XIV CIAEM 2015
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Interamerican Conference on Mathematics Education
3-7 mayo
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad

Diana Isabel **Quintero** Suica
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma_dquintero472@pedagogica.edu.co
Mg. Nathalia **Valderrama** Ramírez
Fundación Universitaria del Área Andina y Universidad Nacional de Colombia
Colombia
nkvalderramar@unal.edu.co

Resumen

Esta comunicación presenta un trabajo realizado por una docente en formación y la docente titular de un grupo de estudiantes de grado séptimo del colegio Manuela Beltrán IED en Bogotá, Colombia. Como propuesta de enseñanza describe una estrategia que utiliza como herramienta didáctica la historia de las matemáticas para introducir el concepto de proporcionalidad a partir de un método denominado "El método de antanairesis o antiphairesis" el cual fue utilizado por los matemáticos Griegos para hallar la medida común de una pareja de magnitudes del mismo tipo y la proporción de estos. Dada la importancia de la historia en la construcción de las matemáticas se diseña la propuesta de enseñanza, se lleva al aula apoyada de material didáctico y se evalúa desde la mirada de las dos docentes, destacando fortalezas y debilidades evidenciadas en el aula y específicamente en las actuaciones de los aprendices.

Palabras clave: proporcionalidad, razón, antanairesis, antiphairesis, matemática griega.

El concepto de proporcionalidad

Marco histórico y matemático

El marco que a continuación presentamos se encuentra ilustrado desde dos perspectivas: el trabajo que presenta Guacaneme (2001) sobre el concepto de proporcionalidad en su trabajo de tesis de maestría, y una consulta en textos históricos sobre el método de antanirésis y el uso que en dichos textos se muestra de éste.

De la enseñanza de la proporcionalidad. En el análisis de varios textos de matemáticas Guacaneme (2001) muestra algunas de las contradicciones que se generan, tanto matemática como intuitivamente al hablar indistintamente de la razón y el cociente exacto entre dos números.

En síntesis, muestra algunas definiciones introductorias usuales que se usan en textos para explicar el concepto de proporcionalidad, para luego hacer algunas aclaraciones sobre las implicaciones que se establecen al hacer las interpretaciones de estas.

Por ejemplo, para definir las fracciones de números reales, uno de los textos consultados por él indica que es "un ente constituido por un par de números reales, donde se supone el segundo de ellos no es cero. Si α y β son éstos, la fracción se representa así: α/β". El mismo texto indican que "la fracción α/β es el valor del cociente exacto entre los números reales α y β y por tanto un número real. Al cociente indicado α/β o α: β se le denomina también razón de los números α y β".

A partir de estas definiciones, el autor hace ver las siguientes dificultades:

> En la definición de fracciones de números reales no se hace explícito el por qué se considera que el β no debe ser cero, lo cual cobra sentido es en la definición de cociente exacto.
>
> Señala que al afirmar que una pareja ordenada de números reales es igual a otro número real objeta la intuición de que *dos no puede ser uno,* y por otro, infringe con las normas de la estructura lógica y rigurosa de la matemática.
>
> Sugiere pensar, para definir razón, en una función cociente que asigne a cada pareja de números reales α y β el número γ, de tal forma que se admita la existencia de una relación de equivalencia entre parejas ordenas y un cociente exacto y no el de igualdad entre la fracción y cociente, es decir, considerar que una razón no es un número real, sino que es una pareja de números reales. Con base en esto, se puede concebir a la proporción como una relación entre las razones y no como una igualdad entre dos cocientes.

Del método de Antanairesis. Con base en las observaciones descritas en el marco de referencia de la enseñanza de la proporcionalidad, se hizo preciso buscar una alternativa diferente a las usuales sugerencias en los libros de textos escolares, para elaborar una propuesta de enseñanza de este concepto. Sin embargo, no encontramos documentada (por lo menos en nuestra búsqueda) dicha alternativa para implementar en el aula.

