
# Representaciones dinámicas como apoyo para la interiorización del concepto de transformación lineal

César Fabián **Romero** Félix
Cinvestav-IPN
México
cesar.rfelix@gmail.com
Asuman **Oktaç**
Cinvestav-IPN
México
oktac@cinvestav.mx

**Resumen**

Se presentan algunas observaciones y ejemplos de las ventajas brindadas por las representaciones dinámicas para interiorizar concepciones Acción referentes a transformaciones lineales, en el sentido de la teoría APOE (Arnon et al., 2014). El análisis presentado es parte de una investigación de doctorado sobre la construcción mental del concepto de transformación lineal apoyada en la coordinación de registros de representación (Duval, 1999) estáticos y dinámicos. Se identifican a las representaciones dinámicas de vectores y transformaciones del plano como facilitadores del mecanismo de interiorización para lograr concepciones de linealidad; tras la aplicación de actividades de enseñanza apoyadas fuertemente en representaciones gráficas dinámicas.

*Palabras clave*: Álgebra lineal, transformaciones lineales, teoría APOE, registros de representación, representaciones dinámicas, GeoGebra.

## Introducción

El presente reporte muestra algunos de los avances de una investigación doctoral acerca de las construcciones mentales en el aprendizaje de las transformaciones lineales del plano en un entorno de aprendizaje dinámico creado con GeoGebra para estudiantes universitarios. La propuesta de enseñanza está dirigida por un análisis teórico desde un punto de vista que intenta coordinar las teorías de representaciones semióticas de Duval (1999) y la teoría APOE (Arnon et al., 2014). Las actividades de enseñanza que se diseñaron fueron apoyadas generalmente con el uso de applets creados en GeoGebra con la intención de evitar las complejidades inherentes a los registros de representación formales, así como evitar y superar diversas dificultades de aprendizaje reportadas por otros investigadores (ver Soto et al., 2012).

Proponemos que para el caso específico de transformaciones lineales podría ser conveniente iniciar la construcción del concepto partiendo de acciones que utilicen representaciones gráficas dinámicas en un ambiente diseñado con GeoGebra. Partiendo de las construcciones gráficas y favoreciendo la articulación de registros, se espera obtener concepciones independientes de los registros, concepciones que puedan ser utilizadas para cualquier representación.

Mediante la interacción con ambientes dinámicos se buscó que los estudiantes tuvieran la oportunidad de construir el concepto de transformación lineal gráficamente, a través de la interacción con sus representaciones para resolver problemas. Las actividades que los estudiantes tenían que realizar favorecían además la coordinación de los registros gráfico y algebraico, estableciendo conexiones entre ambas representaciones y buscando constantemente pasar de un registro a otro para resolver problemas.

Se describirán en este reporte algunas observaciones acerca del papel de las representaciones dinámicas durante la transición de concepciones Acción a concepciones Proceso de las propiedades de linealidad y de transformación lineal. Estas observaciones se realizaron a partir del análisis de un examen diagnóstico, observaciones de clase, examen posterior a la enseñanza y entrevistas individuales.

## Concepto de referencia

La definición escrita del concepto transformación lineal tiene algunas variaciones en los libros comúnmente usados en cursos de Álgebra Lineal. Podemos organizar las definiciones en dos categorías: las que utilizan dos propiedades de linealidad y las que presentan ambas propiedades de linealidad como una sola. Para facilitar un primer acercamiento simplificado del concepto a los estudiantes, decidimos tomar como referencia una definición que use dos propiedades; conocidas también como propiedades de linealidad. La definición aparece como sigue (adaptada de Friedberg, Insel & Spence, 2002, p. 65):

**Definición**: Sean $U$ y $V$ espacios vectoriales (sobre $K$). Llamamos una función $T: U \to V$ una **transformación lineal de $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{V}$** si para todos $x, y \in U$ $x, y \in U$ y $c \in K$ tenemos que

(1) $T(c \cdot x) = c \cdot T(x)$ (2) $T(x + y) = T(x) + T(y)$

Nos parece pertinente aclarar en qué sentido la anterior es considerada como referencia. No se busca directamente que los estudiantes puedan reproducir la definición escrita como aquí aparece (aunque sería conveniente), se busca que los estudiantes desarrollen las concepciones a las que las expresiones escritas de manera formal y en lengua natural representan. De tal manera, sería satisfactorio que los estudiantes muestren haber construido tales concepciones de las propiedades 1 y 2 incluso si su dominio de los lenguajes mencionados no les permitiera exteriorizar la definición escrita como aparece en el libro.

