



Una mirada al proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos en la resolución de problemas con el que ingresan los estudiantes a la universidad

Claudia **Barajas** Arenas

Estudiante del CICATA-IPN¹

Grupo EDUMAT-UIS, Universidad Industrial de Santander
Colombia

claubaren28@hotmail.com

Sandra Evelyn **Parada** Rico

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia

hsv@hr.ac.br

Resumen

En esta contribución se presentan resultados iniciales de una investigación que tiene por objetivo caracterizar algunas dificultades de estudiantes de nuevo ingreso a la universidad mientras resuelven problemas que implican variación, esto específicamente desde el proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Dicho estudio surge de un programa institucional de la Universidad Industrial de Santander (UIS; Colombia) en el que se pretende atender la problemática asociada a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial. Reportamos aquí, algunos resultados emergentes de una prueba diagnóstica inicial en la que se plantearon 14 situaciones asociadas a los Estándares Básicos de Competencias contemplados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006); el 58,82% de los estudiantes evidenció dificultades al aplicar la definición de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo en la solución de problemas trigonométricos.

Palabras clave: cálculo diferencial, dificultades, pensamiento variacional, procesos matemáticos.

¹ Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria perteneciente al Instituto Politécnico Nacional de México.

Summary

This contribution presents initial results of an investigation that aims to characterize some of the difficulties new entrants to university students who solve problems involving variation, specifically from the mathematical process of elaboration, comparison and training processes. This study stems from an institutional program of Industrial University of Santander (UIS; Colombia) in which is intended to address the problems associated with the teaching and learning of the differential calculus. Here, we report some emerging results from an initial diagnostic test that raised 14 situations associated with basic standards of competence covered by the Ministry of education of Colombia (MEN, 2006); in this test that 58,82% of students showed difficulties in applying the definition of trigonometric ratios in the triangle in solving trigonometric problems.

Key words: differential calculus, variational thinking, difficulty, mathematical processes.

Contexto de la investigación y problemática

Esta investigación se desarrolla en el marco de un proyecto de la Universidad Industrial de Santander de Colombia, universidad de carácter público que cuenta en su sede principal con cinco facultades, tres de las cuales agrupan a las carreras de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas y a las ingenierías, programas que cursan en primer nivel Cálculo I (Cálculo Diferencial).

Recientes resultados del seguimiento al fenómeno de deserción escolar en el país muestran que un factor determinante del abandono de estudios en Colombia se sitúa en la dimensión académica (MEN, 2009). Esto se ha identificado, desde varios proyectos realizados por la Vicerrectoría Académica de la universidad, que el curso Cálculo I (Cálculo Diferencial) se ubica en el primer y segundo lugar en cuanto reprobación, cancelación y repitencia en los estudiantes que recién ingresan a la universidad (Botello, 2013).

Con el propósito de apoyar a los estudiantes en sus procesos de enseñanza y aprendizaje en Cálculo, la Escuela de Matemáticas de la universidad ha desarrollado algunas iniciativas para reducir la problemática; el trabajo en equipo alrededor de ésta ha sido tal que se han institucionalizado el proyecto “Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con los cursos de cálculo de la Universidad Industrial de Santander”, éste cuenta con varias alternativas curriculares para atender, específicamente, la problemática relacionada con el curso de Cálculo Diferencial desde dos flancos: preventivo (estudiantes admitidos) y remediales (estudiantes matriculados) (Parada, 2012). En el curso de precálculo (flanco preventivo) participan los 300 estudiantes con bajo desempeño en la Prueba Saber 11, siendo este escenario en el cual surgió la inquietud por profundizar en aquellas dificultades relacionadas con el pensamiento variacional que traen los estudiantes de su educación media para responder a la pregunta de investigación: *¿con cuáles dificultades llegan los estudiantes a la universidad para resolver problemas que implican situaciones de variación, específicamente desde el proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos?* Esto traza el siguiente objetivo de la investigación: *caracterizar algunas dificultades en la resolución de problemas que implican variación, específicamente desde el proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procesos.*

