



El conocimiento de matemáticas del estudiante para profesor en la interpretación de la comprensión del proceso de clasificar cuadriláteros

Gloria **Sánchez-Matamoros**

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Sevilla

España

gsanchezmatamoros@us.es

Ceneida **Fernández**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

España

ceneida.fernandez@ua.es

Julia **Valls**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

España

julia.valls@ua.es

Resumen

El objetivo de esta investigación es examinar cómo los estudiantes para profesor comprenden la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes relativa a la clasificación de cuadriláteros y cómo influye dicha comprensión en determinar objetivos de aprendizaje. Los estudiantes para profesor realizaron una tarea profesional que consistía anticipar respuestas de estudiantes de secundaria mostrando diferentes niveles de comprensión del proceso de clasificar cuadriláteros y en proponer actividades para apoyar la comprensión de dicho proceso. Los resultados han permitido generar descriptores de cómo los estudiantes para profesor consideraban una trayectoria de aprendizaje del proceso de clasificar cuadriláteros como referencia para inferir objetivos de aprendizaje. Estos resultados aportan información para el diseño de intervenciones en la formación de profesores de matemáticas que tengan como uno de sus objetivos desarrollar la competencia docente “mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza-aprendizaje.

Palabras clave: mirada profesional, conocimiento de matemáticas, clasificación de cuadriláteros, trayectoria de aprendizaje

Competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza de las matemáticas

Investigaciones recientes indican que la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se apoya en que los profesores sean capaces de identificar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretarlos para poder tomar decisiones de enseñanza debidamente fundamentadas (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipp, 2010). El reconocer la importancia de esta competencia docente ha generado cuestiones relativas a cómo los estudiantes para profesor pueden empezar a desarrollarla y cuáles son los contextos y tareas que favorecen su desarrollo en los programas de formación. Crear oportunidades para que los estudiantes para profesor puedan centrarse en el pensamiento matemático de los estudiantes y reconocer el potencial de las actividades propuestas en las lecciones de matemáticas para desarrollar el aprendizaje de tópicos matemáticos concretos ha permitido que se empiece a reconocer que el desarrollo de esta competencia no resulta fácil (Callejo, Fernández, Sánchez-Matamoros y Valls, 2014; Fortuny y Rodríguez, 2012; Morris, Hiebert y Spitzer, 2009; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Sánchez-Matamoros, Fernández, Llinares y Valls, 2013; Zapatera y Callejo, 2013).

Desde los trabajos previos, se está mostrando que la identificación del estudiante para profesor de los elementos matemáticos que son relevantes en el problema que deben resolver sus alumnos le permite estar en mejores condiciones para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de un tópico matemático. Es decir, estas investigaciones previas centradas en el aprendizaje de los estudiantes para profesor subrayan la importancia de la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Imre y Akkoç, 2012; Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013; Fernández et al. 2012; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014). La manera en la que el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de matemáticas y los estudiantes se integran, permite considerar como referencia el concepto de trayectoria de aprendizaje (Clements y Sarama, 2004; Wilson, Mojica y Confrey, 2013) entendida como un camino hipotético a través del cual el aprendizaje de los estudiantes puede progresar y servir como referente cuando el estudiante para profesor interpreta o anticipa el pensamiento matemático de los estudiantes definiendo objetivos de aprendizaje. En este contexto, que los futuros profesores de matemáticas identifiquen el contenido matemático clave para la comprensión de los conceptos matemáticos (key developmental understanding (KDU), Simon, 2006) es un factor importante para reconocer características de las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes.

Nuevas investigaciones en esta agenda de investigación deben generar información adicional que nos ayude a comprender mejor cómo los estudiantes para profesor comprenden las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes en relación a un tópico matemático y cómo influye dicha comprensión en determinar objetivos de aprendizaje (Wilson, Mojica y Confrey, 2013).