La "idea", reside en uno de los tantos métodos utilizados por los antiguos griegos para hacer matemática. Dicho método se conoce con el nombre de antanairesis[1], aunque su nombre se popularizó como *algoritmo de Euclides*.

El método básicamente consiste en hallar una medida común a dos magnitudes dadas. Dicha medida se puede obtener por medio de la sustracción reiterada de una de las magnitudes a la otra. Ésta sustracción genera una n-upla de números que describen la razón entre ambos

[1]También conocido como *Antiphairesis.* La expresión "antanairesis" es derivada de la composición *anti-ana-hairesis*que significa retracción recíproca; y "antiphairesis" derivada de *anti-hypo-hairesi*que significa sustracción recíproca de acuerdo a Fowler (1999). Aunque se ha argüido que las dos palabras tienen un diferente significado, en el presente documento se les da el tratamiento de sinónimos.

objetos.

Un ejemplo, es la razón que conserva el círculo con el cuadrado cuyo lado es su diámetro. Cuando las razones entre dos círculos y los cuadrados cuyos lados son los diámetros de estos círculos son las mismas, entonces las dos parejas de objetos son proporcionales. Basta ver que todas las razones posibles entre estos dos tipos de objetos son iguales debido a que la razón siempre es π

Fowler (1999) presenta un diálogo artificial, que se supone sostendrían Sócrates y un esclavo y que se expondría en los diálogos de Platón sobre el problema ¿*Cuál es la relación del tamaño entre un cúmulo de sesenta piedras, y un cúmulo de veintiséis piedras*? A continuación presentamos un fragmento de dicha conversación.

Sócrates: Dime esclavo, ¿Cuál es la relación de tamaño entre un cúmulo de sesenta piedras y un cúmulo de veintiséis piedras?

Esclavo: ¿Quiere decir el número de veces que el pequeño está en el grande?

Sócrates: Exacto

Esclavo: Está más de dos veces pero menos de tres

Sócrates: ¿Puedes ser más preciso?

Esclavo: Está un par de veces con ocho piedras sobrantes.

Sócrates: Estas ocho piedras no están relacionadas con alguna otra cosa.

Esclavo: Omití decir que estas están en relación con el otro montón de veintiséis piedras.

Sócrates: Explícame

Esclavo: Dame un momento. Puedo describir las relaciones en la misma vía. Es decir, dos veces en el primer paso, y luego dirás la relación entre las ocho piedras y las veintiséis piedras.

Sócrates: Continua

Esclavo: Nuevamente, este debe ser el número de veces que el pequeño está en el grande: esta es tres veces; y entonces la relación entre dos piedras y ocho piedras, la cual es cuatro veces exactamente.

Sócrates: Has extraído la relación expresada por: primer paso, dos; segundo paso, tres veces; tercer paso, cuatro veces exactamente. El nombre técnico para esto es una razón.

(60:26 = [2, 3, 4]) (pp.24 - 25)

Aunque en la actualidad solemos denotar las razones inconmensurables por medio de los números irracionales, para los griegos la palabra *número* sobreentendía que este era entero positivo por lo cual, un número a/b no indicaría un número racional sino una especial relación entre los números *a* y *b* a lo cual denominaron razón Gonzales (2008).

Algunos indicios de esto se pueden ver en el libro *Elementos* de Euclides, el cual reunía los conocimientos matemáticos hasta ese momento descubiertos bajo un sistema axiomático, en la presentación de la teoría de las proporciones de Eduxio en el libro V. Allí, particularmente en la definición 3 y 4, se muestra la descripción de lo que es una razón, entendida como "una especie de relación respecto del tamaño entre dos magnitudes del mismo tipo"; y de cuando dos magnitudes tienen una razón o proporción, indicando que estas "tienen una relación una a la otra cuando se es capaz de multiplicar excediendo una a la otra" Fowler (1999). También se muestra en el libro VIII definición 20, que "dos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, o las mismas partes, del segundo que el tercero del cuarto".

