



El Tipo de Cantidad en Proporcionalidad con Problemas de Valor Faltante

Juan Carlos **Ramírez** Maciel

CINVESTAV-IPN

México

jcrmaciел@yahoo.com.mx

Claudia Margarita **Acuña** Soto

CINVESTAV-IPN

México

claudiamargarita_as@hotmail.com

Resumen

La siguiente investigación indaga sobre la influencia que tiene el tipo de cantidad involucrada en problemas de proporcionalidad, en particular en aquellos de valor faltante. Una de las variables en este tipo de problemas es el uso de cantidades heterogéneas debido a que la interpretación del problema ofrece obstáculos de interpretación de la proporcionalidad. Para analizar e interpretar los resultados usamos los instrumentos metodológicos del Enfoque Ontosemitótico de la Cognición Matemática (EOS), desde este enfoque encontramos que cuando los estudiantes se apoyan en la iteración, ésta les permite identificar la razón unitaria para resolver problemas de proporcionalidad, mientras que interpretar el tipo de las cantidades resulta un obstáculo, lo que provoca que este método para la solución sea descartado. Una reformulación semántica de las unidades puede ser una solución para aprovechar este procedimiento.

Palabras clave: proporcionalidad, cantidad homogénea y heterogénea, Enfoque Ontosemiótico.

Planteamiento

Las dificultades que se encuentran cuando un estudiante se enfrenta a la tarea de resolver problemas de proporcionalidad han sido de mucho interés en la matemática educativa, en esta investigación nos proponemos investigar sobre la influencia las cantidades en ciertas estrategias

utilizadas por estudiantes de bachillerato. Pretendemos establecer cómo esta diferencia influye la construcción de la idea de proporcionalidad y si la interpretación bajo estas circunstancias tiene los mismos requisitos cognitivos en cada caso. Además de dar pistas de la forma cómo esta diferencia impacta en la construcción del razonamiento proporcional.

El presente estudio lo hemos restringido a problemas de proporcionalidad donde hay que encontrar el valor faltante. En el trabajo de Tjoe & De la Torre (2014) se investigan las relaciones entre la habilidad de los estudiantes de secundaria para resolver problemas de valor faltante y que tanto hacen diferencia entre las relaciones de proporcionalidad y las de no proporcionalidad, los autores encuentran que: la habilidad de resolver problemas de este tipo no tiene relación directa con la solución de problemas que requieren del razonamiento proporcional, esto es, el mecanismo para resolver problemas de valor faltante no presupone necesariamente el razonamiento proporcional, también encuentran que los estudiantes resuelven problemas de este tipo a través de una práctica automática, dejando de lado una actitud crítica. Una de las hipótesis de este trabajo consiste en considerar que, bajo ciertas circunstancias, los problemas de encontrar el valor faltante usando el procedimiento de encontrar la *razón unitaria* que, desde nuestro punto de vista, si promueve una interpretación de la relación que existe en el tipo de unidad involucrada, la construcción de razones, proporciones y la interpretación del problema.

Una de las estrategias que son utilizadas por los estudiantes para dar sentido a la relación que guarda la proporcionalidad, particularmente cuando no se les insta a usar la regla de tres, es la llamada iteración que consiste en vincular los cambios entre las cantidades de manera que quede claro cómo cambian unos respecto a otros hasta llegar a una “unidad”, esto es, la última razón en la que pueden ser descompuestos en submúltiplos dos cantidades que están en proporción, para fines del trabajo a ésta razón le hemos llamado *razón unitaria*.

Antecedentes

Las proporcionalidad es un tema que ha sido objeto de diversas investigaciones, las cuales dan evidencia de la problemática que surge cuando los estudiantes trabajan con este tema, entre estas encontramos: el sobre uso inadecuado de este concepto, De Book et al (2003), las deficiencias en la interpretación del problema que existen cuando la situación cambia, Mellar (1991). Este autor además sugiere modelos de la producción del pensamiento de un grupo de adultos jóvenes y encontró que muchos de ellos recurrieron a la suma reiterada, de manera incorrecta, como una estrategia para dar una solución en lugar de detectar la relación proporcional.