# Elementos teóricos

## Teoría APOE

APOE estudia las concepciones logradas a través de la abstracción reflexiva, idea que surge de Piaget, quien la identificaba como:

> El principal mecanismo para las construcciones mentales en el desarrollo del pensamiento y [al mismo tiempo] el mecanismo mental por medio del cual todas las estructuras lógico-matemáticas son desarrolladas en la mente de un individuo (visto en Arnon et al., 2014, p. 6).

Por tal razón, éste es el tipo de abstracción que se debería buscar en el aprendizaje de matemáticas, pero no es el único posible. Piaget describía también abstracciones empíricas y pseudo-empíricas. Las diferencias entre los tres tipos de abstracción se pueden describir en términos de la actividad de los sujetos: la *abstracción empírica* genera conocimiento a partir de la observación de Objetos externos, como la idea de color o peso que se obtienen después de percibir a través de los sentidos esas características intrínsecas de los Objetos; la *abstracción pseudo-empírica* va un paso más allá, después de actuar sobre los Objetos el sujeto les atribuye propiedades que no eran originalmente parte de estos, como la cardinalidad de un conjunto obtenida tras la correspondencia uno a uno con elementos de otro conjunto que el sujeto ha ordenado; por último, la *abstracción reflexiva* consiste en la coordinación general de acciones, obtener propiedades a partir de acciones mentales o físicas, de manera consciente pudiendo incluir la separación entre la forma y el contenido obteniendo abstracciones cada vez en un plano superior del conocimiento (visto en Dubinsky, 1991, pp. 97-99).

La teoría APOE extiende el análisis de la abstracción reflexiva en el aprendizaje de matemáticas, describiendo las etapas de conocimiento mencionadas por Piaget mediante las construcciones mentales que le dan nombre a la teoría: Acción, Proceso, Objeto y Esquema; describiendo además los mecanismos para desarrollar cada una de éstas. Describe la construcción del conocimiento matemático, en términos generales, como una progresión de estructuras mentales lograda a través de los mecanismos de abstracción reflexiva. Las relaciones entre estas estructuras y mecanismos son representadas con el siguiente diagrama.

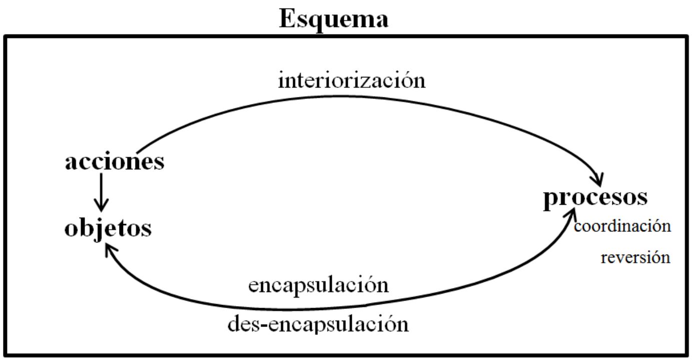


*Figura 1.* Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18).

La teoría propone que el desarrollo de las construcciones mentales sigue un ciclo auto-retroalimentado , logrando con cada iteración del ciclo concepciones de mayor complejidad y generalidad (Arnon et al., 2014. pp. 18-26). Se puede tomar como inicio del ciclo Acciones sobre Objetos ya existentes, éstas son realizadas de manera externa al sujeto manteniendo siempre los mismos pasos y en el mismo orden. Una concepción Acción de transformación lineal permitiría a un sujeto sólo "puede tomar dos vectores particulares de $U$ y sumarlos mediante la adición definida en este espacio, determinar su imagen bajo $T$ como elemento de $V$, obtener un nuevo elemento de $V$ y comparar los vectores resultantes" (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010, p.

104).

La manera inicial de desarrollar concepciones Proceso es la *interiorización de* las acciones. Teniendo una concepción Proceso dejan de ser necesarios los estímulos externos para poder realizar las Acciones y se obtiene también control interno sobre las partes de éstas; se puede imaginar u omitir pasos y revertir el orden de éstos mentalmente. También se pueden coordinar concepciones Proceso para formar nuevos Procesos, por ejemplo el Proceso de duplicación (multiplicar por dos) se puede coordinar con el Proceso de números naturales para obtener el Proceso de números pares.