Clasificación de cuadriláteros

Comprender la relación entre los procesos de clasificar y definir y el papel desempeñado por las relaciones de inclusión en los cuadriláteros plantea dificultades a los estudiantes de secundaria. Estas dificultades están vinculadas a que los estudiantes reconocen los diferentes cuadriláteros mediante ejemplos prototípicos (Fujita, 2012). Esta situación muestra que la consideración de las clasificaciones inclusivas (jerárquicas) y no inclusivas (particiones) influye que en la comprensión de los procesos de clasificación de los cuadriláteros (De Villiers, 1994).

Las clasificaciones inclusivas se dan cuando al aplicar un criterio de clasificación en el conjunto de los cuadriláteros establecemos una relación de inclusión en algunas de las clases resultantes. Por ejemplo, cuando en el conjunto de los cuadriláteros introducimos como criterio de clasificación el tener las diagonales perpendiculares se crean dos grupos. En uno de los grupos están los cuadrados y los rombos. Si además en este grupo introducimos el criterio de que las diagonales sean iguales para definir los cuadrados, el cuadrado puede ser considerado un rombo particular, creándose una clasificación inclusiva. Mientras que, por otra parte en una clasificación no inclusiva (jerárquica) el conjunto de cuadrados y rombos son conjuntos disjuntos. Comprender el papel que desempeñan las clasificaciones inclusivas y no inclusivas en el conjunto de los cuadriláteros (Usiskin y Griffin, 2008) en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes de educación secundaria y la relación entre el proceso de clasificar y de definir es un elemento relevante que debe ser conocido por los profesores. Por tanto, este conocimiento es un elemento clave en el desarrollo de la competencia docente del profesor. Considerando estos aspectos, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

- ¿cómo los estudiantes para profesor llegan a comprender la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes relativa a la clasificación de cuadriláteros y cómo influye dicha comprensión en determinar objetivos de aprendizaje?

Método

Participantes y contexto

Los participantes del estudio fueron 48 estudiantes para profesores de educación secundaria (EPS) matriculados en un programa de formación inicial de profesores. Los participantes tienen diferente formación en relación a las matemáticas (graduados matemáticos e ingenieros) y se habían matriculado en este programa para obtener la capacitación profesional para ser profesores de matemáticas de educación secundaria. Una de las materias en este programa de formación tenía como objetivo ayudar a los estudiantes para profesor a dotar de sentido al trabajo de los alumnos cuando resolvían actividades y problemas de matemáticas. Esta materia tenía una duración de 50 horas distribuidos por módulos considerando diferentes tópicos matemáticos. Uno de estos módulos se centraba en cómo los estudiantes de secundaria llegan a comprender los procesos de clasificación y su relación con el proceso de definir figuras geométricas. Al principio del módulo se les propuso una tarea profesional que es el instrumento de recogida de datos de este estudio.

Instrumento

La tarea profesional que realizaron los EPS estaba formada por dos problemas de 3° de educación secundaria (14-15 años) sobre la clasificación de figuras geométricas (Figura 1) y seis preguntas que incidían en la dimensión profesional de la enseñanza:

- A1. Indica lo que tendría que hacer y decir exactamente María, una alumna de 3° de ESO, en cada problema, para indicarte que ha conseguido alcanzar el objetivo de aprendizaje del problema (Clasificar los cuadriláteros a partir de diferentes criterios).*
- A2. Explica qué aspectos de la respuesta de María, en cada problema, te hacen pensar que ha comprendido la clasificación de cuadriláteros. Justifica tu respuesta.*
- B1. Indica lo que tendría que hacer y decir exactamente Pedro, otro alumno de 3° de ESO, en cada problema, para que te muestre que tiene ciertas características de la comprensión de*

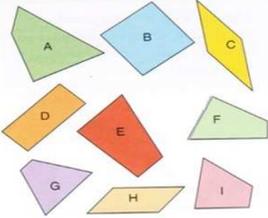
la clasificación de los cuadriláteros pero que no ha sido capaz de alcanzar el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta.

B2. Explica qué aspectos de la respuesta de Pedro, en cada problema, te hacen pensar que no ha alcanzado el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta.