Para entender la definición de Eudoxio de la proporción, usualmente suele traducírsele a la notación algebraica moderna, así: a:b = c:d si para todo par de enteros m, n, se tiene que ma > nc Corry (s.f.). Dicha definición se estableció de forma que pueda ser aplicable a parejas de segmentos, entre dos áreas o, inclusive, entre dos volúmenes Corry (s.f.).

A partir de este marco de referencia encontrado en el estudio de la historia de la matemática, se plantea la propuesta de acción en el aula la cual describiremos a continuación.

Propuesta de enseñanza

La propuesta de enseñanza se diseña con el objetivo de introducir el concepto de proporcionalidad a partir de "el método de antanairesis" para implementar con un grupo de 36 estudiantes de grado séptimo de escolaridad, del colegio Manuela Beltrán IED. Las docentes responsables tienen el rol de docente en formación y docente titular de la práctica profesional, quienes participan conjuntamente en el diseño, la implementación y la evaluación de la propuesta y de los resultados del método mismo.

Los recursos utilizados para llevar a cabo las actividades propuestas fueron de dos tipos: material concreto y material intangible. El material concreto, utilizado en la primera sesión, fueron palitos de madera, los cuales se proporcionaron a cada pareja de estudiantes en grupos de trece palitos, cinco de un color y ocho de otro como se muestra en la imagen.

Figura1. Material concreto.

El material intangible, utilizado en la segunda sesión, fueron las representaciones de parejas de segmentos de diferente medida. Para ilustrar el algoritmo de Euclides, se tomaron segmentos de ocho y cinco unidades. Para plantear las siguientes tareas relacionadas con hallar la razón y verificación de proporcionalidad, se usaron dos parejas de segmentos: una con representaciones cuya medida eran el doble de los segmentos de ocho y cinco unidades; y la otra con segmentos de veintisiete y doce unidades, y sus respectivos tercios.

Para hablar de la metodología, es de especial importancia mencionar que las tareas propuestas se desarrollaron en dos sesiones de clase, cada una de cien minutos las cuales se describen a continuación.

Primera sesión: En ésta sesión, después de hacer entrega del material didáctico (palitos), se propuso la siguiente tarea

"¿Cuál es la medida común (o número de palitos) a cada una de las dos colecciones de palitos? Es decir, si se hace un grupo de n palitos con el cual puede medir exactamente cada cúmulo ¿Cuál debe ser el valor de n?”

Para abordar el problema se tomaron tres conjuntos de palitos, a saber:

Conjunto 1: Seis palitos de un color y tres del otro.

Conjunto 2: Seis palitos de un color y cuatro palitos del otro.

Conjunto 3: Ocho palitos de un color y cinco palitos del otro.

Estos tres conjuntos se eligieron de esta manera de forma tal que la medida común en una pareja fuera el mismo número de la menor cantidad de palitos, en otra solo hubiese como medida común uno, y en la tercera pareja donde la medida común no solo fuese uno, sino que además esta(s) otras medidas, fuesen diferentes a la menor cantidad de palitos.

Posterior a esto se propuso encontrar las medidas comunes a conjuntos de palitos que fuesen el doble de los conjuntos anteriores, es decir

Conjunto 4: Doce palitos de un color y seis del otro.

Conjunto 5: Doce palitos de un color y ocho palitos del otro.

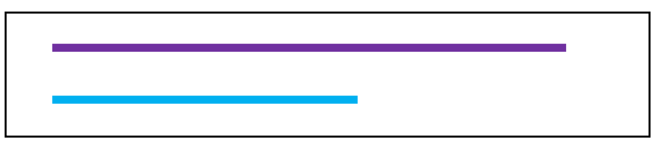
Conjunto 6: Dieciséis palitos de un color y quince palitos del otro.

