Procesos de validación en Geometría en situaciones de conflicto

Victor Manuel **Guerrero** Rojas
Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional
México
vicwarrio@hotmail.com

Resumen

En este trabajo se reportan resultados preliminares de una investigación en desarrollo sobre los procesos de validación en situaciones de conflicto. En particular, observamos la racionalidad de los estudiantes cuando enfrentan tareas de interpretación y construcción de pruebas localmente válidas usando configuraciones geométricas, a partir de las cuales se plantean situaciones de conflicto. Participaron 6 estudiantes de primer año de licenciatura de matemáticas quienes trabajaron con lápiz y papel, individualmente y en grupo. Observamos que el conflicto cognitivo desarrolla la racionalidad de los alumnos quienes eligen con más cuidado la información que consideran relevante. Sin embargo, esto no ocurre de manera automática sino que depende de: (1) De la aceptación del conflicto y (2) La forma como se resuelve éste. El trabajo con este tipo de proposiciones mostró ser versátil ya que las preguntas pueden propiciar diversas aproximaciones cognitivas.

Palabras clave: Geometría, procesos de validación, conflicto cognitivo, razonamiento deductivo.

Planteamiento

Entre los objetivos de la enseñanza de la Geometría, tenemos aquellos en los que los estudiantes deben indagar las relaciones geométricas de objetos matemáticos, elaborar relaciones entre sus propiedades y comunicarlas de manera oral y escrita. Para que este proceso logre su cometido debe contar con un soporte en las reglas aceptadas por la matemática.

Sin embargo, lo anterior no es un proceso sencillo ni espontáneo para los estudiantes. Parte de las dificultades tienen su origen en la interpretación de las representaciones geométricas, organizar la información relevante que percibimos en ésta, además de la elección de la información adecuada para enlazar las relaciones estructurales pertinentes de manera coherente y utilizarlas en la solución de problemas o demostraciones. Consideramos que desarrollar adecuadamente estos aspectos requiere de un aprendizaje dirigido a la focalización de la información disponible en la representación utilizada, por lo que hay que atender la dualidad entre lo perceptivo y lo abstracto al mismo tiempo en las representaciones que usamos.

En particular, en este trabajo estamos interesados en analizar la racionalidad que se manifiesta cuando los estudiantes de licenciatura enfrentan tareas de interpretación y construcción de pruebas localmente válidas de ciertas configuraciones geométricas, de las que plantean situaciones de conflicto, trabajadas con apoyo en razonamientos inductivos, abductivos y deductivos.

Consideramos el uso del conflicto cognitivo para fomentar el desarrollo de la racionalidad de los estudiantes en los procesos de validación en Geometría, esto es, por un lado, la transición del uso de la figura de considerar los aspectos perceptuales hasta los que los dirigen hacia las propiedades estructurales de ésta, por el otro lado, la forma en que organizan discursivamente los argumentos empleados.

Antecedentes

La investigación en Matemática Educativa sobre los procesos de prueba en Geometría ha sido abordada desde distintas perspectivas y se han considerado diversos elementos que intervienen en el aprendizaje escolar. En este caso, se refiere en particular a la adquisición de concepciones adecuadas para enfrentar la tarea de validar en matemáticas. Los resultados de investigación muestran que las explicaciones de los estudiantes sobre la pertinencia de proposiciones Geométricas en general, son distintas a las aceptadas por la matemática.

Por principio de cuentas, una de las dificultades que enfrentan los estudiantes es que no creen en la necesidad de la demostración como una de las actividades del salón de clases (Alibert y Thomas, 1991; Balacheff, 2000). También Balacheff (2000), menciona dos obstáculos en la producción de las demostraciones geométricas: El primero es que la evidencia de los hechos se impone a la razón y el segundo se refiere a que la enseñanza de la matemática, despoja a los estudiantes de la responsabilidad de considerar la verdad de sus afirmaciones.