C. Si fueras el profesor de estos alumnos,

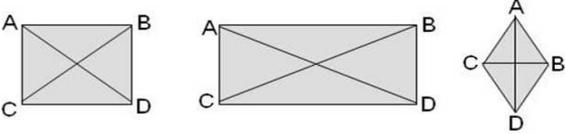
- ¿cómo modificarías/ampliarías la tarea para confirmar que María ha alcanzado el objetivo de aprendizaje pretendido? Justifica tu respuesta.
- ¿cómo modificarías/ampliarías la tarea para que Pedro alcance el objetivo de aprendizaje pretendido? Justifica tu respuesta.

Problema 1
Indica cuáles de los cuadriláteros de la figura



hacen referencia a cada una de las frases:
a. Solo tiene dos lados paralelos
b. Tiene dos lados paralelos y dos ángulos rectos
c. Sus lados son iguales, pero los ángulos no

Problema 2
2.1. Observa las figuras y completa a continuación el cuadro, poniendo SÍ o NO en las casillas vacías:



	Cuadrado	Rectángulo	Rombo
Los cuatro lados son iguales			
Los cuatro ángulos son iguales			
Los lados opuestos son iguales			
Las diagonales son iguales			
Las diagonales se cortan en el punto medio			
Las diagonales forman ángulo recto			

2.2. Indica semejanzas y diferencias respecto de las diagonales entre:
a) rectángulo y cuadrado
b) rombo y rectángulo
c) rombo y cuadrado

2.3. ¿Cómo se clasifican los paralelogramos si se toma como criterio las diagonales? Justifica la respuesta

Figura 1. Problemas de educación Secundaria que formaban parte de la tarea profesional propuesta a los estudiantes para profesores.

Cuatro de las seis preguntas de la dimensión profesional pedían a los EPS anticipar posibles respuestas a las actividades anteriores que reflejaran diferentes niveles de comprensión de los estudiantes de secundaria del proceso de clasificación de figuras geométricas. Las cuestiones propuestas pedían a los estudiantes para profesor justificar cómo consideraban que estas respuestas reflejaban diferentes niveles de comprensión del proceso de clasificar por parte del estudiante de secundaria. Estas cuestiones tenían como objetivo centrar la atención de los estudiantes para profesor en hipotéticas trayectorias de aprendizaje del proceso de clasificar y reconocer lo que podrían ser posibles respuestas de estudiantes en diferentes niveles en esta

trayectoria. En las dos restantes cuestiones se les pedía proponer decisiones de acción (modificar/ampliar la tarea) para confirmar o alcanzar el objetivo de aprendizaje pretendido.

Los dos problemas usados como referentes en esta tarea profesional proceden de una lección sobre el proceso de clasificar en un libro de texto ampliamente usado en la educación secundaria. Estos problemas fueron elegidos para esta tarea ya que tenían diferentes características que favorecían el que los estudiantes para profesor pudieran desempaquetar su comprensión matemática del proceso de clasificar y relacionarlo con la forma en la que comprendían lo que podía ser una trayectoria de aprendizaje de la relación entre clasificar y definir. En particular, el problema 1 pedía a los estudiantes de secundaria clasificar un conjunto de cuadriláteros, aplicando tres criterios. El problema 2 pedía al resolutor que identificasen algunas características de los lados, ángulos y diagonales del cuadrado, rectángulo y rombo, y que clasificasen los paralelogramos a partir de las diagonales.

Análisis

Los datos de esta investigación son las respuestas dadas por los EPS a las seis cuestiones planteadas en esta tarea. En esta comunicación presentamos los resultados obtenidos a partir de las cuatro primeras cuestiones.