Fundamentación teórica

Se hizo necesario, entonces, revisar lo que el Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia indica respecto a lo que debe ser la formación matemática del estudiante una vez culmine el grado once. Para empezar, es importante señalar que en Colombia el currículo que se adopte en cada establecimiento educativo debe tener en cuenta tres elementos directrices: (1) la Ley General de Educación emanada en la Ley 115 de 1994; (2) los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998); y (3) los Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

Elementos directrices de la educación colombiana

Los lineamientos pretenden dar orientaciones para la formulación del currículo de matemáticas. Este documento introduce dos ideas centrales: los procesos generales y los tipos de pensamiento matemático. Con esto, se pone el propósito de las matemáticas escolares en el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y su utilización socialmente más poderosa: la modelación, sin limitar las matemáticas escolares a la mera aplicación de algoritmos ya conocidos para “resolver problemas”, los cuales, más que problemas abiertos y retadores, son apenas ejercicios escolares, por necesarios que éstos sean (Vasco, 2006).

Los Estándares se basan en las ideas de los lineamientos para formular expectativas curriculares para ciclos de grados para contribuir a la competencia matemática de los escolares siendo, entonces, éstos últimos pertinentes para evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los estudiantes en el transcurrir de su vida escolar aunque el MEN (2012) aclara que un estándar no es un objetivo, una meta o un propósito.

Tipos de pensamiento matemáticos

Dentro de la estructura curricular colombiana, el pensamiento matemático se subdivide en cinco tipos de pensamiento cada uno con un sistema curricular asociado a saber: *i. pensamiento numérico y sistemas numéricos; ii. pensamiento espacial y sistemas geométricos; iii. pensamiento métrico y sistemas de medidas; iv. pensamiento aleatorio y sistemas de datos; y, vi. pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos* (MEN, 1998, 2006) siendo este último el objeto de estudio ya que en este convergen los cuatro pensamientos matemáticos restantes ya que requiere el pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal; requiere también el pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. Su principal herramienta son los sistemas analíticos, pero puede valerse también de sistemas lógicos, conjuntistas u otros sistemas generales de relaciones y transformaciones (Vasco, 2006).

Se consideran cuatro estándares para el pensamiento variacional, a saber (MEN, 2006, p. 89):

- (1) *utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos;*
- (2) *interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos;*
- (3) *analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas;*

(4) *modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.*

Pensamiento Variacional. En los últimos años, parte de la literatura en educación matemática resalta la importancia que tiene el estudio de procesos de variación y el reconocimiento de aspectos dinámicos de algunos conceptos matemáticos (Tall, 2009). De manera particular se llama la atención sobre el valor de la percepción, la identificación y la caracterización de la variación en diferentes contextos para el desarrollo del pensamiento matemático (Cantoral y Farfán, 1998; MEN, 2006; Posada y Villa-Ochoa, 2006; Cantoral, 2004; Dolores, 1999, 2007; Camargo y Guzmán, 2005; Tall, 2009). El NCTM (2003) motiva a los profesores de matemáticas a favorecer una “comprensión más profunda de las maneras en que los cambios en las cantidades se pueden representar matemáticamente” (2000, p. 305) mientras que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia propone el estudio de la variación en las aulas escolares como una manera de aproximarse al desarrollo del pensamiento variacional por lo que debe cultivarse desde temprana edad diseñando estrategias significativas para favorecerla comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (MEN, 2006, p. 66).

Este tipo de pensamiento, entonces, tiene que ver con el reconocimiento, percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (MEN, 2006, p. 66). Es decir, lo que se quiere es desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos (MEN, 2004, p. 17).

