¿Qué clase de signo es f ’(x) y cuál es su significado?

Vicenç **Font** Moll
Departament de Didàctica de les CCEE i la Matemàtica, Universitatde Barcelona
España
vfont@ub.edu

Resumen

Nos formulamos las preguntas siguientes: ¿qué clase de signo es$f'(x)$? ¿Cuál es el significado de $f'(x)$? ¿Cuándo una persona ha comprendido el significado de $f'(x)$? Con relación a la primera preguntaconcluimos que$f'(x)$ puede ser un símbolo o un índice dependiendo de las funciones semióticas en las que $f'(x)$ intervenga como expresión. Con relación a la segunda pregunta damos dos posibles respuestas: 1) si lo miramos desde una perspectiva elemental el significado de$f'(x)$ es la definición de función derivada, 2) si adoptamos una perspectiva sistémica, el significado es el uso que se hace de $f'(x)$, entendido como el conjunto de prácticas matemáticas en las que interviene $f'(x)$. Con relación a la tercera pregunta, nuestra respuesta es que la comprensión del texto de la definición de función derivada implica la activación de una trama de funciones semióticas.

Palabras clave: derivada, significado, función derivada, complejidad, articulación

Formulación de las preguntas

En muchos libros de texto del bachillerato español es habitual el uso de $f'(x)$ para representar a la función derivada. Por esta razón, en este artículo nos formulamos las preguntas siguientes: ¿Qué clase de signo es $f'(x)$? ¿Cuál es el significado de $f'(x)$? ¿Cuándo una persona ha comprendido el significado de$f'(x)$?

Respuesta a la pregunta ¿Qué clase de signo es $f'(x)$?

Símbolos, índices e iconos

Como punto de partida vamos a considerar la conocida clasificación de Peirce sobre los signos: iconos, índices y símbolos.Peirce (*CP* 3.360 y 61) considera que el signo está ligado al objeto en virtud de una asociación mental, y depende por tanto de un hábito. Estos signos son, con frecuencia, convencionales y arbitrarios (*símbolos*). Si el signo, en cambio, significa su objeto sólo sobre la base de una conexión real con él, como ocurre con los signos naturales y con los síntomas físicos, este signo es llamado *índice*. El tercer caso es aquél en el que la relación entre el signo y el objeto es de pura semejanza: entonces se tiene un *icono*.

La pregunta inicial se puede reformular de la manera siguiente: ¿qué clase de signo (índice, icono o símbolo) es $f'(x)$?

Para responder a esta pregunta es conveniente introducir un nuevo término teórico: función semiótica.

Funciones semióticas

Hjelmslev (1971) en su teoría del lenguaje usa las nociones de signo, expresión y contenido. La palabra signo la aplica a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido, que son los funtivos entre los que la función de signo establece una dependencia. También establece la semiótica connotativa como aquella en la que el plano de la expresión está constituido por otra función.

<table>
<tr><td>Expresión</td><td>Contenido</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión</td><td>Contenido</td></tr>
</table>

Una función semiótica según Eco es:

> “Un signo está constituido siempre por uno(o más) elementos de un PLANO DE LA EXPRESIÓN colocados convencionalmente en correlación con uno(o más) elementos de un PLANO DEL CONTENIDO (…) Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua”. (…) (Eco, 1991, 83-84).

En el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2008) las funciones semióticas se conciben, de manera metafórica, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial); un plano de contenido (objeto final); un criterio o regla de correspondencia. Tanto el plano de la expresión como el del contenido pueden ser objetos materiales o mentales. Esta manera de entender las funciones semióticas se inspira en una larga tradición que va de las ideas de Peirce a las de Schütz, pasando por las de Husserl. La noción de signo, tal como la describe Peirce, es un aparejamientoindividual entre dos fenómenos asociados que pueden ser físicos o mentales. En cambio, el signo de Saussure apareja dos fenómenos mentales ″El signo lingüístico no une una cosa y un nombre, sino un concepto y una imagen acústica (...)Llamamos signo a la combinación del concepto y de la imagen acústica″ (Saussure, 1990, pp. 110-111). Consideramos que la interpretación de las funciones semióticas que se propone en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática generaliza la noción de representación usada en las investigaciones de tipo cognitivo que se han realizado en el campo de la educación matemática.