En el análisis identificamos cómo los EPS consideraban que los estudiantes de educación secundaria habían conseguido o no el objetivo curricular de “Clasificar los cuadriláteros en 3º de ESO (14-15 años)”. Para ello nos centramos en cómo anticipaban posibles respuesta a los problemas 1 y 2 que según ellos indicaban diferentes niveles de comprensión del proceso de clasificar, considerando en qué medida hacía intervenir los significados de las clasificaciones inclusivas o no inclusivas. Este proceso de análisis nos permitió inferir características de la manera en la que la comprensión de los EPS del proceso de clasificación de figuras influía en el reconocimiento e interpretación de lo que se consideraban evidencias de la comprensión de los estudiantes de educación secundaria del proceso de clasificar. En este informe presentamos los resultados relativos a la manera en la que los estudiantes para profesor atendían a las características de la trayectoria de aprendizaje de la clasificación de cuadriláteros y en particular cómo la consideración de las clasificaciones inclusivas y no inclusivas influía en su comprensión de la trayectoria de aprendizaje.

Resultados

Los resultados muestran dos formas diferentes de comprender la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes relativa a la clasificación de cuadriláteros y cómo influyó dicha comprensión en determinar objetivos de aprendizaje. Estas dos formas muestran la influencia que tenía el conocimiento de los procesos de clasificar como un proceso matemático en la manera en la que los estudiantes para profesor comprendían la trayectoria de aprendizaje de los alumnos de secundaria. Las dos formas de comprender la trayectoria de aprendizaje son: considerar relaciones no inclusivas que generan clases unitarias y considerar relaciones inclusivas.

Considerar relaciones no inclusivas que generan clases unitarias como evidencia de la comprensión de clasificación de cuadriláteros de los estudiantes de secundaria

42 EPS consideraban evidencia de comprensión del proceso de clasificación de cuadriláteros cuando el estudiante de secundaria usaba un criterio de clasificación que daba lugar a clasificaciones no inclusivas de clases unitarias y no poniendo de manifiesto que la relación de inclusión puede darse dentro de las clases no unitarias.

Por ejemplo, un EPS en este grupo considera como evidencia de la comprensión del proceso de clasificación en los estudiantes de secundaria, respuestas que usan un criterio de clasificación que es una conjunción de dos propiedades matemáticas de las figuras y que aplicado al conjunto de paralelogramos da lugar a clasificaciones no inclusivas de clases unitarias. De esta manera, el cuadrado es un paralelogramo que no puede definirse como un tipo particular de rectángulo, ni de rombo. Por ejemplo, se considera una respuesta de clasificar los paralelogramos considerando las diagonales (apartado 2.3 del problema 2) la siguiente:

La clasificación sería

- Cuadrados: *Diagonales iguales formando ángulos rectos*
- Rectángulos: *Diagonales iguales que no forman un ángulo recto*
- Rombos: *Diagonales distintas que forman un ángulo recto*

Me hace pensar que María ha comprendido la clasificación de cuadriláteros porque ha conseguido contestar correctamente el problema 2 siendo capaz de clasificar los paralelogramos

En esta respuesta el EPS considera una evidencia del proceso de clasificar paralelogramos el uso de la conjunción de las propiedades: “longitud de las diagonales” y “ángulo que forma” dando lugar a definiciones no inclusivas, por ejemplo, “*rectángulos: Diagonales iguales que no forman un ángulo recto*”. Esta manera de entender el proceso de clasificar conlleva que los cuadriláteros no tienen relación entre sí. Es decir, en este caso, el cuadrado no puede ser un rombo particular ya que los criterios usados “diagonales distintas que forman ángulo recto” y “diagonales iguales formando ángulos rectos” crea dos conjuntos disjuntos en el grupo de los paralelogramos.

Por otra parte, para mostrar una comprensión incompleta del proceso de clasificación de los paralelogramos los estudiantes para profesor en este grupo indican que una respuesta que mostraría esta falta de comprensión usaría un solo criterio para clasificar. Por consiguiente, se colocaría en el mismo grupo figuras como cuadrado y rectángulo:

Los paralelogramos se clasifican en...

- Los que tienen diagonales que no son iguales
- Los que tienen diagonales que no forman ángulos rectos

En la clasificación de los paralelogramos se nota que no comprende que bastan dos de los criterios para obtener una clasificación en tres grupos y no se da cuenta de que hacen falta los dos y no solo uno de ellos (énfasis añadido)

En este caso, este EPS considera que un alumno no es capaz de establecer clasificaciones cuando solo utiliza un criterio “diagonales que no son iguales”, que agrupa por un lado al rombo y por otro al cuadrado y rectángulo. En consecuencia, este EPS considera que no obtener clases unitarias (“*no se da cuenta de que hacen falta los dos y no solo uno de ellos*”) sería una evidencia de cierta falta de comprensión del proceso de clasificar.