Distintas investigaciones (Bell, 1976; Balacheff, 2000; Marrades y Gutierrez, 2000; Harel y Swoder, 2007) muestran que el tipo de pruebas que realizan los estudiantes no corresponden necesariamente a las pruebas matemáticas.

Por otra parte, algunas investigaciones muestran la existencia de creencias que obstaculizan los procesos de prueba entre los estudiantes (Fischbein y Kedem, 1982; Vinner, 1983; Chazan, 1993). En particular, algunos de ellos consideran a la prueba deductiva como simple evidencia o como un método para verificar un caso particular; mientras que otros consideraran a la evidencia empírica como prueba, esto es, que actividades como la medición son suficientes para establecer conclusiones generales (Vinner, 1983; Chazan, 1993).

En los resultados anteriores, se observa que los alumnos tienden a utilizar espontáneamente argumentos no deductivos e información perceptual para validar sus afirmaciones, los cuales pueden ser reconsiderados por ellos si estos supuestos los llevan a situaciones de evidente conflicto. Suponemos que este tipo de situaciones podrían establecer una diferencia en la racionalidad del estudiante para reconsiderar la importancia a las definiciones, la coherencia y la necesidad de los procedimientos matemáticos.

Fundamentación teórica

Procesos de validación

En este trabajo estamos interesados en los procesos de validación de proposiciones matemáticas en el aula, los entendemos como aquellas manifestaciones del razonamiento del individuo que tienen como fin asegurar la certeza de una proposición dada.

En esta dirección nos apoyamos en Balacheff (2000) quien estudió los procesos de prueba de los estudiantes y estableció las diferencias que hay entre una prueba y una demostración. El autor mantiene que el papel y carácter de la situación es determinante para el tipo de pruebas que se realizan, donde su evaluación y las decisiones que se toman están relacionadas con los conocimientos del sujeto, el lenguaje y la racionalidad que se pone en juego.

Consideramos que las situaciones de validación deben propiciar que los estudiantes tomen decisiones para la organización adecuada de los fundamentos de sus pruebas, lo que a la larga les permitiría asumir la responsabilidad de las consecuencias que esto genere y en particular sobre la verdad de sus inferencias. En este proceso, los conflictos cognitivos también pueden jugar un papel que fomente un cambio en la credibilidad de los aspectos perceptuales hacia las propiedades estructurales de las figuras.

Las figuras Geométricas en los procesos de validación

En este trabajo consideramos, como Radford (2006), que la matemática es una actividad eminentemente simbólica por ello es importante establecer cómo es que funcionan los signos matemáticos, en particular, las figuras geométricas y como hemos dicho antes, en lo relativo con los procesos de validación en Geometría.

Al respecto del carácter simbólico, Duval (2006) señala que el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, dado que a diferencia de otros campos de conocimiento, no existen otras maneras de tener acceso a los objetos matemáticos si no es a partir de las representaciones semióticas.

Sobre las representaciones semióticas Duval (2006) afirma que: “la parte jugada por los signos, concretamente los sistemas semióticos de representación, no solamente es para designar a los objetos matemáticos o para comunicar sino también para trabajar con ellos” (Duval, 2006, p.107).

Este aspecto es de especial importancia por lo que debe ser considerado por la enseñanza de la geometría, así como las condiciones e inconvenientes que las representaciones pudieran añadir al proceso de aprendizaje en matemáticas.

En el caso de la geometría escolar, la actividad se realiza principalmente en dos sistemas de representación: el de las figuras y el del discurso (Duval 2002). Éstos necesitan llevarse a cabo de manera coordinada para lograr una actividad productiva, es decir, para resolver un problema es necesario auxiliarse y realizar transformaciones sobre la figura considerando en todo momento al discurso, ya sea en la enunciación de propiedades o en la elaboración de pruebas matemáticas.

De esta manera, en Geometría es mediante las representaciones que tenemos acceso a los objetos Geométricos. Éstas exhiben aspectos reconocibles y es por medio de estas cualidades que podemos trabajar las proposiciones matemáticas asociadas a las figuras.