En el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Font, 2001) se postula la hipótesis de trabajo siguiente: las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de las representaciones ostensivas (dominio de lo público) y de las mentales (dominio de lo privado) activadas en las prácticas matemáticas, realizadas dentro de un determinado “juego de lenguaje” (Wittgenstein, 1953). En nuestra opinión, las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza dentro de un determinado juego de lenguaje.

Respuesta a la primera pregunta

La respuesta a la primera pregunta es: depende de las funciones semióticas en las que *f* ’(*x*) intervenga como expresión.

Una de las funciones semióticas en las que *f* ’(*x*) es el plano de la expresión es la siguiente:

Expresión	Contenido
f´(x)	Derivada

Se trata de una función semiótica que suele ser establecida por cualquier persona con unos mínimos conocimientos de cálculo diferencial y se basa en la existencia de un criterio convencional mediante el cual se ha establecido que *f* ’(*x*) es una notación que representa a la función derivada. En este caso, la respuesta a nuestra pregunta sería que *f* ’(*x*) es un signo que, según la clasificación de Peirce, se ha de considerar un símbolo.

Por otra parte, se puede considerar que *f* ’(*x*) está relacionada (señala, o es un síntoma) con la función *f* (*x*) de la cual es su derivada. Para hacer esta relación es necesaria una cadena de funciones semióticas como la siguiente:

<table>
<tr><th colspan="2">Expresión</th><th>Contenido</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>f(x)</td></tr>
<tr><th>Expresión</th><th>Contenido</th><td></td></tr>
<tr><td>f'(x)</td><td>Derivada</td><td></td></tr>
</table>

En este caso, la respuesta a nuestra pregunta sería que *f* ’(*x*) es un signo que, según la clasificación de Peirce, se ha de considerar un índice ya que dirige la atención hacia *f*(*x*). También se puede decir, utilizando los términos “connotación” y “denotación”,que *f*’(*x*) denota al concepto “derivada” y connota a “*f*(*x*)”.

El uso de *f* ’(*x*) como un índice está implícito, por ejemplo, en la metáfora o la analogía de la “sombra”, utilizada por muchos profesores cuando explican en sus clases que la función derivada es (como) la “sombra” de la función *f*(*x*). O bien cuando explican que*f*’(*x*) se llama “función derivada” precisamente porque “deriva” de *f*(*x*), o cuando explican que *f*’(*x*) se construye a partir de *f*(*x*), etc.

Respuesta a la pregunta ¿Cuál es el significado de *f* ’(*x*)?

Cuando se ha dicho que *f* ’(*x*) es un símbolo, la razón que se ha dado es que, cualquier persona con unos mínimos conocimientos de cálculo diferencial, conoce la definición de derivada de una función y la existencia de un criterio convencional mediante el cual se ha establecido que *f* ’(*x*) es una notación que representa a la función derivada. Por tanto, es razonable concluir que el significado de *f*’(*x*) es la definición de función derivada. Esta concepción, se puede considerar como una manera “elemental” de plantear el problema. Desde este punto de vista, para especificar el significado de $f'(x)$ basta dar una definición.

Otra posible manera de afrontar el problema es hacerlo en términos de comportamiento. Desde este nuevo punto de vista, conocer las cualidades de un objeto equivale a conocer su comportamiento posible, o sea, el conjunto de relaciones predicables de él. Desde esta perspectiva el significado de un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con él. Esta concepción, que se puede considerar pragmatista, nos da una perspectiva “sistémica” ya que se considera que el significado de $f'(x)$es el conjunto de prácticas matemáticas en las que el uso de esta expresión (u otras que se consideran equivalentes) es determinante para su realización.

En el marco del EOS se ha profundizado sobre la mirada sistémica de los objetos matemáticos y su significado, introduciendo la idea de significados parciales y su descripción en términos de prácticas y configuraciones de objetos primarios activados en dichas prácticas. Esta mirada compleja se ha aplicado a diferentes objetos matemáticos, en particular en Pino, Godino y Font (2011) para la derivada.

En el EOS se considera que para la realización de una práctica matemática se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e. g., plantear y resolver un problema de derivadas) vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones que componen la práctica son satisfactorias. En consecuencia, cuando una institución matemática realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado articulado de situaciones – problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, llamado en el EOS configuración epistémica de objetos primarios.