Considerar relaciones inclusivas como evidencia de la comprensión de clasificación de cuadriláteros de los estudiantes de secundaria

6 EPS consideraban una evidencia de la comprensión del proceso de clasificación cuando el estudiante de secundaria puede usar un criterio de clasificación que aplicado al conjunto de

cuadriláteros diera lugar a clasificaciones inclusivas. Así, en este grupo los estudiantes para profesor admiten la posibilidad de utilizar criterios que originen clases no unitarias, por ejemplo que con determinados criterios de clasificación e inclusión un cuadrado puede considerarse un rectángulo. Así, de esta manera estos estudiantes para profesor consideran que una buena comprensión del proceso de clasificar cuadriláteros se evidencia cuando el alumno puede establecer clasificaciones que derivan en definiciones inclusivas de las figuras, como por ejemplo el que un cuadrado pueda llegar a ser visto como un rectángulo particular, o que un cuadrado pueda ser visto como un rombo particular. Así, estos estudiantes para profesor indican como evidencia de esta comprensión en el apartado 2.3 del problema 2:

Si las diagonales son iguales son rectángulos (el cuadrado es un rectángulo)

Si las diagonales son desiguales son rombos...

Con esta respuesta estos estudiantes para profesor consideran como evidencia de la comprensión el uso de un criterio “diagonales iguales” que lleva a una clasificación en la que los rectángulos y cuadrados se encuentran en una misma clase y además explicita la relación de inclusión “*el cuadrado es un rectángulo*”, admitiendo la existencia de definiciones del cuadrado inclusivas (un cuadrado es un rectángulo que además de tener las diagonales congruentes tiene los lados congruentes).

Al entender la comprensión del proceso de clasificar y su relación con el proceso de definir de esta manera, estos estudiantes para profesor indican que una comprensión no adecuada de la clasificación de paralelogramos son aquellas en la que el alumno no sea capaz de generar clasificaciones inclusivas. Por ejemplo,

En el problema 2, en el apartado 2.1 podía haber fallado en las tres últimas cuestiones si no tiene claro el concepto de ángulo recto o de diagonal. En los apartados 2.2 y 2.3 también podía haber respondido mal o quizás dejarlo en blanco porque no es capaz de explicar semejanzas y diferencias o clasificarlas mediante el criterio de las diagonales.

De las respuestas dadas por este EPS, se desprende que considera que un estudiante de secundaria muestra una correcta comprensión de la clasificación de cuadriláteros cuando es capaz de hacer uso de un criterio de clasificación que aplicado al conjunto de cuadriláteros da lugar a clasificaciones inclusivas.

Discusión

El objetivo de esta investigación es aportar información sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para profesor cuando piensan en el aprendizaje de las matemáticas. Nosotros particularizamos nuestro estudio al proceso de clasificar cuadriláteros como un contenido de educación secundaria (3° de educación secundaria, 14-15 años). Esta investigación incide en identificar el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas para enseñar (MKT, Ball y Bass, 2000; Ball, Thames y Phelps, 2008) en el contexto de pensar en cómo la resolución de problemas matemáticos por parte de los estudiantes pueden poner de manifiesto diferentes niveles de comprensión de los conceptos y procesos matemáticos (trayectoria de aprendizaje).