Uno de los resultados más interesantes de estas investigaciones, es el que se refiere a que: la forma de enfrentar problemas escolares de razonamiento proporcional es susceptible al cambio, es decir, si a un problema se le hacen ligeros cambios en los datos, puede ser que la estrategia para su resolución y el razonamiento que lo sustenta sean diferentes, Lesh & Doerr (2003) esto sugiere que los estudiantes no entienden la relación abstracta que guardan las cantidades comparadas, sino que se orientan por el tipo de problema que incluye la aparición de tres datos.

Se ha encontrado que el razonamiento multiplicativo y proporcional podría verse afectado también por: 1. Los procesos físicos subyacentes a la situación del problema, 2. Formación de relaciones cuantitativas y 3. La invariancia multiplicativa, Harel et al. (1991). Por otro lado, los procesos multiplicativos así como los constructos tales como la llamada *unidad e iteración* juegan un papel relevante en el pensamiento proporcional como se muestra en Singh (2000). De

manera general, también se han intentado establecer modelos para el razonamiento proporcional Alatorre & Figueras (2005).

Con el fin de establecer criterios para establecer, cuando asumimos que está presente el razonamiento proporcional se han realizado trabajos como el de Tjoe et al (2013) donde se estudian atributos del razonamiento proporcional que están presentes en problemas de proporcionalidad y que lo estudiantes deberían dominar, estos son: 1. Comparar fracciones, Ordenar fracciones, 2. Construir razones, 3. Construir proporciones, 4. Identificar una relación multiplicativa entre conjuntos de valores, 5. Diferenciar la relación proporcional de una no proporcional, 6. Aplicar algoritmos en la solución de problemas de razonamiento proporcional. Con base en estas características podemos afirmar que este tipo de razonamiento requiere de una gran gama de conocimientos conceptuales y procedimentales que los estudiantes necesitan dominar para ser competentes en este tema, nosotros consideraremos en este estudio sólo algunas de ellas, en particular lo relacionado con construir razones y proporciones (2 y 3).

Por otro lado, desde una visión o perspectiva histórica, encontramos que la idea de la razón y la proporción muestra una fuerte relación el tipo de cantidades y la noción de proporcionalidad, en el libro V de Euclides se dice que: “*una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas*”, mientras que el producto de tales cantidades no tenía sentido, Gairín & Oller (2013), esta acotación muestra que hay un conflicto detectado hace mucho respecto a la comparación de cantidades cuya comparación dependía de la naturaleza de las cantidades utilizadas. Posteriormente se observa una evolución en procedimientos que constituyen la base de la llamada regla de tres; esto ocurrió cuando el concepto de proporcionalidad se desarrolló en China con motivos mercantiles, es ahí donde se amplía la idea de proporcionalidad a partir del surgimiento del concepto de Lü que acepta la relación entre cantidades heterogéneas lo que permite considerar una regla general que comúnmente se conoce como *regla de tres*, Gairín & Oller (2013), a partir de este cambio epistemológico en la forma de abordar los problemas de proporcionalidad fue que el estudio de los distintos tipos de cantidades fue posible.

En el terreno de la investigación y en particular de la construcción de la idea de proporcionalidad consideramos que: el tipo de cantidad involucrada puede ser la base de algunas de las problemáticas que enfrentan los estudiantes con los problemas proporcionalidad, consideramos además que los antecedentes históricos muestran que llegar a la idea de razón de cantidades no homogéneas no es una inclinación natural. Y finalmente creemos necesario estudiar la forma cómo este hecho influye en la construcción de la idea de razón y de proporción.