Lo que en los planteamientos filosóficos de tipo platonista se considera un objeto matemático con existencia independiente de las personas (por ejemplo, la derivada), en el EOS (Font, Godino y Gallardo, 2013) se explica como un objeto que emerge delas distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. globalmente (holísticamente) sobre los objetos primarios de diferentes configuraciones epistémicas. Dicho en otros términos, este objeto sería el contenido al que se refiere o indica globalmente, explícita o implícitamente, el par (prácticas matemáticas, configuración epistémica de objetos primarios activada en dichas prácticas).

Para el objeto matemático derivada, Pino, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediantenueve configuraciones epistémicas : 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8)cálculo de diferencias y, 9) derivada como límite.

Respuesta a la pregunta ¿Cuándo una persona ha comprendido el significado de $f'(x)$?

Si entendemos el significado como uso, diremos que una persona comprende, entiende, sabe, etc. el significado de $f'(x)$ cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas matemáticas, lo cualimplica concebir la comprensión también como “conocimiento y aplicación de las normas” que regulan la práctica.Se trata, pues, de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren.Desde esta perspectiva, un sujeto comprende el significado de $f'(x)$ cuando realiza prácticas correctas en las que ha de poner en funcionamiento diferentes significados parciales de la derivada (como límite del cociente incremental, como pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f*, como velocidad instantánea, etc.).

Si entendemos el significado como una definición, nos podemos preguntar en qué consiste la comprensión de una definición. Nuestra respuesta es que para comprender la definición, un alumno tiene que poner en funcionamiento una trama de funciones semióticas

La definición de derivada como contexto de reflexión

Como contexto de reflexión vamos a utilizar el análisissemiótico realizado en Font y Contreras (2008) de la siguiente definición de derivada que se halla en un libro dirigido a estudiantes españoles de bachillerato (16-17 años):

> « 1. Función derivada de una función.
>
> Consideremos ahora, dada una función$y = f(x)$, otra función nueva que asocia a cada punto *a* del dominio de *f* su derivada *f* ‘(a) cuando exista. Esta función es la función derivada de $y = f(x)$ y se representa con$f'(x)$ o y'.
>
> $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ »

En el libro de texto, antes de esta definiciónse ha definido la derivada de la función en un punto.

Trama de funciones semióticas

En Font y Contreras (2008) se argumenta que para comprender la definición anterior, un alumno hipotético tiene que poner en funcionamiento (plausiblemente)una trama de funciones semióticas como la que se describe en la figura 3. Para ello interpretan, de entrada, la comprensión de la definición de función derivada por un sujeto en términos de las funciones semióticas que éste debe establecer y consideran como expresión o contenido de dichas funciones semióticas la faceta extensiva-intensiva (particular-general) de los objetos matemáticos.

En concreto, se considerarán lasiguiente tipología de funciones semióticas:

Tabla 1

Tipos de Funciones Semióticas

	Extensional	Intensional
Extensional	FS1	FS2
Intensional	FS3	FS4

1) FS1: Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con otra entidad extensional

FS1.1 Relaciona un objeto con otro de la misma clase.

FS1.2Relaciona un objeto con otro que no es de la misma clase.

2) FS2: Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con una entidad

intensional

FS2.1 Relaciona un objeto con la clase a la que pertenece.

FS2.2 Relaciona un objeto con una clase a la cual no pertenece.

3) FS3: Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con una entidad extensional.

FS3.1Esta función semiótica relaciona una clase con un ejemplo de la clase.

FS3.2 Esta función semiótica relaciona una clase con un objeto que no es de la clase.

4) FS4: Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional.

FS4.1 Esta función semiótica define una clase de objetos de manera diferente.

FS4.2 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional diferente.

Esta tipología de 8 funciones semióticas surge de la reflexión sobre uno de los elementos cruciales de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos y de la observación de episodios de aula en los que se fijan sus reglas de uso. Hay que resaltar, pues, que,para justificar que la compresión se puede describir mediante una trama de funciones semióticas, se recurre a entender también la comprensión como el uso competente que se deriva del conocimiento y aplicaciónde normas.

Esta tipología de funciones semióticas se aplica en Font y Contreras (2008) a la definición del libro de texto para caracterizar la trama de funciones semióticas que debe activar el alumnos para comprenderla (figura 3). Las funciones semióticas señaladas con * en la figura 3 no están explícitamente consideradas en el texto de la definición, las que no tienen el asterisco si lo están.