De modo que para efectos de esta investigación se dirá que un estudiante ha desarrollado su pensamiento variacional si tiene la capacidad de resolver situaciones de variación y cambio, en caso de no evidenciar dicha capacidad hablaremos de dificultad en el pensamiento variacional. El poder identificar el fenómeno de cambio, describirlo, interpretarlo, predecir sus consecuencias, cuantificarlo y modelarlo, son las características del pensamiento variacional que se pretenden desarrollar desde el currículo tomando en cuenta, además, diferentes momentos (no necesariamente consecutivos) que aparecen en el estudio de situaciones de variación y cambio:

1. Descripción e interpretación de situaciones de variación y cambio desde un punto de vista cualitativo.
2. Formas de representación cualitativa de estas situaciones
3. Formas de representación cuantitativa de situaciones de variación y cambio
4. Interpretación de representaciones de situaciones de variación y cambio

Es, entonces, desde de los estándares señalados para el pensamiento variacional que buscamos caracterizar las dificultades con las que llegan los estudiantes a la universidad, en términos del proceso elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos ya que se refiere a los “modos de saber hacer” y por ende involucra la comprensión de su carácter de herramientas eficaces y útiles en unas situaciones y no en otras.

Procesos matemáticos

Las habilidades que una persona requiera para resolver un problema matemático son variadas y dependen del tipo de problema a resolver y del nivel de desarrollo de los procesos matemáticos que responden a cinco: *i. el razonamiento; ii. la comunicación; iii. la modelación; iv. la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; y, v. la resolución y el planteamiento de problemas* (MEN, 1998). Se espera que en el currículo se integren estos elementos (pensamientos y procesos) a través del contexto que se refiere a los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido al conocimiento matemático que aprende.

Rico (1995) señala que dicho conocimiento está organizado, desde una perspectiva cognitiva, en dos grandes campos: conceptual y procedimental; indica también que el conocimiento procedimental consiste en los modos de ejecución ordenada de una tarea y que los procedimientos son aquellas formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas. El autor expone tres niveles diferentes en el campo de los procedimientos:

- a. Las **destrezas** que se ejecutan procesando hechos [unidades de información]
- b. Los **razonamientos** que se presentan al procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer conexiones entre los mismos.
- c. Las **estrategias**, que se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones.

El MEN (2010) complementa lo anterior enfatizando en que para analizar la contribución de la ejecución de procedimientos rutinarios en el desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento matemático es conveniente considerar los mecanismos cognitivos involucrados en dichos algoritmos; éstos son:

- ✓ *La alternación* de momentos en los que prima el conocimiento conceptual y otros en los que prima el procedimental, lo cual requiere atención, control, planeación, ejecución, verificación e interpretación intermitente de resultados parciales.
- ✓ *La automatización* que contribuye a adquirir destrezas en la ejecución fácil y rápida de cierto tipo de tareas aún cuando no contribuye directamente al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento.
- ✓ *La reflexión* sobre cuáles procedimientos y algoritmos conducen al reconocimiento de patrones y regularidades en el interior de determinado sistema simbólico y en qué contribuyen a su conceptualización. Este mecanismo demanda al estudiante dominio para explicar y entender los conceptos en los cuales se apoya un procedimiento o algoritmo.

Los procedimientos empleados en la resolución de problemas se consideran de tipo (MEN 1998, p. 104-106 citando a Rico (1995)): aritmético, métrico, geométrico y analítico. Tomando de referencia el trabajo de Posada et al. (2005), en términos del pensamiento variacional se dirá que un estudiante no tiene dificultades en los procedimientos de tipo

- ✓ *aritmético*, si tiene un correcto dominio del campo de los números reales y de las operaciones básicas y superiores; si establece relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada; si utiliza argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales, entre otros.

- ✓ *métrico*, si emplea correctamente los aparatos de medida más comunes de las magnitudes longitud, tiempo, amplitud, capacidad, peso y superficie; si domina el sistema métrico decimal; si justifica resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición, entre otros.
- ✓ *geométrico*, si evidencia rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano. Si domina y emplea determinados convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos. Si describe y modela fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas, etc.
- ✓ *analítico*, tienen que ver con “álgebra”, “funciones” y “cálculo diferencial e integral”. Algunas habilidades de este tipo de procedimientos son: modelar situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas; traducir de una a otra de las distintas representaciones de una función; resolver ecuaciones; comprender y hallar las tasas de inflación; analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales; analizar los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales, etc.

