secondary teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge of the concept of function* (Tesis doctoral). The Florida State University College of Education.
- Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teacher's Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Lupiañez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. España.
- Ministerio de Educación Pública. (2014). *Informe nacional 2013. Resultados de las pruebas nacionales de bachillerato de la Educación Formal*. San José, Costa Rica: Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad.
- Pino-Fan, L.R., Godino, J.D., Castro, W.F., & Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 427-434). Jaén, España: SEIEM
- Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible (2013). *Cuarto Informe Estado de la Educación* (4ª ed.). San José, Costa Rica: Editorama.
- Rico, L., & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, L. Lupiáñez, & M. Molina, *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores*.
- Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno* (Memoria de trabajo de investigación tutelada no publicada). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada, España.
- Rojas, N., Carrillo, J., & Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, & L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 479-485). Jaén: SEIEM.
- Rojas, N., Flores, P., & Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, L. Lupiáñez, & M. Molina, *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores*.
- Salcedo, F. (julio-setiembre, 2012). Papel del profesor en la enseñanza de estrategias de aprendizaje. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*. 3(3), 17-28.
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Shumway, M. (2003). *Preservice mathematics teachers' knowledge of functions and its effect on lesson planning at the secondary level* (Tesis doctoral). Universidad de Iowa.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos* (Memoria para optar por el grado de doctora). Universidad de Huelva. España.