Marco Teórico

La presente investigación se lleva a cabo a la luz del Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática (EOS), Godino, Batanero, y Font, 2007; Font, Godino, y D'Amore, 2007; Godino (1998, 2002, 2005), Godino y Batanero (1994). En ésta, la actividad matemática juega un rol central y se encuentra modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas, intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (a los que evocamos al hacer matemáticas), los cuales son representados en forma textual, oral o incluso gestual. Los sistemas de prácticas y funciones semióticas permiten por un lado, entender las posibles interpretaciones del significado de un objeto matemático y por el otro caracterizar las relaciones que se establecen entre dichos objetos.

Los sistemas de prácticas realizados en el seno de las instituciones determinan la emergencia progresiva de los “objetos matemáticos” donde el significado de estos objetos está íntimamente ligado con los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática. D’Amore & Godino (2006, p14).

Dentro del EOS se distingue entre configuraciones epistémicas cuando se trata de la configuración que realizaría un experto (perspectiva institucional) y configuraciones cognitivas cuando se trata de las que realiza cada alumno (perspectiva personal). Esta última perspectiva se ve asociada a la elección de estrategias que le permiten abordar el problema poniendo en funcionamiento las configuraciones cognitivas que dan solución a las tareas planteadas desde la perspectiva del estudiante.

Las situaciones-problema promueven y contextualizan la actividad; el lenguaje (símbolos, notaciones, gráficas) representa otras entidades y sirven como herramientas para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones relacionan a los conceptos. Finalmente, los objetos que aparecen en las prácticas matemáticas y aquellos que emergen de esas prácticas dependen del juego de lenguaje en el que participan y encuentran su significado en las actividades donde se desarrollen.

La situación está determinada por los problemas propuestos en distintos contextos: en el lenguaje consideramos símbolos, expresiones, representaciones diagramáticas; en conceptos ubicamos a la razón, proporción, tasa, en propiedades entendemos al tipo de cantidad que tiene el problema ya sea homogénea o no, en los procedimientos consideramos el tipo de estrategias que los estudiantes utilizan para dar solución y en los argumentos las respuestas de los estudiantes al problema.

En este trabajo se enfoca al estudio del procedimiento donde éste debe pasar de la iteración y la búsqueda de la razón unitaria que subyace en el trabajo con tablas elaboradas por los estudiantes hasta la relación abstracta de razón unitaria donde el tipo de unidades dejaría de ser determinante para solución del problema.

Metodología

El objetivo de la investigación es llevar a cabo un análisis de la estrategia usada por los estudiantes, conocida como iteración para determinar la razón unitaria y su relación con el tipo de cantidad se propone. Deseamos establecer si es posible construir una base para entender la construcción de la idea de proporcionalidad usando en principio la iteración.

Por otra parte, pretendemos determinar si esta actividad apoya la construcción del razonamiento proporcional en el sentido de los indicadores de Tjoe et al (2013) en el sentido de construir razones o proporciones y cómo esto podría impactar idea de razonamiento proporcional. Para profundizar sobre el efecto que tiene el tipo de cantidad involucrada en un problema de proporcionalidad en el caso de problemas donde se debe encontrar el llamado *valor faltante*, propusimos a estudiantes de bachillerato problemas de este tipo en donde se hace esa diferencia en un cuestionario de preguntas cerradas (Apéndice A).

Este es un estudio de tipo exploratorio que se apoya en una mirada pragmatista y holística que usa la metodología propuesta por el EOS por lo que consideraremos una metodología de tipo mixto, (Castro & Godino, 2011). En la parte cualitativa se propone como instrumentos de análisis las configuraciones epistémicas y cognitivas para la producción de los estudiantes.

Para la investigación se realizó una configuración epistémica de referencia que incluía los atributos que en teoría deben estar presentes, para ser comparada con las configuraciones cognitivas de los estudiantes, de donde obtuvimos los atributos que ellos ponen en juego cuando resuelven problemas de proporcionalidad del tipo comentado.