También son considerados, por el *Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias* (TIMSS, por sus siglas en inglés), los *procedimientos de rutina* los cuales se consideran dos categorías: i. usar equipos (instrumentos como reglas, transportadores, calculadoras, entre otros); ii. ejecutar procedimientos de rutina como calcular, graficar, transformar y medir.

De modo que cuando un estudiante domina los procedimientos está evidenciando fortalezas en sus destrezas, estrategias y razonamientos para la resolución de problemas variacionales (para el caso de la investigación); al mismo tiempo que articula su capacidad de alternar, automatizar y reflexionar sobre los conceptos y, por ende, establece conexiones entre el conocimiento conceptual y procedimental pues éste implica mucho más que la simple puesta en práctica. Caemos, entonces, en la línea delgada que separa el saber hacer con el aprendizaje basado en procedimientos, y algoritmos desligados del conocimiento conceptual necesario para la comprensión de las ideas fuertes del cálculo.

Artigue (2003, p. 123) quien ha estudiado las dificultades del aprendizaje del cálculo con el ánimo de comprenderlas y describirlas, señala una posible justificación a ello ya que “la transición hacia aproximaciones más formales [de los conceptos matemáticos], que tiene lugar en la universidad, representa un salto tremendo, tanto conceptual como técnicamente”. Salinas y Alanís (2009, p. 359) afirman que

“... este desarrollo [el de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo] se justifica ante el esclarecimiento de un paradigma tradicional de enseñanza que deja mucho que desear en cuanto al aprendizaje: elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas son hechos que han sido reportados en los últimos treinta años con respecto a los cursos de Cálculo en el nivel medio superior y superior de educación” (Salinas y Alanís, 2009, p. 359).

Así, Artigue (2003) y Salinas y Alanís (2009) señalan una cuestión subyacente muy compleja: los métodos de enseñanza del cálculo continúan siendo muy tradicionales ya que se enfocan en prácticas algorítmicas y algebraicas lo cual afecta negativamente la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo: *acumulación y variación*. Abrate, Pochulu y Vargas

(2006) enfatizan en que debemos tener en cuenta que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática nos encontramos con una gran variedad de dificultades que son potencialmente generadoras de errores; tales dificultades son categorizadas por los autores desde Di Blasi Regner y otros (2003, citado por Abrate, Pochulu y Vargas, 2006, pp. 31-34) en los siguientes tópicos:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza.
4. Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales.

Neira (2000) planteó buscar las causas del problema de la reprobación y la incomprensión del cálculo no solo en el cálculo mismo o en los recursos empleados para su enseñanza, sino en la transición del álgebra al cálculo, ya que el lenguaje, los razonamientos, la lógica, el tratamiento de los signos usados en el cálculo, plantean una ruptura con lo que se hace en álgebra exigiendo el dominio del conocimiento conceptual de los elementos del cálculo, de modo que cuando este dominio no se da, da lugar a las dificultades indicando la “dificultad” el mayor o menor grado de éxito de los estudiantes ante una tarea matemática. Así, reiterando, esta investigación, caracterizará las dificultades en la resolución de problemas propios del pensamiento variacional, desde los procedimientos en las cuales los estudiantes presentan dificultades.

Procedimiento metodológico

Para alcanzar el objetivo propuesto, esta investigación siguió metodologías cuantitativas y cualitativas por lo que se podría tipificar como una investigación fenomenológica de tipo experimental. El proceso metodológico responde a las siguientes fases:

Fase 1: Exploración de datos del Programa ASAE

Desde hace tres años se viene implementando un programa de tutorías entre pares, dirigido a estudiantes de Cálculo Diferencial que presentan dificultades en su aprendizaje a medida que transcurre el semestre académico; las tutorías son facilitadas por profesores en formación (tutores y estudiantes del curso de Didáctica del Cálculo), y coordinado por formadores de profesores: ASAE, Atención, Seguimiento y Acompañamiento a los Estudiantes de Cálculo I. Los alumnos-tutores realizan, tras cada tutoría, un reporte del desempeño de los estudiantes en el “Formato para las tutorías de Cálculo I” refiriéndose tanto a las fortalezas, dificultades del estudiante y a las actividades tratadas durante la tutoría. Por lo anterior, los formatos se consideraron como una primera fuente de exploración para este trabajo, tras lo cual se diseñó un instrumento (Formato DIPEVA²) para sistematizar los datos de 37 alumnos-tutorados atendidos por 17 alumnos-profesores en segunda versión del programa.

Fase 2: Elección del contexto de estudio

Tras los resultados de la fase 1, se eligió el curso de precálculo de la UIS ya que es el primer espacio universitario, con el cual tienen contacto los estudiantes de primer nivel de

² DIPEVA responde a la abreviatura de “dificultades en el pensamiento variacional”.

programas de ingenierías y de la Facultad de Ciencias, desde hace un año. Este curso lo ofrece la universidad a estudiantes caracterizados en riesgo académico en matemáticas después de revisar el desempeño en el área de Matemáticas en la Pruebas Saber 11 realizada por el Ministerio de Educación Nacional.

El curso realiza como parte de sus actividades, una prueba diagnóstica inicial (PDI) y una final (PDF). El primer semestre de 2014, la prueba se realizó por primera vez a través de una plataforma virtual que genera un reporte individual del desempeño del estudiante; la prueba constó de 14 preguntas que responden cada una, a un indicador que permite medir los estándares mencionados en el apartado anterior.

Fase 3: Diseño del Experimento I

Desde sus inicios, tras cada semestre, los profesores del curso de precálculo entregan un informe cualitativo que reporta la asistencia, el desempeño (fortalezas y debilidades) de cada estudiante en la PDI y en el desarrollo del curso. Para efectos de este trabajo, se consideró conveniente modificar ese informe adaptando el instrumento empleado en la Fase 1 para que los profesores evaluaran las dificultades del pensamiento variacional (Formato de Evaluación DIPEVA) usando los indicadores definidos para valorar cada estándar. También se consideró el diseño de un segundo instrumento (Hoja de Procesos) para que los estudiantes escribieran en él los procedimientos empleados. De dicho instrumento se recolectaron los datos de 460 estudiantes que dan paso a la fase siguiente.

El formato ofreció al profesor de precálculo valorar al estudiante con un puntaje entre 0 a 5, significando 0 “ausencia de dificultad”, y 5 “el máximo nivel de dificultad” esto valorando cada indicador en tres tiempos: (i) PDI (aquí se toman en cuenta la Hoja de Procesos y el reporte de plataforma que arroja “X” para el indicador en el cual el estudiante erró en la respuesta a la pregunta, y “chulito (\checkmark)” en caso contrario); (ii) el desarrollo del curso de precálculo; y (iii) la PDF. De tal suerte que dichas características son fundamentales para el análisis del experimento.

Fase 4. Análisis del Experimento I

El Formato de Evaluación DIPEVA se entregó de manera electrónica a los 17 profesores; cada formato tenía una programación para recuperar sintéticamente las valoraciones de los estudiantes. A su vez, a los 17 formatos se les realizó un tratamiento para consolidar los datos de todos los estudiantes participantes. Finalmente, se realizó un análisis cuantitativo-descriptivo desde los indicadores, del cual reportaremos algunos resultados en el siguiente apartado.

Fase 5. Diseño del experimento II

Para el segundo semestre de 2014, se aplicó la PDI. El instrumento de la Hoja de Procesos fue aplicado solo a los estudiantes de las carreras que han reportado mayor porcentaje de errores en la prueba diagnóstica durante el curso: Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas e Ingeniería de Sistemas, como lo reportó la coordinación del programa ASAE.

Esta fase responde a tres sub-fases:

- i. *Análisis a priori* de los 13 problemas de la PDI para identificar los procedimientos (y el tipo de éstos) que se esperaba el estudiante empleara para la solución del mismo.
- ii. *Recolección de los datos*; subfase que ya fue realizada tras la ejecución del curso de precálculo 2014-II.

iii. *Análisis a posteriori* en el cual se revisarán cuidadosamente las Hojas de Respuesta para entrar a categorizar las dificultades que emerjan de éstas en cada problema; de modo que logremos reportar tanto cuantitativa y cualitativamente las dificultades en el proceso mencionado de tal suerte que hallemos respaldo en diferentes autores de la educación matemática desde quienes interpretaremos las evidencias de las dificultades.

Fase 6. Caracterización de las dificultades

Tras las fases anteriores, se realizará la caracterización que dará cumplimiento al objetivo de esta investigación desde el proceso de elaboración, comparación y ejecución de procedimientos.

Finalmente, queremos señalar que las fases anteriores reportan el procedimiento de la investigación en su estado actual después de varias reflexiones y ajustes que sobre el mismo se realizaron desde la publicación del primer reporte de este trabajo en Barajas y Parada (aceptado).

Primeros resultados

Del programa ASAE (fase I) se tuvo una primera aproximación a las dificultades del pensamiento variacional de los estudiantes participantes. Esto se realizó desde los formatos para las tutorías de Cálculo I de la versión 2013-II del programa. Para este fin se diseñó el primer instrumento DIPEVA que viene a ser, para esta fase, una malla a través de la cual se recuperaron las dificultades reportadas alrededor de los procesos matemáticos. La exploración de los datos de 34 alumnos-tutorados se obtuvo que aproximadamente el 73% de éstos evidenciaron dificultades en el conocimiento procedimental, en particular: casos de factorización, operaciones con fracciones, y representaciones gráficas de funciones (rationales y a trozos), y funciones trigonométricas.

Los hallazgos de esta fase, nos motivaron a profundizar más en el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos de los estudiantes de nuevo ingreso ya que, dentro del proyecto de la estructura curricular para atender la problemática de reprobación en Cálculo I la UIS, se tiene una fuente rica de exploración que es el curso de precálculo pues los estudiantes que pertenecen a éste aún no han iniciado el curso de cálculo. Esta población nos dará muestras más claras de cómo los estudiantes egresan del nivel de educación media.

De las dificultades reportadas por los profesores en los indicadores de los estándares, se rescató que la mayoría de estudiantes presentó mayor dificultad en la resolución de problemas del estándar “modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas” pues en promedio el 62,50% de la población evidenció nivel 5 de dificultad mostrando mayor porcentaje de dificultad en el indicador “modela situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas”.

Tabla 1

Resultados porcentuales del Formato de Evaluación DIPEVA, Fase 4

ESTÁNDAR	ESTUDIANTES CON NIVEL DE DIFICULTAD 5	INDICADORES	ESTUDIANTES CON NIVEL DE DIFICULTAD 5
Análisis de las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales	52,45%	1. Relaciona correctamente los diferentes registros de representación de una función en una situación problema.	54,77%
		2. Modela con propiedad una situación de cambio a través de una función.	54,52%

y de sus derivadas		3. Identifica con claridad una función, la relación que existe entre la gráfica y la expresión algebraica.	43,66%
		4. Reconoce las derivadas de funciones polinómicas o racionales, y las relaciona con el crecimiento o decrecimiento de las mismas.	56,86%
Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	56,06%	5. Reconoce e interpreta situaciones que implican variación.	47,67%
		6. Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones en contextos matemáticos o no matemáticos.	54,66%
		7. Desarrolla o aplica métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	58,82%
		8. Interpreta la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva.	63,08%
Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.	62,50%	9. Modela situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.	64,37%
		10. Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones trigonométricas en contextos matemáticos o no matemáticos.	64,30%
		11. Comprende y aplica la definición de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo en la solución de problemas trigonométricos.	58,82%
Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.	37,92%	12. Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: gráficas, tablas o explicaciones verbales.	34,88%
		13. Utiliza aproximaciones numéricas o gráficas para deducir intuitivamente el límite de una función.	40,98%
		14. Aplica procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos.	37,90%

Fuente: Investigadora.

De la lectura de los indicadores en la Tabla 1, se tiene que los que corresponden a los numerales 4, 7, 11, 12, 13, y 14 se desarrollan a la luz del proceso de comparación, elaboración y ejecución de procedimientos con un promedio del 46,28% de dificultad. Esto sostiene nuestra primera hipótesis en tanto a que los estudiantes tienen dificultades al elaborar y ejecutar procedimientos como lo mostraron los resultados encontrados de la Fase 1. Esto destaca que las dificultades no aparecen al azar sino que surgen en un marco consistente formado por conocimientos adquiridos previamente, y del proceso de enseñanza que, como lo señala Pochulu (s.f.), es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunas de las cuales se presentan inevitablemente.

A modo de cierre

Para concluir, queremos expresar que la investigación en educación matemática es un campo en continuo cambio y progreso y que los contextos de donde surgen los fenómenos a estudiar son complejos por sus magnitudes y por las variables involucradas las cuales resultan difíciles de manejar. No obstante, tras el aprendizaje que nos viene dejando el recorrido transitado en este trabajo, nos hemos permitido reflexionar profundamente sobre el fenómeno de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas a nivel superior para, por ende, brindar a la comunidad educativa una brújula que permita comprender una parte del origen de las mismas. De modo que en este momento nos encontramos analizando, con mayor detalle, las hojas de procesos tras lo cual reportaremos nuestros hallazgos los cuales esperamos fortalezcan las alternativas curriculares que ofrece la UIS para ofrecer a los estudiantes mayores oportunidad de alcanzar superar sus aprietos académicos y sus dificultades cognitivas alrededor del

conocimiento matemático aún cuando diversas investigaciones reportan que los “presaberes erróneos” de los estudiantes son persistentes al cambio.

Bibliografía

- Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María. Recuperado de <http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>
- Artigue, M. (2003). “¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?”. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2). Recuperado de <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf>
- Barajas C., & Parada, S. (en edición). Aproximación a las dificultades del pensamiento variacional de estudiantes de nuevo ingreso de la Universidad Industrial de Santander. En *XV Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (Asocolme)*. Universidad Industrial de Santander. Colombia.
- Botello, C. (2013). *Procesos de Seguimiento y Acompañamiento Académico a Estudiantes de Cálculo Diferencial: Un Aula Experimental para Profesores de Matemáticas en Formación* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Industrial de Santander. Colombia.
- Camargo, L., & Guzmán, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón de cambio*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio
- Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 42, 353-369.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (17, pp. 1-9). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2009). *Deserción estudiantil en la educación superior colombiana. Metodología de seguimiento, diagnóstico y elementos para su prevención*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2012). Normas Técnicas Curriculares. En: *Altablero, El periódico de un país que educa y que se educa* [versión en línea]. Recuperado de <http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-87801.html>
- Neira, G. (2000). El paso del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. *Revista Universidad Distrital Francisco José de Caldas*. Colombia Recuperado de <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/reving/article/viewFile/3505/5053>
- Parada, S. (2012). *Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander* (Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas). Bucaramanga, Colombia: UIS.

- Pochulu, D. (s.f.). “Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática”. *Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado de <http://www.rioei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf>
- Posada, M., et ali. (2005). *Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas*. Gobernación de Antioquia. Tomado de <http://www centauros.edu.co/pdf/PENSAMIEWNTO%20NUMERICO.pdf>
- Posada, F., & Villa-Ochoa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En F. Posada, & G. Obando (Eds.), *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico Didáctica de las matemáticas*, 2(2). (pp. 127-163). Medellín: Gobernación de Antioquia.
- Rico, L. (1995). “Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas”. *Revista Ema*, 1(1), 4-24. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/984/1/1_Rico1995Consideraciones_RevEMA.pdf
- Salinas, P., & Alanís, J. A. (2009).”Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa”. *Relime*, 12(3), Noviembre de 2009. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n3/v12n3a4.pdf>
- Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM. Mathematics Education*, 41(4), 481-492
- Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.