Con este trabajo para hallar las medidas comunes se pretendía definir el *Máximo Común Divisor* como la medida común que tiene mayor magnitud entre otras dos dadas.

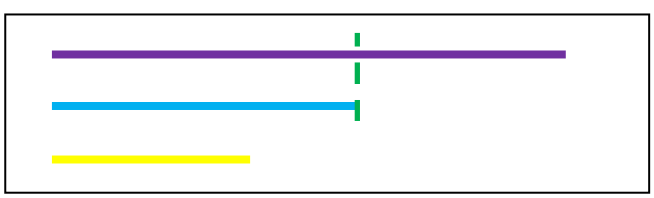
Segunda sesión: En la segunda sesión de clase se propuso, a partir de la representación de dos segmentos, la siguiente tarea:

“¿Cuál es la medida común a cada uno de los dos segmentos? Es decir, si se construye un segmento con el cual puede medir exactamente cada uno de los otros dos ¿Cuál es dicho segmento?”

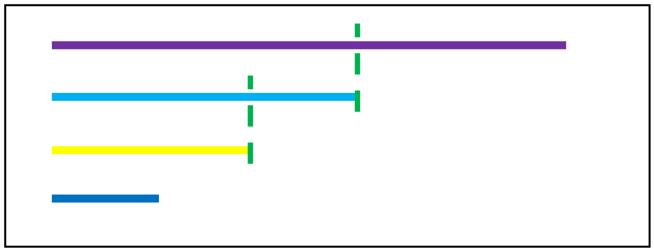
A partir de este problema se mostró el método de antanairesis así: Sean *a* y *b* dos segmentos como se muestran a continuación.



Entonces, al de mayor longitud le resto el de menor longitud tantas veces como pueda, que en este caso particular se podrá efectuar la sustracción solo una vez - [1,] -, y el resto se representa con el segmento amarillo.



Se efectúa nuevamente la sustracción, pero en esta ocasión al segmento turquesa se le resta el segmento amarillo. Como se puede observar, nuevamente puedo efectuar la resta una vez - [1,1,] y el resto estará simbolizado por el segmento azul.



Se lleva a cabo el procedimiento, tantas veces como sea necesario hasta que el residuo se pueda restar al segmento inmediatamente anterior – [1,1, …, n] – de tal forma que el resto sea cero. La medida común máxima entonces será el último segmento encontrado.

Luego de esto, se plantea la pregunta: si al extender cada uno de los segmentos dos veces, ¿estos conservarán la misma medida común máxima? y ¿la n-upla que representa el procedimiento para hallar ésta es la misma?

Como la n-upla iba a ser la misma, se definió la proporcionalidad como una relación entre, por lo menos dos parejas de objetos del mismo tipo que tienen una misma razón. También con esto se identificó la case de equivalencia correspondientes a parejas de segmentos que guardan la misma razón.

Actuación de los aprendices: Aunque, en la primera sesión, se esperaba que alguno llegara a decir que una medida común fuese la mitad de un palito, un cuarto, un octavo y por lo tanto, podían ser infinitas las medidas comunes, los estudiantes no expresaron esto en la primera sesión. No obstante, en la segunda sesión, al trabajar con segmentos, sí lo indicaron y reconocieron el proceso al infinito de obtener partes de la medida común como medidas comunes igualmente. Se presume que esto fue debido al contexto (discreto o continuo) en el que se estaba hablando, ya que para el estudiante no era tan obvio dividir mentalmente uno de los palitos pero si lo era dividir el segmento.

Ismael, uno de los estudiantes, indicó que para probar si un número dado era la medida común, entonces él tomaba el número dado y verificaba cuantas veces cabía en cada una de las cantidades de palitos dadas. Cuando realizó la explicación tomó como ejemplo, en el primer conjunto, al número tres. Dibujó los seis palitos y empezó a tachar de tres en tres, es decir, estaba haciendo una sustracción iterada. Esto abría el camino para llegar al método de antanairesis para hallar la medida común a cualesquiera dos cantidades de palitos.