FS3.1: Esta función semiótica indica que, de la clase de todas las funciones, se considera una función concreta $y = f(x)$; FS2.2: Relaciona un objeto (la función) con una clase a la cual no pertenece (su dominio); FS3.1: Relaciona la clase (el dominio) con un elemento de dicha clase (el valor a); FS1.2: Relaciona un extensivo (a) con otro($f'(a)$); FS2.1: Relaciona el par (a , $f'(a)$) con la clase de los pares (a , $f'(a)$); FS3.2: Relaciona la clase de pares (a, $f'(a)$) con el objeto función derivada; FS1.2: Es una función semiótica de tipo representacional que relaciona el extensivo función derivada con el extensivo y'; FS1.2: Es una función semiótica de tipo representacional que relaciona el extensivo y' con otro extensivo $f'(x)$.

Además de las funciones semióticas anteriores hay dos señaladas con interrogante que se dejan a cargo del alumno.Por una parte, se deja a cargo del alumno la última función semiótica que permite entender la función derivada como un objeto conceptual intensivo. En efecto, dicha función -que es del tipo FS2.1, ya que el alumno tiene que entender que la función derivada obtenida a partir de la función $y = f(x)$ es un miembro de la clase de las funciones derivadas-, puede conducirle a un conflicto semiótico potencial, aunque el texto posteriormente proponga actividades que permiten superar dicho conflicto.

Más grave aún nos parece dejar bajo la responsabilidad del alumno la penúltima función semiótica que permite la interpretación de$f$ '(x) como $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ya queesta última, a nuestro entender, sólo se podría efectuar si el alumno ha completado la trama anterior con las funciones semióticas que aparecen en la figura 3 señaladas con asteriscos: FS1.2*: De tipo representacional y relaciona un extensivo con otro extensivo; FS2.1**: Relaciona un elemento con la clase a la que pertenece

Estas funciones semióticas tienen en común que todas ellas son de tipo representacional, en el sentido de que facilitan que la expresión se considere una representación del contenido, pero además pueden ser de tipos diferentes según que la expresión o el contenido sean extensivos (particulares) o intensivos (generales) y según cuál sea el criterio de correspondencia entre la expresión y el contenido. Por ejemplo, la FS2.1 por una parte es representacional, en el sentido de que el caso particular se puede tomar como un representante de la clase, pero por otra parte es de tipo metonímico (parte-todo) ya que un extensivo (una parte) se toma por el todo (la clase), en este caso el criterio de correspondencia es el de “pertenencia”. En algunos casos las funciones semióticas son exclusivamente representacionales(por ejemplo, la FS1.2 de la figura 3 que relaciona *y´* con *f´*(*x*)).

Una vez expuesta (figura 3) la trama completa de funciones que se considera que el alumno debe activar para comprender la definición de la derivada del libro de texto, en Font y Contreras (2008, p. 44) se justifica la plausibilidad de dicha trama con argumentos como los siguientes:

“(…) cuando, en la definición de derivada del apartado 4.1, se dice “*dada una funcióny = f(x)*”, hay que tener en cuenta que el autor del texto pretende dar la definición de la función derivada de cualquier función. Para ello, lo primero que hace es dirigir la atención del alumno a “una función”, es decir, se pasa de lo general a lo particular y, por tanto, se ha introducido un objeto particular mediante una función semiótica intensivo/extensivo (una F3.1).”

“Cuando en la definición se dice “…*que asocia a cada punto a del dominio de f su derivada f '(a) cuando exista*.”, a un valor concreto a se le hace corresponder otro valor concreto*f* ‘(*a*). Por tanto, hemos considerado una función semiótica del tipo FS1.2.

Consideración final

Este trabajo ha comenzado con la formulación de las siguientes tres preguntas: ¿qué clase de signo es *f ’*(*x*)? ¿Cuál es el significado de *f ’*(*x*)? ¿Cuándo una persona ha comprendido el significado de *f ’*(*x*)? En el intento de responderlas ha emergido una característica esencial de los objetos matemáticos. Nos referimos a que una característica de los objetos matemáticos que deben ser enseñados y aprendidos es su complejidad.Dicha complejidad lleva a pensar no en un objeto unitario sino en un sistema complejo formado por partes o componentes. Otro aspecto que ha emergido en este trabajo es que la articulación semiótica (entendida como el resultado de una trama encadenada de funciones semióticas)juega un papel relevante en la articulación de esta complejidad.