De manera que, cuando enfrentamos un problema geométrico lo que tenemos es una representación particular, como representante de una categoría establecida a partir de la definición del objeto en cuestión, ésta debería ser considerada por el estudiante como asociada a ciertas propiedades abstractas del objeto geométrico representado, cuyo carácter es general. Esta situación nos revela la naturaleza dual entre lo ideal y lo finito (Mesquita, 1998).

Adoptar la distinción entre lo ideal y lo finito de la figura no ocurre de inmediato entre los estudiantes. En ocasiones, el aspecto de la representación puede ser tan dominante para el estudiante, lo que impide y distrae la atención de las propiedades matemáticas y por tanto no llegar a una solución o a una demostración del problema en cuestión.

Argumentación versus demostración

Comprender el proceso discursivo de los estudiantes que da cuenta de la forma en que organizan e infieren nueva información, resulta realmente complejo. En este apartado, con el fin de analizar las producciones discursivas de los estudiantes en los procesos de prueba, creemos necesario considerar los diferentes tipos de discursos que se establecen en el aula: el propio de la matemática y aquel que se establece en el lenguaje común, lo que nos lleva a distinguir entre argumentación y demostración.

Una postura sobre las diferencias y relaciones de la argumentación basada en el lenguaje común y la demostración es la señalada por Duval (2002, 2007), quien sostiene que son dos formas de razonamiento que no funcionan de la misma manera, pese a que utilizan los mismos conectivos proposicionales y las formas lingüísticas son semejantes.

Para aclarar lo anterior, desde un punto de vista cognitivo, Duval (2002, 2007) hace las siguientes distinciones entre la argumentación y la demostración, esta son: la diferencia entre el valor epistémico y el valor lógico de una proposición, el estatus del contenido de las proposiciones y la organización de la demostración respecto a la de la argumentación.

El autor considera que cualquier razonamiento, explícito o implícito, trabaja con proposiciones, las cuales tienen un valor y un estatus. Así que no hay razonamiento sin una organización discursiva, normada por diferencias funcionales entre las proposiciones que la componen (Duval, 2007).

Por otra parte, en este trabajo, consideramos que aunado a lo dicho por Duval, respecto a los discursos puestos en funcionamiento en el aula, es necesario tomar en cuenta los razonamientos abductivos e inductivos como estructuras que organizan el discurso de los estudiantes para inferir nueva información (Pedemonte, 2007). Lo anterior, con el propósito de dar sentido a la demostración a partir de los indicadores del rigor matemático.

Uso del conflicto cognitivo

Distintos estudios (ej. Hadas, Hershkowitz y Schwarz 2000, 2002; Prusak, Hershkowitz y Scharwz 2011; Stylianides y Stylianides 2008, 2009; Zaslavsky 2005) han abordado el uso del conflicto cognitivo como un mecanismo para promover un aprendizaje significativo en general y sobre la demostración en particular. Lo anterior puede ser planteado, a través de confrontar la comprensión, las creencias y las concepciones de los estudiantes con el fin de establecer la necesidad de procurar explicaciones que superen el conflicto planteado, en particular estamos interesados en aquellas de carácter deductivo.

Se dice que el llamado conflicto cognitivo ocurre cuando los estudiantes se confrontan con datos u opiniones que contradicen sus argumentos iniciales (Prusak *et al*, 2011). Según Johnsson y Johnsson (2009) los conflictos pueden ser conceptuales o de controversia. Los primeros ocurren cuando la información recibida no es consistente con la asumida anteriormente por los estudiantes. Mientras que los segundos ocurren cuando las ideas, afirmaciones y conclusiones de un estudiante son incompatibles con las de otro, formando una controversia que conduce a una búsqueda entre ellos para llegar a un acuerdo.