Los datos que conformaron las configuraciones cognitivas se obtuvieron de cuestionarios y la discusión de los mismos con cada uno de los estudiantes, donde luego de resolver problemas en los que había que encontrar el valor faltante. En las entrevistas llevadas a cabo exploramos y contrastamos con el estudiante el contenido de sus respuestas así como de los procedimientos utilizados con el fin de encontrar el sustento de éstos y dar evidencia de cómo el tipo de las cantidades en el problema interviene en estos procesos de interpretación.

Para la puesta en escena se realizó un cuestionario (ver ejemplo en fig. 1) que se aplicó a 45 estudiantes entre 15 y 16 años del primer semestre de bachillerato que conocían la regla de tres y que estaban familiarizados con el tipo de problemas. También se llevaron a cabo entrevistas con algunos de los estudiantes con el objeto de esclarecer la racionalidad de su estrategia así como la interpretación de los resultados obtenidos. El cuestionario constó de ocho reactivos, y para dar solución a estos reactivos se les permitió usar sus propios recursos, no se especifica una forma de dar solución a los problemas.

5.	Para hacer un pastel de 2kg se necesitan 4 tazas de harina, ¿Cuánto pastel se puede hacer con 25 tazas?								
a)	23kg	b)	12kg	c)	12.5kg	d)	13.5kg	e)	14kg
6.	La deformación que sufre un resorte cuando se aplica una fuerza varía de forma directamente proporcional con la deformación que éste sufre. Si para una fuerza aplicada de 35N la deformación que sufre el resorte es de 5cm ¿Cuál será de deformación que sufre el resorte si aumentamos en 45N la fuerza?								
a)	7.5cm	b)	6.4cm	c)	3.8cm	d)	6 cm	e)	7cm

Figura 1. Ejemplo de los ejercicios propuestos.

Resultados y Análisis

Respecto al Análisis Cuantitativo de los datos establecimos tres categorías donde se ubica el tipo de estrategia utilizada. En la tabla 1 y 3 mostramos los resultados del tipo de estrategia más utilizada. Para el Análisis Cualitativo mostramos en la tabla 2 y 4 donde aparece la configuración cognitiva de una de las estudiantes que realizó la actividad que es comentada con base en la configuración epistémica de referencia.

Sobre la Iteración y construcción de tablas: Esta categoría ubica a los estudiantes que construyeron tablas iterando para dar solución al problema.

Sobre la Razón unitaria: En esta categoría ubicamos a los estudiantes que establecieron comparaciones al dividir las cantidades para encontrar la solución.

Sobre la Regla de tres: En esta categoría se encuentran los estudiantes que usaron el algoritmo que consiste en multiplicar en forma cruzada las cantidades y después dividir por la tercera.

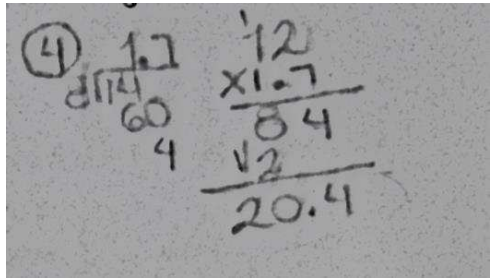
Tabla 1

Estrategia más utilizada reactivos 1-5

Estrategia	Estudiantes
Iteración y Tablas	18
Razón Unitaria	16
Regla de Tres	11

Tabla 2

Configuración de una estudiante en la solución del reactivo 4 (Apéndice A)

Configuración epistémica	Configuración Cognitiva Dulce
Lenguaje: Dentro del contexto del problema específico, donde aparece el uso de objetos ostensivos matemáticos para establecer relaciones entre las cantidades involucradas. Razones que pueden ser de la forma $k = \frac{y}{x}$ o bien presentarse en su forma decimal. Proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Recursos cómo tablas y gráficas	 Se establecen razones de la forma $k = \frac{y}{x}$
Conceptos: Multiplicación, Razón, Proporción, Función	Razón, multiplicación.
Procedimientos: Establecer la proporcionalidad al comparar las cantidades del problema ya sea iterando o través de una razón entre ellas, establecer las proporciones adecuadas para dar solución.	Entrevista: Entrevistador: Me podrías decir cómo hiciste el problema 4 el de las donas, “maría necesita 8 tazas de harina para hacer 14 donas, usando el mismo recipiente, cuantas donas puede hacer con 12 tazas de harina.
Argumentos: Los encontramos en la solución del problema mostrando que se ha razonado sobre los problemas y no sobre las operaciones.	Dulce: Ah pues dividí las 14 donas entre las 8 tazas y me dio 1.7 para saber cuántas donas se hacen por taza y este 1.7 lo multipliqué por 12, que son las 12 tazas de harina para las donas.