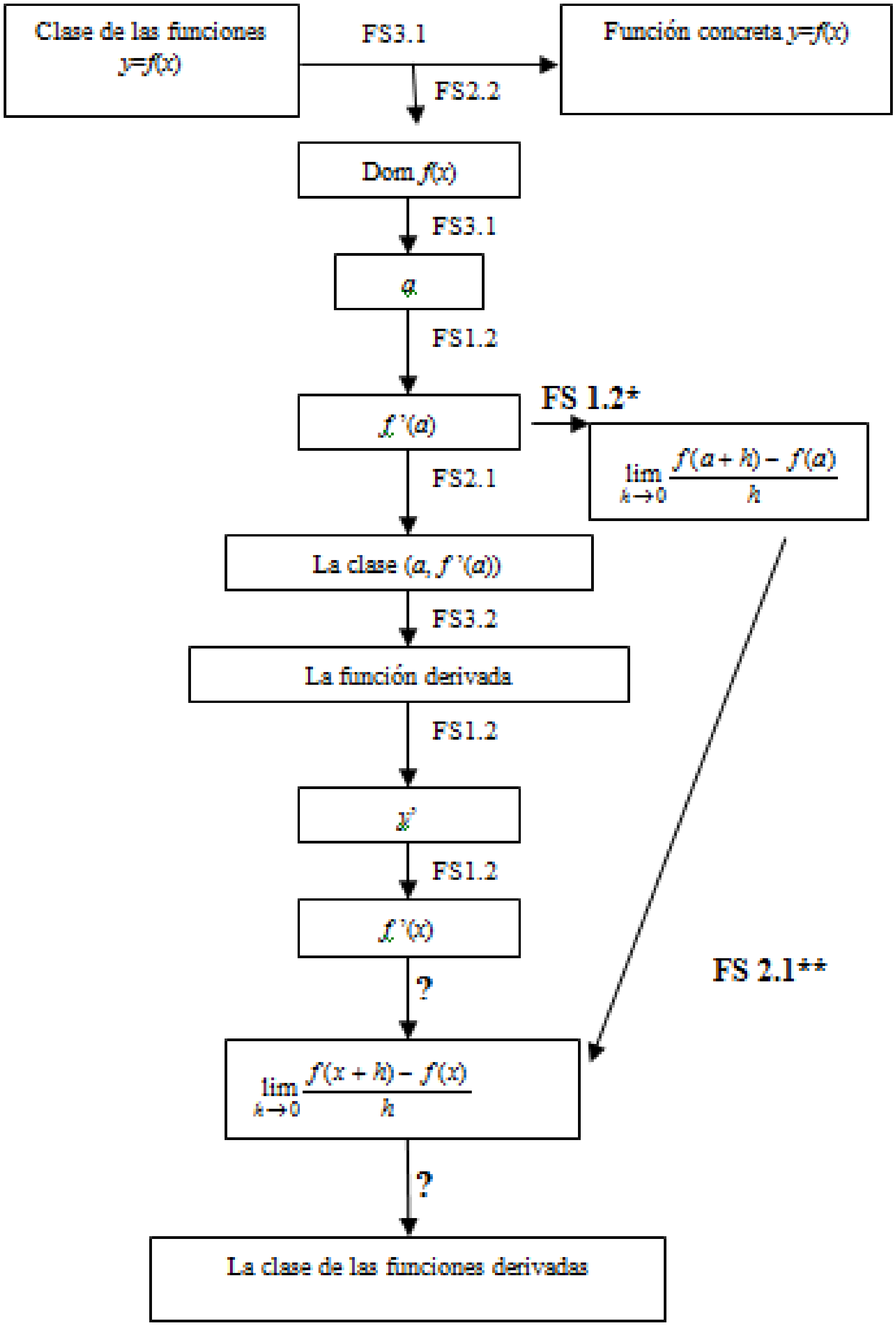

Figura 3. Trama de funciones semióticas

Agradecimientos

Este trabajo de investigación se ha llevado a cabo en el contexto del siguiente proyecto: EDU2012-32644, “Desarrollo de un programa por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas”, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Eco, U. (1991). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Font V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas.*POME, 14*, 1-36.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education.*Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices.*Educational Studies in Mathematics, 82*, 97–124.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae*. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*, 7-37.

Hjelmslev, L. (1971). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos.

Peirce, C.S. 1965. *Collected papers*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada..*Educação Matemática Pesquisa, 13*(1),141-178.

Saussure, F. (1916). *Curs de lingüística general*. Barcelona, Edicions 62, 1990 (ed. usada).

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.