Enfrentándose a la necesidad de aplicar acciones a lo que se percibe como un Proceso se inicia el mecanismo de *encapsulación*; con ella los Procesos dejan de ser acciones interiorizadas y llegan a ser entes por sí mismos, Objetos. Cuando se ve el Proceso como un todo, al cual se le pueden aplicar Acciones, y se construyen estas Acciones para aplicarlas de manera externa o mental, se dice que el Proceso ha sido encapsulado en un Objeto. Para el caso de transformación lineal, la encapsulación permite realizar composiciones y también poder ver a las transformaciones como elementos de algún conjunto y con ello formar un espacio vectorial de transformaciones lineales entre otros dos espacios (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012, p- 227).

Los mecanismos y construcciones mentales mencionados son utilizados para plantear posibles caminos específicos de la construcción mental de conceptos matemáticos. Tomando como prerrequisito algunas construcciones mentales se propone una progresión de procedimientos de abstracción reflexiva, por ejemplo una iteración del ciclo de la Figura 1, con los que se podría llegar a la concepción deseada.

**Elementos de la teoría de representaciones semióticas y de representaciones dinámicas**

La teoría de Duval (1999) se dirige principalmente a aquellos sistemas de signos que pueden ser clasificados como registros de representación, en palabras del autor:

> "Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis".
>
> "La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado ... Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar".
>
> "El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada… Naturalmente, existen reglas de tratamiento propias de cada registro".
>
> "La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial" (Duval 1998, p. 4).

Los registros de representación utilizados para representar los conceptos del Álgebra Lineal han sido analizados en diversas investigaciones. Resaltamos que "nos encontramos ante una falta de consenso sobre las definiciones de registros específicos" (Ramírez, Romero & Oktaç, en prensa) ya que "Pavlopoulou habla de un registro gráfico y uno algebraico, mientras que Soto analiza dos registros gráficos y dos algebraicos distintos" (p. 7). En este reporte nos referimos sólo a un registro algebraico y a las representaciones gráficas de vectores como flechas que parten de la intersección de dos rectas, llamadas comúnmente ejes.

Por otro lado, utilizamos también representaciones que originalmente nos podían ser tomadas en cuenta desde el punto de vista de la teoría de registros de representación; las representaciones dinámicas obtenidas a través de GeoGebra. Estas representaciones permiten representar Objetos que no podrían representarse en un ambiente estático, los Objetos variables, como la "*c*" en la expresión "*3c+2*" o la "*V*" en "$V \in R^2$". Desde el planteamiento de la teoría de registros de representación se han desarrollado nuevos tipos de representaciones gracias a los avances tecnológicos: las representaciones dinámicas continuas (ver Moreno, Hegedus & Kaput, 2008). Teniendo estas representaciones dinámicas continuas en el registro gráfico podemos, por ejemplo, construir un vector en pantalla primeramente como un vector fijo y al arrastrar el extremo de tal vector se puede convertir en un vector variable.

En matemáticas, la diversidad de registros de representación es prácticamente evidente, aunque es generalmente considerada por algunos como útil pero finalmente trivial para el aprendizaje de matemáticas ya que la comprensión de algún objeto en una de sus representaciones sería suficiente para su utilización en cualquier contexto. Sin embargo, es muy frecuente el problema de encapsulamiento de los aprendizajes restringidos a los registros en los que estos se llevaron a cabo. El encapsulamiento obstaculiza la comprensión conceptual y "se manifiestan principalmente por el fracaso de la conversión en caso de no -congruencia y por la ausencia de transferencia de los conocimientos más allá de las situaciones estándar de aprendizaje" (Duval 1999, p. 60). Duval afirma que la diversidad de registros no es sólo una útil casualidad, sino que es necesario utilizarla para el desarrollo de concepciones, en sus palabras: "***la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación***… [ya que] ***la comprensión conceptual aparece ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas***" (1999, p. 60).

La coordinación (o articulación) de registros consiste en la movilización y utilización conjunta, de los registros de representación semiótica. Ésta supone como condición principal la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro y se ve fuertemente afectada por los fenómenos de no congruencia entre representaciones. Con esta definición se podría suponer que sólo hay coordinación de registros cuando se utilizan varios explícitamente, sin embargo:

> "Un sujeto que ha desarrollado suficientemente la coordinación de los registros, muy bien puede atenerse a las representaciones de un sólo registro. Pero en realidad, él dispone potencialmente de representaciones que provienen de otros registros y que de manera latente permanecen asociadas a las que él utiliza" (Duval, 1999, p. 67).

De tal manera, una persona que decida trabajar externamente con sólo un registro también podría estar ejerciendo una buena coordinación de registros al considerar este acercamiento como la manera más eficiente de llegar a la solución tomando en cuenta los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en otros registros disponibles y el tipo de solución a la que desea llegar.

La coordinación de registros de representación es vista por Duval como primordial para el aprendizaje de las matemáticas debido a que "*toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa*" (1999, p. 67). Por lo tanto, un aprendizaje realizado en un solo registro, o que privilegie alguno en particular, limita la posible comprensión de los contenidos matemáticos estudiados; "incluso si han sido movilizados varios registros, simultánea o sucesivamente, esto no acarrea su coordinación" (p. 72), lo que complica aún más la situación.

## Uso conjunto de las teorías

La teoría de registros de representación no analiza construcciones y procesos mentales que no involucran directamente la utilización de representaciones externas, por tal razón nos parecen convenientes los desarrollos teóricos de APOE; principalmente sus resultados al utilizar los conceptos de abstracción reflexiva para analizar el pensamiento matemático avanzado. Encontramos varias investigaciones basadas en la teoría APOE que sirven para comprobar la utilidad de la teoría y de su ciclo de investigación para estudiar el aprendizaje del Álgebra Lineal, por ejemplo los trabajos de Roa-Fuentes y Oktaç (2010, 2012). Además, existe ya un acercamiento para el análisis del aprendizaje matemático que se apoya en ambas teorías: Trigueros y Martínez-Planell (2010) utilizaron un marco compuesto por la teoría APOE y la teoría de representaciones semióticas para analizar el aprendizaje de funciones de dos variables.

Prevemos que el uso coordinado de las dos teorías como un solo marco permitiría ganar precisión y entendimiento sobre varios aspectos del aprendizaje de las transformaciones lineales: sobre el desarrollo de las estructuras mentales, el papel de la semiosis en el aprendizaje y la naturaleza de varias dificultades de aprendizaje.

### El papel de las representaciones dinámicas con respecto a las variaciones cognitivas

Consideramos posible que un uso inapropiado de registros de representación en el aprendizaje promueva la realización de abstracción pseudo-empírica en lugar de abstracción reflexiva. El aprendizaje generado por enseñanza mono-registro podría coincidir con las construcciones mentales desarrolladas por medio de la abstracción pseudo-empírica: forzosamente dependientes de los estímulos externos específicos de los cuales se obtuvieron, requiriendo la repetición de las situaciones originales para poder utilizar los conocimientos generados, en este caso, las mismas representaciones en las que se *aprendió* el concepto. Basados en los resultados sobre los aprendizajes fundados en la coordinación de registros, suponemos que las construcciones mentales desarrolladas de esa manera no caerían en la misma categoría que las obtenidas por la abstracción pseudo-empírica. La independencia de los registros obtenida por la comprensión integrativa nos lleva a suponer que el aprendizaje obtenido de esta manera coincidiría con las concepciones obtenidas por medio de la abstracción reflexiva o al menos facilitaría su desarrollo.

La teoría APOE no ignora la diversidad de tipos de representaciones en la actividad matemática y reconoce como un problema el equiparar la habilidad de conversión con el aprendizaje conceptual. Sin trivializar la actividad de conversión, se advierte que:

> “La razón por la cual los estudiantes tienen tantos problemas para realizar transiciones entre una representación y otra es que ellos van directamente de una representación a la otra (y así son enseñados) sin pasar por el significado cognitivo del concepto (dado por la descomposición genética)”(Arnon et al., 2014, p. 181).

El mismo Duval se expresa en contra de tal reducción, al hablar del modelo de aprendizaje centrado en la coordinación de registros, argumentando que “sería ingenuo creer que introducir ejercicios de conversión sobre algunos casos típicos sería suficiente para crear las condiciones favorables para la coordinación de los registros de representación en los alumnos” (1999, p. 172). Él advierte que estos intentos no funcionarían para desarrollar la coordinación de registros y, por lo tanto, tampoco para el aprendizaje conceptual:

> “Se ve pues que las tareas de conversión [algorítmicas o de algunos prototipos] de

> representaciones no pueden favorecer la coordinación de los registros de representación. Y esto, porque toda actividad de conversión presupone la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en el registro de partida y en el de llegada” (Duval, 1999, p. 73).

La discriminación de las unidades significantes no se puede lograr por completo de manera algorítmica, es por ello que el tipo de enseñanza de conversiones mencionado por Dubinsky necesariamente falla. Esta discriminación, como un elemento de la semiosis, corresponde a un tipo de abstracción (Duval, 1999, p. 14), y de tal manera parece susceptible a ser mantenida como abstracción empírica o pseudo-empírica y no alcanzar la reflexiva. En los casos de aprendizaje algorítmico de las conversiones parece sencillo argumentar que no se trata de abstracción reflexiva, pues se desarrolla simplemente con las características propias de los signos y no refiere a las características de los representados.

Duval (1999) aclara que “la discriminación de las unidades significantes de una representación, y la posibilidad de una aprehensión de lo que ella representa, depende de la aprehensión de un campo de variaciones posibles relativo a la significancia en un registro” (p. 74). En otras palabras, que la discriminación involucra *reflexiones* sobre los invariantes y las diferencias generadas al hacer variar las representaciones de un mismo concepto en diferentes registros para distinguir entre *variaciones cognitivas* y *neutras*: variaciones en los símbolos que cambian el *contenido* de la representación y las que no lo hacen. De tal manera, la discriminación de las unidades significantes, por medio de la identificación de las variaciones cognitivas, genera el establecimiento de relaciones entre las representaciones y los conceptos representados: conocimiento sobre las limitaciones y ventajas de cada registro en términos de posibilidades de representación y tratamiento.

## Características de la Investigación

Las observaciones presentadas son parte de una investigación de doctorado sobre la construcción mental del concepto de transformación lineal apoyada en la coordinación de registros de representación estáticos y dinámicos. Ésta es a su vez desarrollada por medio de una adaptación del ciclo de investigación APOE (Arnon et al., 2014). El ciclo propuesto dentro del paradigma APOE se compone de tres etapas, mostradas en el siguiente diagrama.

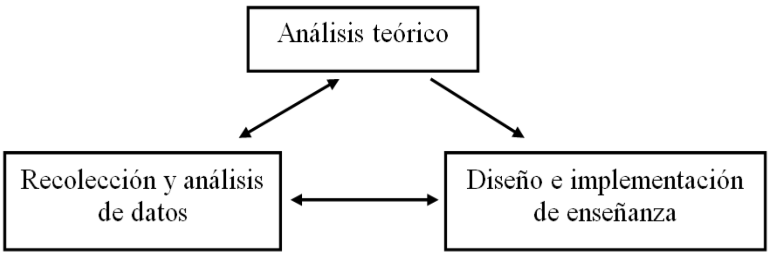


*Figura 2.* Ciclo de investigación (adaptado de Arnon et al., 2014).

Se está realizando prácticamente una iteración completa del ciclo propuesto, con algunas variaciones en la etapa de diseño e implementación de enseñanza y la inclusión de la teoría de representaciones semióticas para el análisis teórico. El diseño de enseñanza no fue realizado directamente con el ciclo ACE propuesto por APOE (Arnon et al., 2014, p. 57). Sin embargo, consideramos que la propuesta de enseñanza es compatible con el ciclo de investigación de APOE al promover activamente el desarrollo de las construcciones mentales guiadas por una descomposición genética.

Partimos de un análisis teórico con el que se plantea una descomposición genética preliminar que tome en cuenta el papel de las representaciones para el concepto de transformación lineal. La descomposición genética surge del análisis de libros de texto, resultados de investigaciones previas (principalmente Soto et al., 2012; Roa-Fuentes & Oktaç 2010, 2012) y experiencia práctica. Ésta se caracteriza por el desarrollo de concepciones Acción en un contexto gráfico dinámico y la búsqueda de coordinación de registros (en el sentido de Ramírez et al., 2013) desde los inicios del desarrollo conceptual para lograr construcciones independientes de las representaciones (Romero & Oktaç, 2014).

De tal manera, se propone desarrollar concepciones Acción y Proceso para las propiedades de linealidad, inicialmente dependientes de los registros utilizados. Posteriormente, mediante la articulación de los registros gráfico y algebraico, los Procesos dependientes a estos serían coordinados en nuevos Procesos que puedan ser utilizados en cualquier registro. Se espera que estos nuevos Procesos independientes de los registros sean más apropiados que los Procesos mono-registro para ser coordinados como Proceso de transformación lineal y posteriormente encapsulados y relacionados con otros Objetos.

Se seleccionaron estudiantes de Ingeniería Matemática del Instituto Politécnico Nacional para participar en la investigación, pues su perfil de estudiantes, las instalaciones de su institución, y el estilo del profesor encargado del grupo facilitaban la puesta en práctica del diseño de enseñanza. Durante las clases hubo etapas de trabajo individual y discusión en grupo sobre el problema general de clasificar las transformaciones del plano en dos categorías, las lineales y las no lineales.

La enseñanza diseñada se llevó a cabo en seis sesiones. Los ejercicios de clase y tareas extra-clase se presentaron a los estudiantes en una página web (http://goo.gl/r29KMh) para facilitar su acceso y permitir la repetición de las actividades para favorecer la interiorización; estos incluyeron actividades con applets de GeoGebra así como actividades para resolver *a mano* y situaciones para discutir en clase.

Los estudiantes interactuaron con applets pre-construidos en los que se podían manipular representaciones de vectores y transformaciones lineales y no lineales. Tomando como referencia representaciones tipo dynagraph (Goldenberg, Lewis & O'Keefe, 1992) en los applets se representan por separado los planos del dominio y co-dominio de las transformaciones (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**); se puede manipular un vector del dominio mientras GeoGebra calcula la imagen de tal vector bajo alguna transformación y la muestra en el co-dominio, opcionalmente mostrando el rastro del vector manipulado así como el de su imagen; en algunos de los applets se puede además modificar la transformación de manera gráfica o algebraica.

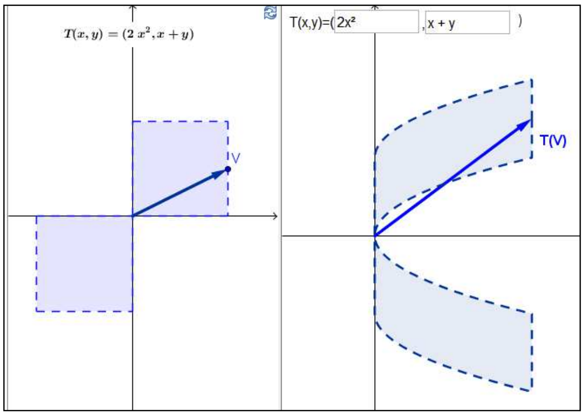


*Figura 3.* Ejemplo de applet sobre transformaciones lineales.

Los applets fueron diseñados para permitir la exploración libre de las situaciones representadas y por medio de las actividades de enseñanza se dirige la interacción para analizar las variaciones cognitivas de las representaciones. Mediante tal análisis, durante la resolución de problemas se definen por separado las propiedades de linealidad y se clasifican las transformaciones del plano según su cumplimiento como lineales o no lineales. Inicialmente los estudiantes manipulan directamente las representaciones gráficas de vectores y posteriormente tienen que manipular las transformaciones, gráfica o algebraicamente, para lograr algún efecto gráfico particular en la imagen de una región fija. En la mayoría de problemas y situaciones planteadas a los estudiantes se propicia la coordinación de registros al plantear los problemas en uno y requerir la solución o interpretación en otro; por ejemplo, después de plantear las propiedades de linealidad gráficamente se les pide a los estudiantes expresar la propiedad 1en el registro algebraico y analizar el hecho de que gráficamente la propiedad se refiere a dos características (colinealidad y proporcionalidad) mientras que en el registro algebraico se escribe como sólo una propiedad.

**El papel de las representaciones dinámicas en el tránsito a la concepción Proceso**

La interiorización hacia Procesos requiere generalmente de reflexión durante la repetición de las Acciones para llegar a abstraer los pasos de las Acciones; analizar una cantidad suficiente de repeticiones para lograr una versión interna de ellas. Las representaciones dinámicas hacen disponible una mayor cantidad de información, prácticamente de manera inmediata y continua a los estudiantes a través de manipulaciones intuitivas de las representaciones. Por tal motivo se aprecian como preferibles, en algunas situaciones, sobre las representaciones gráficas (no dinámicas) y las algebraicas ya que se alcanza la experiencia necesaria más rápidamente.

Por la naturaleza análoga, no discursiva ni formal de los registros gráficos, éstos dificultan la realización de tratamientos sin referirse a los Objetos representados. Los signos gráficos generalmente conservan más propiedades de los Objetos representados que las representaciones algebraicas (que son no-analógicas) (Duval, 1999, p. 34); de tal manera la formación o interpretación de las representaciones gráficas refiere a las propiedades de los Objetos más directamente. Esto facilita el análisis de las variaciones cognitivas, promueve la interpretación conceptual de las situaciones de aprendizaje y evita el abuso de representaciones vacías.

En nuestra investigación el caso más claro de desarrollo de la concepción Proceso mediante las representaciones dinámicas es el del estudiante A, mientras analiza en un applet la propiedad 2 para una transformación lineal. El estudiante A intentaba decidir gráficamente si la transformación T3 era lineal, partiendo de que T3 genera la imagen mostrada en la *Figura 4,* para esa región del dominio. El applet le permitía analizar cualquier vector de la región del dominio, moviendo la flecha V, y observar su imagen en el contra-dominio. Esta actividad se llevó a cabo después de desarrollar las concepciones Acción de las propiedades de linealidad y de haber definido las transformaciones lineales; se analizaron casos en los que las propiedades se cumplen por separado o de manera conjunta para algunos o todos los vectores del dominio.

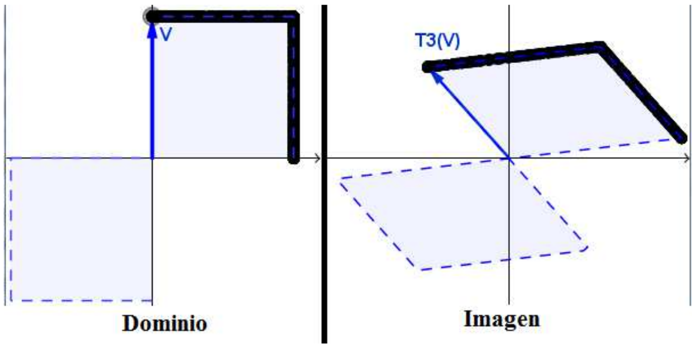


*Figura 4.* Uso de la concepción Proceso gráfica de la propiedad 2.

Después de analizar varios casos específicos y recordar la propiedad de que la imagen de un segmento de recta bajo una transformación lineal es otro segmento de recta, el estudiante A concluye que todas las sumas disponibles se encuentran en regiones similares a la marcada en el dominio de la Figura 4, por lo que sólo necesita comprobar que esas combinaciones lineales se conserven.

Entrevistador: Entonces ¿Qué hay que revisar? [para comprobar que T3 sea lineal]

Estudiante A: Lo fácil sería checar esto: todo esto y esto [señala la región del dominio marcada en la Figura 4] en estas líneas va a caer la suma más escalares [combinaciones lineales]. Lo único que hay que checar es que las imágenes de todos estos cayeran en línea recta. Entonces, ya, así [realiza un movimiento cíclico recorriendo el dominio de la transformación un segmento de recta a la vez y señala el movimiento en las imágenes] podría ser una forma rápida de checar que es combinación [que las imágenes de combinaciones lineales son las combinaciones lineales de las imágenes] sólo esto.

Para llegar a esa técnica, el estudiante coordina los Procesos de las propiedades de linealidad y el de combinación lineal en uno, el Proceso de transformación lineal. Luego realiza conversiones al registro gráfico y aplica su concepción Proceso (que es transferible entre los dos registros) para llegar a una técnica que lo convence de la linealidad de la transformación que analiza. En el applet sólo se podía analizar un subconjunto del plano, pero la técnica desarrollada se podría extender con el fin de analizar suficientes vectores para deducir la linealidad de las transformaciones gracias a que está basada en el Proceso de transformación lineal.

Para otro estudiante, el estudiante C, las representaciones dinámicas sirvieron como un apoyo para alcanzar concepciones Proceso en varias ocasiones. Mientras trabajaba en la actividad recién mencionada, pero con la transformación T2 del examen (Figura 5), inicialmente utilizó las representaciones gráficas como estáticas, probando las propiedades de linealidad para vectores fijos sin observar el dinamismo de las gráficas mientras las manipulaba y concluyó que la transformación era lineal. Sin embargo, al explicar su razonamiento en la entrevista, el estudiante C aprovecha que la representación dinámica le brinda más ejemplos para intentar mostrar la certeza de su deducción, sólo que esta era incorrecta debido a que inicialmente sólo comprobó las propiedades de linealidad para algunos vectores. A continuación se presenta cómo el estudiante C explicó su respuesta en la entrevista.

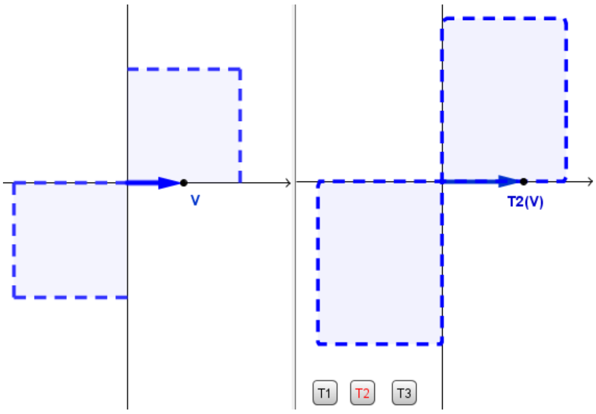


*Figura 5.* Transformación T2 del examen.