En el análisis de los primeros cinco reactivos y de los resultados de los tipos de estrategias usados se observa que nuestros estudiantes prefieren usar estrategias de iteración y construcción de tablas; observemos que en estos reactivos se involucran cantidades que se relacionan con objetos de la misma especie o que tienen cierta familiaridad para los estudiantes, por ejemplo cuando se comparan cantidades metro-metro, o bien donde hay una relación una relación entre cantidades que podríamos llamar *natural* para el estudiante.

De manera general, los estudiantes no tuvieron conflicto para establecer relaciones entre cierto tipo cantidades heterogéneas presentadas en los primeros reactivos, como en el caso de

dulce donde ella es capaz de dividir donas entre tazas sin ningún conflicto. Lo anterior se debe a la familiaridad que tiene con ellas, ya que con la harina se pueden hacer las donas.

Del análisis de las respuestas se desprende que: cuando en el problema hay cantidades homogéneas o familiares, por un lado los estudiantes tienden a utilizar herramientas como la iteración o establecer comparaciones a través de razones porque pueden interpretar el todo en término de sus partes para después asociar las partes correspondientes y por otro lado son capaces de justificar y argumentar su respuesta con base en el problema y no en términos de las operaciones realizadas para llegar a la solución.

En los resultados y análisis de los reactivos 5-8, encontramos que:

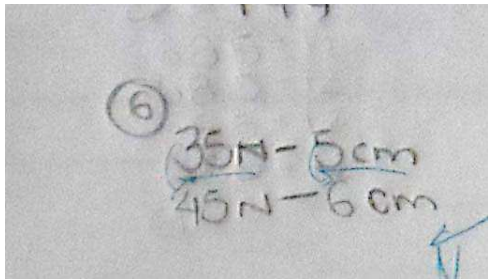
Tabla 3

Estrategia más utilizada reactivos 5-8

Estrategia	Estudiantes
Regla de tres	22
Razón Unitaria	13
No contestaron	7
Iteración	3

Tabla 4

Configuración de la misma estudiante en la solución del reactivo 6 (ver Apéndice A)

Configuración epistémica	Configuración Cognitiva Dulce
Lenguaje: Dentro del contexto del problema específico, donde aparece el uso de objetos ostensivos matemáticos para establecer relaciones entre las cantidades involucradas. Razones que pueden ser de la forma $k = \frac{y}{x}$ o bien presentarse en su forma decimal. Proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Recursos como tablas y gráficas.	 Desarrolla un lenguaje parecido al tabular.
Conceptos: Multiplicación, Razón, Proporción, Función	No desarrolla conceptos
Procedimientos: Establecer la proporcionalidad al comparar las cantidades del problema ya sea iterando o través de una razón entre ellas, establecer las proporciones adecuadas para dar solución.	Entrevista: Entrevistador: ¿Por qué aumentaste en 1 cm? Dulce: No entendí y por eso aumente en 1 cm Entrevistador: y no podías haber pensado como en el ejercicio de las donas, dividiendo 35N entre 5cm
Argumentos: Los encontramos en la solución del problema	

mostrando que se ha razonado sobre los problemas y no sobre las operaciones.	Dulce: Si ,me daría siete Entrevistador: Si siete ¿qué? Dulce: eh, no se pude Entrevistador: ¿Por qué no se puede? Dulce: Porque estos son newton y los otros son centímetros
--	---

En el análisis de los reactivos restantes y de los resultados de los tipos de estrategias usados se observa que nuestros estudiantes cambian radicalmente la forma de abordar la situación-problema cuando los tipos de cantidades son heterogéneas no familiares.