Es por medio del contraejemplo, la contradicción y la incertidumbre que se intenta establecer un conflicto cognitivo entre los estudiantes. La contradicción puede conducirlos hacia la incertidumbre de los resultados que obtienen, llevándolos a una búsqueda de explicaciones, eventualmente deductivas, que superen la contradicción (Hadas, Hershkowitz y Schwarz 2000, 2002; Hadas y Hershkowitz 2002). Además, la incertidumbre puede hacer que los estudiantes tomen conciencia del papel de la demostración como una herramienta de convicción (Hadas y Hershkowitz, 1999).

Por otra parte, la investigación muestra que no es suficiente con tratar de establecer un conflicto para fomentar el desarrollo de la comprensión de los alumnos de manera estable, sino que es necesario establecer un medio adecuado para superarlo (Zazkis y Chernoff, 2008). Por su parte, Prusak, Hershkowitz y Schwarz (2011) nos muestran cómo a través de un tratamiento llamado diseño argumentativo se puede producir una argumentación productiva. Se entiende por argumentación productiva al cambio de un razonamiento basado en intuiciones y apoyadas principalmente en la imagen a otro tipo de razonamiento producido por una necesidad lógica. Este diseño que mencionan los autores se basa en tres principios que son: una situación de conflicto, situación de colaboración y proveer un dispositivo para constatar y controlar las hipótesis (Prusak et al, 2011).

De esta manera, teniendo en cuenta la importancia del diseño de la tarea, la forma en que ésta se lleva acabo frente al grupo en el salón de clases y el rol del profesor, el conflicto cognitivo puede ser usado como “catalizador” de las readecuaciones del estudiante de la forma en que construye su conocimiento. En especial, en lo referente a la formación del rigor matemático que una vez construido es el que da la pauta para la construcción y adquisición del conocimiento matemático del estudiante.

Metodología

Con el fin de alcanzar nuestro objetivo en la dirección de analizar la racionalidad de los estudiantes que diera cuenta de lo que ellos valoran al construir su conocimiento, en particular, en lo relativo a los procesos de validación en Geometría en situaciones de conflicto, se realizó una investigación de tipo cualitativa con estudiantes de nivel universitario. El estudio se llevó a cabo con 6 sujetos, cuatro mujeres y dos hombres, cuya edad osciló entre los 18 y 20 años. Ellos comenzaban el segundo semestre de la licenciatura de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Zacatecas, en particular, empezaban el curso de Geometría Moderna en donde las primeras semanas se abordó la Geometría Euclidiana.

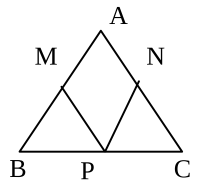
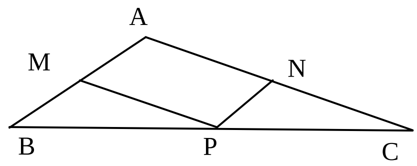
La puesta en marcha de la actividad experimental fue llevada a cabo en un taller de tres sesiones de dos horas cada una en el transcurso de una semana, esto como parte del apoyo de los cursos regulares de Geometría moderna.

En cada sesión se propuso una secuencia de actividades que se llevaron a cabo de manera individual y en parejas. Esta secuencia tenía un orden específico. En el primer momento se exploró lo relativo a sus preferencias y formas de proceder respecto a las figuras geométricas en situaciones de validación. En el segundo momento se buscó establecer posibles conflictos conceptuales y de controversia a partir de los distintos problemas, sobre todo en aquellos casos donde los estudiantes mantenían argumentos visuales para la validación de los enunciados. En el tercer momento los conflictos fueron abordados en conjunto a través de una discusión grupal de tal forma que los estudiantes pudieron darle solución.

Una característica general de las tareas propuestas es que se plantearon proposiciones localmente válidas de ciertas configuraciones geométricas cuyo análisis requiere de un tratamiento cuidadoso de la figura en cuestión, además que en ningún momento se les pide de manera explícita que demuestren sus resultados. A continuación mostraremos algunos ejemplos que se prepusieron.

Tabla 1

Ejemplo de problemas propuestos.