Los resultados muestran dos formas diferentes de entender la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes relativa a la clasificación de cuadriláteros y la influencia de esta comprensión en determinar objetivos de aprendizaje. La mayoría de EPS consideró que tener una mayor comprensión del proceso de clasificar cuadriláteros era obtener clasificaciones no inclusivas lo

que le llevaba a determinar ese tipo de clasificaciones como objetivo de aprendizaje. Un grupo reducido de EPS consideró que tener una mayor comprensión del proceso de clasificar cuadriláteros era la obtención de clasificaciones inclusivas lo que le llevaba a tomar esta clasificación como objetivo de aprendizaje. Pocos EPS consideraron las clasificaciones inclusivas como un referente para determinar los diferentes niveles de comprensión de los procesos de clasificar cuadriláteros (Fujita, 2012). Esta falta de reconocimiento de este elemento clave (KDU, Simon, 2006) en la comprensión de la clasificación de cuadriláteros pone de manifiesto cierta falta de “consciencia” explícita sobre cómo las clasificaciones inclusivas (jerárquicas) y no inclusivas (particiones) influyen en la comprensión de los procesos de clasificación (De Villiers, 1994). Sin embargo, es necesario que los EPS sean capaces de desempaquetar este conocimiento de matemáticas que les permitirá generar objetivos de aprendizaje específicos que se vinculan a lo que los alumnos de educación secundaria necesitan comprender para mejorar su comprensión de los procesos de clasificar.

Estos resultados subrayan la importancia de considerar la influencia de la manera en la que los estudiantes para profesor comprenden los conceptos y procesos matemáticos sobre lo que se consideraría diferentes niveles de comprensión matemática. Considerar esta relación de manera explícita puede apoyar el desarrollo de la competencia docente de los estudiantes para profesor vinculada a la capacidad de analizar los efectos de la enseñanza en el aprendizaje de los estudiantes. Esto es así ya que la definición de los objetivos de aprendizaje en la enseñanza se apoya en la relación entre la manera de comprender del profesor y lo que se considera evidencias de comprensión en los estudiantes.

Finalmente, en relación a la tarea profesional usada en esta investigación, ésta exigía a los estudiantes para profesor que consideraran los problemas procedentes de los libros de texto como medios para apoyar el desarrollo de la comprensión del proceso de clasificar. Este objetivo, puesto de manifiesto por las cuatro cuestiones dadas (A1, A2, B1 y B2) ha obligado a los estudiantes para profesor a hacer visible los elementos matemáticos que son claves en el proceso de clasificar: la manera en la que el uso de los criterios de clasificación (diagonales congruentes, ángulo formado por las diagonales, congruencia de los lados, ...) permiten considerar clasificaciones inclusivas y la implicación que tiene sobre el proceso de definir las figuras geométricas. En este sentido, la influencia del conocimiento de matemáticas para la enseñanza del estudiante para profesor sobre la forma en la que ellos caracterizaban la comprensión del proceso de clasificar cuadriláteros que hemos descrito es una consecuencia del diseño de las tareas empleadas. Teniendo en cuenta esta implicación, y asumiendo que desempaquetar los objetivos de aprendizaje no es una tarea fácil para los estudiantes para profesor ni los profesores (Morris, Hiebert y Spitzer, 2009), podemos derivar que las características de estas tareas de investigación podrían ser consideradas al diseñar tareas docentes en los programas de formación de profesores.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y de grupos de investigación emergentes GV/2014/075 of the Conselleria de Educació, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana

Referencias

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83–104). Westport, CT: Ablex.

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.
- Bartell, T.C., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 57-79.
- Callejo, M.L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros, & Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.
- Clements, D.H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For The Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, 44, 747-759.
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72.
- Fortuny, J. M., & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 23-37.
- Imre, S.Y., & Akko, Ç.H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalising number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 207-226.
- Magiera, M., van der Kieboom, L., & Moyer, J. (2013). An exploratory study of pre-ervice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in mathematics*, 84(1), 93-113.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.
- Morris, A.K., Hiebert, J., & Spitzer, S.M. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn? *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(5), 491-529.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 501-509). Bilbao: SEIEM
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education*, DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds.) (2010), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.
- Simon, M. (2006). Key developmental understanding in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 359-371
- Usiskin, Z., & Griffin, J. (2008). *The classification of quadrilaterals. A study of definition*. Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Wilson, P.H., Mojica, G.F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 103-121.

Zapatera, A., & Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM