La constitución de la Unidad Similar a partir de las formas geométricas de la sección áurea concebida como proceso de matematización

Liz Pieranllely **Acero** Molina
Estudiante Maestría en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
lianllely@gmail.com
Angello David **Chaparro** Fonseca
Estudiante Maestría en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
angelodavidch@gmail.com

Resumen

El actual artículo establece los principales aspectos que constituyen el proyecto de investigación el cual se lleva a cabo para optar el título de magister en educación, el cual ha sido abordado desde el paradigma de la Educación Matemática Realista (EMR) y la Fenomenología Didáctica propuesta por Freudenthal (1983), con la finalidad de llevar a cabo un experimento de enseñanza que permita describir un proceso de matematización que posiblemente presentarían los estudiantes de grado séptimo, al momento de trabajar transformaciones geométricas, a partir de la implementación de una secuencia de actividades compuesta por tareas enmarcadas en las formas geométricas de la sección áurea, para la constitución de la unidad similar.

*Palabras clave***:** Unidad similar, Transformaciones geométricas, Educación Matemática Realista, Fenomenología didáctica, pensamiento multiplicativo.

El Pensamiento Multiplicativo y la Unidad Similar

Las exploraciones realizadas que conciernen al pensamiento multiplicativo hasta el momento, respecto a la comprensión de objetos matemáticos tal como la razón y la proporción, como las investigaciones realizadas por Bonilla y Romero (2005), MESCUD (2005) y Confrey (1994) exaltan principalmente las dificultades que se presentan al desarrollar este pensamiento en

las prácticas escolares enfatizadas en el contexto numérico, tal como se evidencia la constitución de la multiplicación como suma reiterada de los elementos que la compone.

Confrey (1994), realiza una propuesta de enseñanza y aprendizaje denominada conjetura *splitting*, la cual pretende constituirse en una alternativa para superar el énfasis de la práctica escolar en el contexto numérico, aludiendo a conformar una estructura multiplicativa basada en acciones primitivas como el trabajo de la partición continúa; originando así, un mundo de similaridad o multiplicidad de un original. Es de resaltar que Confrey (1994) dentro de su propuesta exalta el trabajo y la constitución de la similaridad desde el contexto geométrico.

Concibiendo la similaridad, que propone Confrey (1994), como un mundo caracterizado por describir un crecimiento el cual puede estar determinado por una unidad, Becerra y Romero (2008) han determinado esta como *unidad similar*, la cual describe como *la relación invariante entre el sucesor y el predecesor, siendo esta, en el mundo de la similaridad: la razón.* De esta forma, se asume la riqueza de la unidad similar como objeto matemático que puede constituir formas geométricas y que describen un crecimiento regulado a través de una razón (específicamente en nuestro proyecto, la razón áurea); generando a su vez una proporción continuada. Y de esta manera, la *unidad similar* pueda ser considerada como una práctica escolar alterna en la construcción de los reales positivos, tal como lo propone Confrey (1994) en referencia a la conjetura splitting.

Teniendo en cuenta la unidad similar como un objeto matemático que puede ser desarrollado por los estudiantes a partir del trabajo con la razón y la proporción, esta investigación tiene como objetivo diseñar y adaptar una secuencia de actividades que puedan propiciar la descripción acerca de un proceso de matematización que se presenta en los estudiantes, en el momento de trabajar transformaciones geométricas desde la razón áurea, y la unidad similar como resultado de la práctica matemática.

Consideración del paradigma de la Educación Matemática Realista

La Educación Matemática Realista (EMR), instituida por Freudenthal en los años 60, como oposición a los procesos de enseñanza con enfoque mecanicista presentada en las aulas modernas de Holanda; es considerada como una corriente didáctica que se caracteriza por generar prácticas escolares donde la matemática debe ser conectada con la realidad cercana a los estudiantes, tomando relevancia para la sociedad en orden a constituirse como un valor humano.

Partiendo de la premisa: "*existe una matemática para todos*", pensar matemáticamente se torna como una actividad humana a la cual Freudenthal (1983) denomina *matematización.* Según Bressan, Zolkower y Gallego (2004) los principios en que se basa la Educación Matemática Realista se representan en el siguiente diagrama:

Ilustración 1. Interpretación Principios EMR.

Este proyecto de investigación tiene como objetivo diseñar e implementar una secuencia de actividades que permita describir algún proceso de matematización que manifiestan los estudiantes de grado séptimo. Las actividades que constituyen esta secuencia están reguladas bajo los principios de la EMR, como lo es el análisis de contextos geométricos que propicia la sección áurea, la cual alude la propuesta de problemas que generen la actividad matematizada, el establecimiento de herramientas simbólicas y la propiciación de interacción como parte fundamental para la constitución de los conceptos de matematización.

La descripción del proceso de matematización que se derive de la secuencia de actividades, se realizará dentro del paradigma interpretativo (naturalista cualitativo) como lo denomina Nuñez (2010), el cual se caracteriza por concebir múltiples realidades, las cuales se lograrían estudiar casi únicamente de forma holística, identificando en ellas particularidades de tal modo que no exista predicción ni control de los sucesos por parte de los investigadores, sino una comprensión de los objetos estudiados. Esto en contra posición a la perspectiva positivista, donde se percibe la realidad como una sola y las investigaciones como fuente que logra predecir y controlar fenómenos estudiados.

Las Prácticas Escolares desde la Fenomenología Didáctica

De acuerdo con la EMR y teniendo en cuenta que Freudenthal (1983) define la *matematización* como una actividad estructurante y organizadora la cual está al alcance de todos los seres humanos; percibimos que las prácticas escolares están orientadas a postular como objetivo fundamental la constitución de objetos mentales desde contextos realistas a partir de la organización (matematización) de fenómenos presentes en el mundo real o en de las matemáticas.

Por otro lado, se denomina *fenomenología* cuando un *noumenon* es el medio de organización de los *phainomena;* es decir, un objeto de pensamiento que organiza fenómenos de la realidad. Al realizar un estudio de ésta relación -noumenan y phainomena- en la enseñanza y el aprendizaje, se denomina *fenomenología didáctica* de ese noumenon (Freudenthal, 1983).

En una traducción realizada por Puig (1997) de Freudenthal (1983) se establece lo anterior como:

> "La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa, en mi terminología, describir este noúmeno en su relación con los phainomena para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los phainomena para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos. Si en esta relación entre *noumenon* y *phainomenon* subrayo el elemento didáctico, esto es, si presto atención a cómo se adquiere tal relación en un proceso de enseñanza–aprendizaje, hablo de la fenomenología didáctica de ese *noumenon*" (Puig, 1997, p. 2).

Un objetivo del proyecto de investigación, es establecer una posible fenomenología didáctica acerca de la unidad similar, la cual se organiza a través de las estructuras matemáticas asociadas a la razón y la proporción, donde el mundo de fenómenos en los cuales está centrada la matematización, es la sección áurea; específicamente en las formas geométricas que la caracterizan. En otros términos, la construcción de formas geométricas que se realizan por medio de la razón áurea, describen un contexto de crecimiento (siendo este elemento un característica primordial para el desarrollo de la conjetura splitting). Estas formas crean un mundo similar

donde se fortalece la constitución de objetos como la razón y la proporción, la semejanza y la congruencia, entre otros.

El planteamiento de la fenomenología didáctica de la unidad similar, propone al investigador- docente, establecer las relaciones entre el *noúmeno* y el *phainomena* presentadas en situaciones reales donde las estructuras matemáticas permiten al estudiante ordenar y comprender la realidad.

Por otro lado la finalidad de la investigación, al describir el proceso de matematización que presentan estudiantes de grado séptimo cuando involucran formas geométricas de la sección áurea; nos posiciona dentro de un marco interpretativo, en el que queremos capturar (de forma precisa posible) dentro de la realidad construida en un ambiente de aprendizaje (fenomenología didáctica), una manera de proceder, actuar y proponer estrategias por parte de los estudiantes (mediado por nuestra propuesta e intervención en el aula), cuando se trabaja contenidos matemáticos para la consolidación de un objeto mental asociado a la razón y proporción (Freundenthal, 1983).

Lo que pretendemos desarrollar es un cuerpo detallado de procedimientos de un hecho que describe casos particulares. De esta forma, la realidad es considerada dinámica, múltiple y holística, la finalidad estaría encaminada a comprender e interpretar la realidad de los significados, acciones y concepciones de los estudiantes que en nuestro caso se centran en la matemática, cuando resuelven problemas (matematización) con formas geométricas de la sección áurea.

La Matematización como eje central de la observación

En el proceso de matematización de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas propuestas en la secuencia de actividades sobre fenómenos de la sección áurea, es posible identificar en algunas formas de proceder en el aula el nivel de constitución del objeto mental. Entre ellas, algunas acciones relacionadas a formas escritas y otras verbales, que son clasificadas en representaciones externas, y conciernen en nuestro caso a registros de representación y del lenguaje (corporal o verbal), que permiten generar modelos. Según Gravemeijer (2002) citado por (Bressan, 2009) "(…) el modelo es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto" (p. 3). En otras palabras, el modelo es el resultado de matematizar. En consecuencia existe dos usos representacionales del modelo, el primero cuando sirve para trabajo directo (acciones sobre él), y el otro, cuando se reflexiona sobre él (se busca propiedades y operaciones, etc.) (Bressan, 2009).

Por consiguiente, el proceso de matematización como organizador de la actividad tiene dos aspectos importantes: uno horizontal y otro vertical. El primero resulta cuando el estudiante apropia el problema (real o matemático) y lo lleva a términos matemáticos usando entre otros medios, el sentido común y la aproximación empírica. El segundo, se da cuando el trabajo de reflexión se hace dentro de las mismas matemáticas, pasando por procesos de generalización, prueba y rigor (Bressan et al, 2004). Este proceso de matematización es progresivo, en tanto que los estudiantes pasan por distintos niveles de compresión como lo establece el siguiente apartado:

> "En este proceso de matematización progresiva, la EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión. Estos niveles (Freudenthal, 1971, 1991; Gravemeijer, 1994, 2002) son: *situacional, referencial, general y formal,* y están ligados

> al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, sin constituir una jerarquía estrictamente ordenada" (Bressan et al, 2004, p. 6).

En conclusión, el proceso de matematización que está asociado al uso de representaciones externas en la creación de modelos en la resolución y comprensión de las tareas propuestas en la secuencia de actividades, permite evidenciar la constitución del objeto mental y el nivel de compresión en el que se posiciona el estudiante en un determinado momento.

Análisis de los apartados

Si bien, el actual estudio busca interpretar, describir y explicar situaciones en el aula donde se priorice la *matematización*, orientado desde EMR la cual propone, entre otras cosas, una postura concreta para el aula frente al currículo y la investigación didáctica; Bressan et al (2004) afirman:

> "El motor de este proceso es la investigación para el desarrollo (educativo), una metodología cualitativa/interpretativa basada en experiencias de aulas en las cuales se implementan secuencias didácticas y se observan, registran y analizan hitos, saltos y discontinuidades en el aprendizaje de los alumnos. Su objetivo es llevar a la conciencia el proceso de desarrollo y explicarlo" (p. 9).

Es así como consideramos el proceso investigativo y la reconstrucción de la realidad de manera particular, desde un proceso lógico- deductivo en el que es posible reevaluar etapas aún sin plantear un problema de manera específica; es decir, un problema totalmente conceptualizado. Así mismo, este enfoque maneja distintos tipos de instrumentos para recolectar datos en la observación, sin recurrir a la medición numérica donde los datos estandarizados determinan y predicen las conductas que se quiere observar (Hernández, Collado, Lucio y Pérez, 1998).

Teniendo en cuenta que la secuencia de actividades que se propone para implementar en el aula, se caracteriza por orientar la *matematización* de los estudiantes hacia la constitución de la *Unidad similar*; definimos el actual proyecto hace parte de una *investigación del diseño* como lo denomina Molina, Castro, Molina y Castro (2011), donde el modelo investigativo es un experimento de enseñanza, el cual busca analizar un diseño que permita comprender la realidad educativa.

A continuación se presenta las fases de investigación según la interpretación de Penalva, Roig, y Río (2009); Molina et al (2011) con base a la propuesta hecha por Cobb y Gravemeijer (2008), donde se distinguen las siguientes tres fases:

- *Fase 1: Diseño y planificación de la instrucción.* Esta fase se caracteriza por clarificar los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes que permitan delimitar las metas del proceso investigativo. También se refiere al diseño de tareas, específicamente la secuencia de actividades, que permite construir trayectorias de aprendizaje. En este sentido, es importante definir los medios de documentación de la investigación y la literatura que permita la construcción teórica del ambiente de aprendizaje conjeturado.
- *Fase 2: Experimentación en el aula o en un entorno virtual de las tareas diseñadas.* En esta fase se implementa el diseño planificado, denominado inicial, que dentro de esta perspectiva puede mejorarse en la medida que el docente- investigador y el investigador-observador, reformula las conjeturas iniciales, el trabajo de los estudiantes y el entorno de aprendizaje.

- *Fase 3: Análisis retrospectivo* Esta fase pretende construir un marco explicativo- histórico del proceso investigativo por el cual una serie de eventos locales (en el aula) puedan ser reproducibles. Por tanto, es importante justificar la selección de los eventos que se examinan y la importancia de los mismos en la historia de la clase.

A manera de conclusión, se interpreta el *experimento de enseñanza* como una investigación cualitativa, con la intención de explicar los eventos dentro de un ambiente de aprendizaje en este determinado aprendizaje y su probable adaptación a otro entorno educativo.

Conclusiones

Se espera con la aplicación de esta secuencia de actividades, identificar y describir los niveles de comprensión que se presentan en el proceso de matematización definida desde la EMR, en la constitución de objetos matemáticos asociados a la razón y la proporción en el trabajo del contexto geométrico; logrando aportar una forma alterna que pueda fortalecer el pensamiento multiplicativo bajo la corriente didáctica propuesta por Freudenthal (1983).

Por otro lado, es importante la enseñanza de estos conceptos mediante prácticas innovadoras para enfrentar al estudiante a la realidad en la que vive. En otras palabras, teniendo en cuenta la complejidad social en la que se vive, es necesario sofisticar los procesos matemáticos que pueda considerarse como herramientas que le permitan comprender y trasformar su realidad. De esta forma, se puede afirmar la necesidad de prácticas escolares diferentes que permitan desarrollar ideas y conceptos matemáticos de manera transformadora para que en realidad se prepare y afronte al individuo a un mundo social, cultural y político complejo (Bonilla y Romero, 2005).

Por lo tanto, ésta propuesta podría ser usada como una alternativa que permita diversificar las prácticas escolares que aporte a la estructura multiplicativa, sustentada en el concepto de la unidad similar por medio de trasformaciones geométricas que intentan desarrollar y comprender tópicos matemáticos como: la razón y la proporción desde la semejanza y la congruencia.

Referencias y Bibliografía

Bonilla, M., & Romero, J. (2005). La resolución de problemas: sus posibilidades para el desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Centro de investigaciones y desarrollo científico, 7*, 99-120. *CIDC*-Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

Bressan, A. (2009). Representaciones y modelos en la matemática realista. *Centro de Estudios de la Realidad Nacional*, *8*(37).

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta.* Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Recuperable en Internet: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Hernández, S. R., Collado, C. F., Lucio, P. B., & Pérez, M. D. L. L. C. (1998). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Mescud. (2005). *El pensamiento multiplicativo: una mirada de su densidad y complejidad en su desarrollo en el aula.* Informe de Investigación IDEP-COLCIENCIAS-Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88

Penalva, M. C., Roig, A., & Río, M. D. (2009). *Experimento de Enseñanza: Tareas de Aprendizaje de la Geometría en la formación de maestros de Educación Infanti*l. VII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. La calidad del proceso de enseñanza/aprendizaje universitario desde la perspectiva del cambio. Universidad de Alicante.

Puig, L. (1997) *Análisis fenomenológico. La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94).

Puig, L. (2001). N*otas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudental. H. Freundental: Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (textos seleccionados). Segunda edición. México: CINVESTAV.