Problema		
Enunciado	Figura	Contraejemplo que muestra que MB≠CN
Sea un triángulo △ABC tal que MP // AC, AB // NP y P es el punto medio de BC. ¿Son iguales MB y CN?		

En la Tabla 1 se muestra un ejemplo de los distintos problemas planteados en el instrumento de investigación. El problema consiste en determinar la igualdad de los lados MB y CN en un triángulo cualquiera. Un estudiante con bases esencialmente visuales puede afirmar que los lados son iguales, ya sea que se base en aspectos meramente visuales o que se apoye en la congruencia cierta de los triángulos MBP y NPC y confunda los lados MB y CN como lados homólogos de triángulos congruentes, de esta manera infiera incorrectamente la conclusión.

Luego de una discusión podemos trabajar este problema con dos tipos de confrontaciones. La primera surge cuando el estudiante asume que se trata de un caso particular, esto es, de una proposición que se refiere a un triángulo equilátero, lo que provoca la ilusión de la igualdad de los lados contrapuesta con la proposición establecida al inicio que es de carácter general, lo que induce a un conflicto conceptual. La segunda manera de abordar la confrontación se apoya en la exhibición de un contraejemplo, el que se muestra en la Tabla 1, lo que nos lleva a revisar también el dominio de validación de la proposición original.

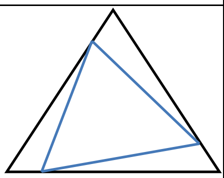
Para una fase posterior a este reporte de investigación, una segunda etapa del problema consistiría en cuestionar al estudiante en cuáles casos o condiciones son necesarias para que se mantenga la igualdad de los segmentos MB y CN. De esta manera iniciamos el proceso de sobrepasar la controversia surgida del planteamiento inicial.

Consideramos que al ser resuelto la situación de conflicto puede provocar ciertas transformaciones en el estudiante, en particular en la forma de construir su conocimiento. Por una parte, la fuente de evidencia que parte de la figura es fácilmente confrontada, debido a que lo que tenemos frente a nosotros es sólo un ejemplo de una categoría de posibles ejemplos asociados a la proposición, por ello los atractivos visuales que en ocasiones presentan información adicional a la hipótesis son puestos en duda, surgiendo una nueva necesidad de explicaciones sobre la validez del enunciado. Esto puede ser resuelto a través de la búsqueda de diversos ejemplos en donde la proposición se verifique o se contradiga, lo que da a la figura una nueva función como un medio de exploración a través de la construcción de ejemplos para la plausibilidad o la refutación de enunciados.

Por otra parte, otro tipo de problemas planteados es el mostrado en la tabla 2.

Tabla 2

Otro tipo de problemas propuestos.

Problema:	Figura	Cuestionamientos generales
¿Es posible inscribir un triángulo equilátero dentro de otro triángulo equilátero?		¿Existe tal triángulo equilátero inscrito? ¿Es único el triángulo equilátero inscrito? Determinar una forma general de obtener tal triángulo equilátero inscrito.

La actividad se realizó en parejas, la situación planteada en general consistió en involucrar a los estudiantes en determinar si era posible inscribir un triángulo equilátero dentro de otro triángulo equilátero. En este problema se buscaba explorar las distintas estrategias de solución, fomentar los razonamientos inductivos, abductivos y deductivos, determinar el nivel de generalización de las respuestas y confrontar la generalidad de los enunciados que se mantenían.

Después de este problema en parejas se buscó confrontar las ideas de los distintos equipos a través de una discusión grupal. En esta discusión se buscó también establecer un modelo de acción genérico sobre la figura. En este caso se refería a construir una figura localizando puntos sobre los lados de la figura original a una distancia igual sobre cada lado, de manera que uniendo los puntos marcados teníamos una figura que era del mismo tipo que la figura original, esto con el fin de fomentar la búsqueda de las propiedades estructurales de las figuras geométricas.