De manera general los estudiantes tienen cierto conflicto para establecer relaciones entre el tipo cantidades, presentadas en el caso de dulce, donde encontramos que en un primer momento es capaz de dividir cantidades heterogéneas (donas entre tazas) sin conflicto, sin embargo cuando se presentan cantidades que no le resultan familiares, deja de ser clara la relación y la forma de cómo debe ser abordado el problema. En este momento propone el aumento entre unidades, pero únicamente con el fin de dar una respuesta, mencionando que no entiende y por ello propone esa solución. Las ideas asociadas a la razón o a la proporción no pueden arribar porque, desde su punto de vista, no es posible compararlas y tampoco acepta iterar para ver si las cantidades se pueden relacionar.

También observamos que en el caso de unidades de distinta especie y que no son familiares para el estudiante, como en el caso de newton-metro, presión-temperatura, etc., no establecen una relación significativa inmediata entre las cantidades. Una de las causas para este conflicto es que para algunos estudiantes es muy difícil hacer referencia al tipo de unidad obtenida, lo que con frecuencia provoca la renuncia a la estrategia de iteración para encontrar la razón unitaria, por lo que la dificultad en este proceso se localiza en el tratamiento semántico de la interpretación de las unidades que resultan de la comparación.

Una vez detectado este conflicto de interpretación, nos dimos a la tarea de ofrecer una alternativa en las discusiones con los estudiantes que presentaban este impedimento, entonces se propusieron consignas que promovían la adopción de *nuevas* unidades como *tazas / donas* o *newton /centímetro* como formas particulares de una misma unidad. Tomamos el ejemplo de la velocidad, y que podía hablarse de ella como v o como d/t , cabe señalar que esta explicación fue suficiente junto con procesos iterativos para que los estudiantes reconsideraran el procedimiento de iteración y recuperaran la relación unitaria.

Conclusiones e implicaciones

Encontramos que se establecen distintas categorías de relación, que dependen del tipo de relación e interpretación de las cantidades involucradas:

En un primer caso tenemos la relación entre cantidades homogéneas y heterogéneas familiares, donde los estudiantes son capaces de interpretar el fenómeno y argumentar en términos de algunos de los aspectos relacionados con el pensamiento proporcional, a través de la detección de la unidad de proporción que les permite: 1. Asociar numéricamente la relación entre las cantidades involucradas y 2. Identificar los tipos de unidades obtenidas con base en relaciones de familiaridad.

En el segundo caso se tiene la relación entre cantidades heterogéneas, donde para algunos estudiantes no es fácil establecer este tipo de relaciones de familiaridad, ni unitarias ni generales que se requieren para las proporciones entre las cantidades involucradas, dada esta situación ellos recurren a herramientas algorítmicas que no permiten dar una explicación convincente de la solución de la situación problema.

Por otro lado, la estrategia de iteración, aunque no fue el único procedimiento exitoso, puso en juego la interpretación de las unidades correspondientes lo que permitió establecer la relación numérica que se establece entre las cantidades, sin generar un conflicto del tipo de cantidad cuando a partir de que se rebasó el conflicto semántico al que hemos hecho referencia sobre la nueva designación de las unidades. A partir de este hecho se está en condiciones de comparar las cantidades a través de razones, aceptando que el tipo de unidades se refiere más bien a una convención semántica.

Los problemas de valor faltante resueltos con el procedimiento de la iteración contribuyen a la construcción del razonamiento proporcional. Es decir, con este procedimiento los estudiantes logran además de la construcción de las razones y proporciones involucradas, identificar las relaciones numéricas entre las cantidades y argumentan mostrando elementos que dan evidencia de que el razonamiento proporcional está presente en particular no sólo encuentran la solución sino también una razón que les permite anticipar resultados para otras parejas de cantidades.