Estudiante C: Aquí está V [elige un vector, aparentemente al azar] y si lo multiplicamos por un medio te queda como por aquí [calcula con el applet y señala la ½ ·V]

Entrevistador: ¿Y las imágenes?

Estudiante C: Checamos las imágenes y te da más o menos… si T(V) está aquí [señala la pantalla] entonces [señala donde esperaba que estuviera T(½ ·V) y observa que no coincide con la imagen calculada por el applet]… [pausa larga]

Estudiante C: ¡Ay!

Entrevistador: ¿Qué pasó?

Estudiante C: ¡Ah no!

Entrevistador: ¿Esto sí lo checaste cuando estabas haciendo el examen?

Estudiante C: No. ¡No es una transformación lineal!

Entrevistador: ¿Por qué?

Estudiante C: Porque no cumple con esa propiedad, la del escalar no cumple. No lo chequé…

El estudiante C en el examen había afirmado que la transformación era lineal, y había probado las propiedades de linealidad para algunos vectores, utilizando concepciones Acción. Después del extracto mostrado continúa desarrollando la concepción Proceso de la propiedad 1. Lo que resaltamos de este extracto es que las ventajas dinámicas y ejecutables de GeoGebra no se aprovechan de facto. En efecto, se pueden tratar a las representaciones como si fueran estáticas y desaprovechar la información disponible. El estudiante C siguió analizando la transformación T2 y encontró que la propiedad 1 se cumple para un subconjunto infinito de vectores del dominio, pero aun así no se cumple para todos y por lo tanto no puede ser llamada lineal.

En el problema del examen correspondiente al extracto anterior se analizan representaciones dinámicas como las mostradas en la Figura 5 para decidir si tres transformaciones distintas son lineales o no. En el siguiente problema se pide a los estudiantes aproximar la expresión algebraica de cada transformación y demostrar algebraicamente si las expresiones propuestas corresponden a transformaciones lineales o no. La mayoría de los estudiantes intentó realizar las demostraciones basados en las propiedades de linealidad y no en la manipulación ciega de representaciones, como utilizar el criterio de la fórmula general. Incluso estudiantes que durante el resto de la entrevista mostraron preferencia por estrategias algorítmicas desapegadas de los conceptos, partieron de las propiedades de linealidad para analizar las expresiones algebraicas. Interpretamos que se evita que las representaciones algebraicas sean vacías debido a su fuerte vínculo con las representaciones gráficas manejadas previamente. En este caso, desde el inicio las representaciones algebraicas se refieren a algo más que a los tratamientos posibles, y ese algo está suficientemente desarrollado para que una estrategia conceptual sea percibida como más útil.

Basados en observaciones como las mencionadas, proponemos que las representaciones gráficas dinámicas funcionan para los estudiantes como catalizadores del mecanismo de interiorización. Facilitan el análisis de las variaciones cognitivas al resolver problemas que involucren conversiones con otros registros, facilitando así la reflexión necesaria para la abstracción reflexiva.

## Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 173-201). México: Cinvestav.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del valle. (Traducido por Myriam Vega Restrepo).

Moreno, L., Hegedus, J., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(2), 99-111.

Friedberg, S., Insel, A., & Spence, L. (2002). *Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall.

Goldenberg, P., Lewis P. & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of an understanding of function. En G. Harel, & E. Dubinsky (Eds), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 235-260). Washington: Mathematical Association of America.

Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisif pour l´apprentissage de l´algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 5*, 67-93.

Ramírez, O., Romero, C. F., & Oktaç, A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez. & Y. Morales (Eds.), *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (pp. 537-547). República Dominicana.

Ramírez, O. Romero, C. F., & Oktaç, A. (en prensa). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de transformaciones lineales en el plano.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Roa-Fuentes, S., & Oktac, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(2), 199–232.

Romero, C. F. & Oktaç, A. (2014). Coordinación de registros y construcciones mentales en un ambiente dinámico para el aprendizaje de transformaciones lineales. Enviado para su publicación

Soto, J. L., Romero, C. F., & Ibarra S. E. (2012). El concepto de transformación lineal: una aproximación basad en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt, & C. Cortés (Eds), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Quebec, Canada: Loze-Dion éditeur inc.

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.