Por último, se plantearon problemas análogos al del triángulo equilátero pero ahora en el caso del triángulo isósceles y el cuadrado, en los cuales se ponía en juego el modelo de acción genérico propuesto en la discusión. Esta situación es muy rica en los estudiantes ya que no tienen familiaridad con este tipo de propuestas y les provoca un conflicto la funcionalidad del modelo que sirve sólo para cierto tipo de figuras como el triángulo equilátero o el cuadrado, pero falla en el triángulo isósceles a pesar de que si es posible inscribir un triángulo isósceles dentro de otro triángulo isósceles.

Resultados y discusión

El análisis de resultados se llevó a cabo de manera cualitativa observando el desempeño de los seis estudiantes al resolver las tareas, enseguida se comentan los resultados de manera general.

En el primer momento, en lo relativo a las preferencias y formas de proceder respecto a las figuras geométricas de los estudiantes en situaciones de validación, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Los estudiantes conseguían realizar cierta manipulación sobre la figura. Por ejemplo: establecían trazos auxiliares e incluso realizaban ciertas reconfiguraciones sobre la figura. Sin embargo, su respuesta se apoyaba en las propiedades ostensivas de la misma.
- Los estudiantes recurrían al análisis de casos específicos para validar su respuesta. Por ejemplo, al análisis de las propiedades ostensivas del ejemplo prototipo.
- Los estudiantes lograban constituir una cadena deductiva de argumentos, sin embargo, en ocasiones se apoyaban de propiedades ostensivas de la figura.
- A pesar que los estudiantes construyeron ciertas cadenas deductivas, en algunos problemas no fueron capaces de distinguir el estatus sobre el contenido de las proposiciones.

A continuación explicamos el último punto. Se les hicieron las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿Las diagonales de un rombo son siempre segmentos perpendiculares? ¿Siempre que trazamos segmentos perpendiculares obtenemos un rombo al unir los puntos de los segmentos?

Ningún estudiante se dio cuenta que se trataban de preguntas diferentes y todos contestaron ambas como ciertas, debido a que sólo se basaron en el contenido de las proposiciones para apoyar sus respuestas y no en el estatus de las proposiciones dentro de cada pregunta. En la Figura 1 mostramos lo relativo a este problema.

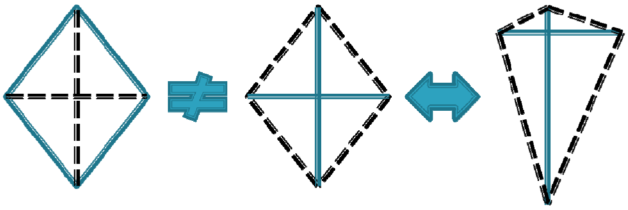


Figura 1. No distinguieron el estatus operativo de las proposiciones.

A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron en el segundo momento.

Los estudiantes al enfrentarse al conflicto cognitivo anteponían propiedades ostensivas sobre las propiedades matemáticas y en ocasiones evadían al conflicto debido, entre otras cosas, a que es inusual tanto la situación como la expectativa de que sea resuelta por ellos. Sin embargo, durante los distintos problemas que presentaban conflicto cognitivo, se pudo observar que algunos alumnos comenzaron a realizar nuevas manipulaciones a las figuras, por ejemplo se realizaban variaciones.

En el problema del triángulo equilátero (ver Tabla 2) se presentó un conflicto de controversia entre dos estudiantes con respecto a la pertinencia del uso del razonamiento abductivo como un método de descubrimiento para resolver el problema. La actitud de uno de los estudiantes fue de rechazo hacia el razonamiento abductivo, argumentando que no era posible suponer algo que no se tiene en las hipótesis, debido, probablemente, a lo visto por ellos en clase donde se establece que nunca se debe suponer la tesis en los procesos de demostración. Ellos no lograron ponerse de acuerdo y abandonaron el razonamiento abductivo, prefiriendo el análisis de casos específicos.