Consideramos que estas estrategias deberían predominar en el discurso matemático escolar para usar a la razón unitaria a través de la iteración como un recurso para dar sentido e interpretar problemas de proporcionalidad de valor faltante, disminuyendo el papel del recurso de la regla de tres, que en este tipo de situaciones-problema desvía la atención ya que centra en las operaciones que se deben hacer para dar solución y no en la interpretación del problema.

Referencias y bibliografía

- Alatorre, & Figueras (2005). A developmental model for proportional reasoning in ratio comparison tasks. En: A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME Conference* (Vol. 3, pp. 1-8). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education
- Castro, W. F., & Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín et al (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99). Ciudad Real: SEIEM
- D'Amore B., & Godino J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.
- Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *DM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Gairín, J. M., Oller M., & Antonio, M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 317-338.
- Godino J. D., & Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., & Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME Conference* (Vol. 3, pp. 1-8). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education.

- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2007). *Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas*. Recuperado el 28 de diciembre de 2011, de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2138223>
- Harel, G., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1991), Variables Affecting Proportionality: Understanding of Physical Principles, Formation of Quantitative Relations, and Multiplicative Invariance. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of PME XV Conference* (pp. 125-133). Assisi, Italy.
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Mellar, H. (1991). Modeling students' thinking on a proportional reasoning task. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 22(1), 111-119.
- Singh, P. (2000). Understanding the Concepts of Proportion and Ratio Constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 271-292.
- Tjoe et al. (2013). Identification and validation process of proportional reasoning attributes: an application of a cognitive diagnosis modeling frame work. *Mathematics Education Research Journal*, 1-19.
- Tjoe et al. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? *Journal of Mathematical Behavior* 1-7.

Apéndice A**Actividad de Exploración en Problemas de Valor Faltante**

1. Un basquetbolista encesta canastas a razón de 7 anotados por 2 fallados, si en una competencia ha fallado 10 tiros ¿Cuántos tiros anotó?

a) 30 b) 35 c) 40 d) 25 e) 45

2. En una muestra de 685 plumas hay 12 defectuosas. Si se mantiene esta tasa, en un pedido de 8220 habrá:

a) 12 b) 144 c) 685 d) 24 e) 60

3. Determina el valor de “x” en la figura si los triángulos son proporcionales:



- a) $x = 15\text{cm}$ b) $x = 16\text{cm}$ c) $x = 18\text{cm}$ d) $x = 22\text{cm}$ e) $x = 20\text{cm}$

4. Para hacer donas, María necesita 8 tazas de harina para hacer 14 donas, usando el mismo recipiente, cuantas donas puede hacer con 12 tazas de harina

a) 22 b) 18 c) 24 d) 21 e) 20

5. Para hacer un pastel de 2kg se necesitan 4 tazas de harina, ¿Cuánto pastel se puede hacer con 25 tazas?

b) 23kg b) 12kg c) 12.5kg d) 13.5kg e) 14kg

6. La deformación que sufre un resorte cuando se aplica una fuerza varía de forma directamente proporcional con la deformación que éste sufre. Si para una fuerza aplicada de 35N la deformación que sufre el resorte es de 5cm ¿Cuál será de deformación que sufre el resorte si aumentamos en 45N la fuerza?

b) 7.5cm b) 6.4cm c) 3.8cm d) 6cm e) 7cm

7. La temperatura del aire baja según se asciende en la atmosfera, a razón de 9°C cada 300m. Si al despegar de Paris, que está a nivel del mar la temperatura es de 0°C , ¿A qué altura vuela el avión cuando la temperatura es de -81°C ?

- a) 300m b) 9000m c) 2700m d) 2900m e) 300m

8. El voltaje de un circuito es directamente proporcional a la corriente que pasa por él, si para una corriente de 3 amperes, el voltaje es de 12 volts. Determina qué corriente generará un voltaje de 15 volts.