En el mismo problema del triángulo equilátero, se observó que el análisis de ejemplos en específico ya no fue suficiente para validar sus respuestas. Por ejemplo, una pareja de estudiantes logró abstraer el modelo de acción que se iba a proponer posteriormente. Lo hicieron a través del análisis de triángulos inscritos en concreto, como lo fue el triángulo de los puntos medios, después validaron sus resultados a través del razonamiento deductivo.

El caso del modelo de acción propuesto, funcionó como experiencia para el cambio de la credibilidad de los estudiantes sobre la figura, debido a que provocó un conflicto ya que no podía ser generalizado en las distintas figuras, el cual ellos trataron de superar a través de la búsqueda de propiedades estructurales de la figura y no sólo en aspectos ostensivos.

Por último, durante la discusión grupal de los problemas, los participantes tomaron conciencia del conflicto que les provocaba apoyar sus supuestos en aspectos ostensivos y su atención se dirigió a una búsqueda de las propiedades estructurales de la figura. Sin embargo, en esta etapa y en las anteriores tuvieron dificultad para lograr organizar discursivamente pruebas deductivas.

Conclusiones

De manera general, se observó que los estudiantes no sienten la necesidad de establecer pruebas deductivas para resolver problemas geométricos en problemas en donde no se les pide explícitamente una demostración. En cambio ellos consideran como suficiente pruebas que se apoyen en razonamientos inductivos y basadas en aspectos ostensivos de la figura.

Las situaciones de conflicto presentadas en este trabajo contribuyeron a establecer un cambio de la credibilidad del estudiante sobre la figura, pasaron de considerarla como un medio de validación absoluta a ser un medio heurístico de trabajo. De esta manera, observamos que el conflicto cognitivo da indicios de lograr un desarrollo de la racionalidad del estudiante que se refleja en las acciones, los argumentos y las decisiones de los alumnos que tienen que ver con los procesos de prueba. Sin embargo, esto no ocurre de manera automática sino que depende de: (1) La aceptación del conflicto y (2) La forma como se resuelve éste.

Por otra parte, queda planteada la necesidad a futuro la investigación de si el conflicto cognitivo contribuye a desarrollar una transición de la argumentación a la demostración, proceso que implica no solo elegir la información relevante de una representación gráfica de soporte sino la organización deductiva de las proposiciones en juego. También deben ser consideradas las distintas situaciones que dan origen a los conflictos cognitivos.

Referencias y bibliografía

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). The Netherlands: Kluwer.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof- explanations in mathematics situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Chazan, D. (1993), High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359-387.

Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: What ways for students. *En Proceedings of the 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand* (pp. 23–44). Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprension in learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 62*, 103-131.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-162). Rotterdam: Sense publishers.

Fischbein, E., & Kedem, I. (1982). Proof and Certitude in the Development of Mathematical Thinking. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128-31). Antwerp, Belgium.

Hadas, N., & Hershkowitz, R. (1999). The role of uncertainty in constructing and proving in computerized environment. *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 3-57).

Hadas, N., & Hershkowitz, R. (2002). Activity analyses at the service of task design. En *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56).

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational studies in Mathematics*, *44*(1-2), 127-150.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2002). Analyses of activity design in geometry in the light of student actions. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *2*(4), 529-552.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 805-842.

Johnsson, D. W. & Johnsson, R. T. (2009). Energizing learning: The instructional power of conflict. *Educational Researcher*, *38*(1), 37-51.

Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, *44*(1-2), 87-125.

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of mathematical behavior*, *17*(2), 183-195.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23-41.

Prusak, N., Hershkowitz R. & Schwarz. (2011). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design, *Educational Studies in Mathematics*, published on line 23 de junio de 2011.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*, *9*(Número especial), 103-129.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2008). "Cognitive conflict" as a mechanism for supporting developmental progressions in students' knowledge about proof. Artículo disponible en la página web Del *11th International Congress on Mathematical Education, under Topic Study Group 18* (http://tsg.icme11.org/tsg/show/19). Monterrey, México.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314-352.

Vinner, S. (1983). The notion of proof–some aspects of students' views at the senior high level. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 289-294).

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 297-321.

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, 68, 195-208.