No obstante, en medio de esto, surgen algunas conjeturas por parte de los estudiantes respecto a las medidas comunes. Una de ellas, por ejemplo, es que *uno es la medida común a cualquier pareja de cantidades palitos*, lo cual es cierto ya que desde el punto de vista matemático cualquier número es divisible por uno y el resultado es el mismo número.

Otra de las conjeturas, esta vez más interesante, se dio en medio de la argumentación de Ismael que justificaba su procedimiento para hallar la medida común. Él afirmó que si uno de los números de palitos era par y el otro era impar, entonces la medida común a ambos números era uno. Se presume que lo hizo partiendo del caso particular de la tarea propuesta con los ocho y cinco palitos y lo generalizó para cualquier caso. Sin embargo, una de las estudiantes refutó la conjetura de Ismael presentando un contraejemplo: diez palitos de un color y cinco del otro. Ella justificó la razón por la cual era un contraejemplo, ya que un número era par, el otro impar y aún así la medida común no era solo el uno (por ejemplo el cinco también era medida común).

Seguido de esto Ismael reestructuró su conjetura indicando que una condición adicional para que fuese verdadera es que ninguno de los dos números fuese múltiplo del otro. En síntesis la conjetura fue:

Dados dos números, tal que uno de ellos sea par y el otro impar, y ninguno sea múltiplo del otro entonces la medida común entre los dos era solamente uno.

Se discutió con los estudiantes la validez de la afirmación anterior encontrando el contraejemplo que daba cuenta de la falsedad de la afirmación. El ejemplo que se propuso fue la pareja (12, 27)[2]. Cuando se analizó esta pareja de números con los estudiantes se podía concluir que cumplían ambas condiciones (el número doce es par, el número veintisiete es impar. Ninguno de los números es múltiplo del otro), y aún así, su medida común no era solamente uno ya que, por ejemplo, el número tres también es una medida común a ambos. Esto, además evidencia que al no reconocer a la razón como un cociente exacto, tal como se indicó en el marco histórico y matemático de acuerdo a los aportes e Guacaneme (2001), identifican la multiplicidad de medidas comunes a dos cúmulos dados y no lo asocian a un único número.

Como la pareja de segmentos que se dibujó inicialmente en la segunda sesión, estaba ajustada a las unidades traslucidas que tiene el tablero, siendo uno de doce unidades y el otro de seis unidades, para Laura, una de las estudiantes, fue sencillo decir que la medida común era el número tres. Sin embargo, el problema planteaba la búsqueda de un segmento; no de un número, lo cual se le aclaró a ella en su momento. Posiblemente esto surge, debido a que los estudiantes se encuentran acostumbrados a simplificar todos los objetos matemáticos a números porque les es más fácil tratar con estos últimos, lo cual es comprensible y aceptable. Sin embargo, la respuesta de esta estudiante también hace ver la superación, por lo menos en el caso particular de ella, de la noción de la razón como un cociente entre las magnitudes de los segmentos, de lo contrario su respuesta a la medida común de los segmentos hubiese sido dos.

Para terminar, no hubo alguna mención por parte de los estudiantes sobre la selección de un par de segmentos cuyo proceso de antanairesis fuese infinito, es decir segmentos inconmensurables. Para la propuesta de clase se consideraron los casos en los cuales la n-upla que describía la razón entre dos segmentos tenía un número finito de componentes y no se incluyó la posibilidad de explorar este suceso. Esta última razón puede ser una de las causantes para que no se hiciera mención a la inconmensurabilidad ya que los estudiantes en general seguían el patrón de ubicar, en lo posible, segmentos de tal forma que uno fuese múltiplo del otro.

Pertinencia y aportes de "el método antanairesis" al proceso de enseñanza aprendizaje

Como educadores de las matemáticas en la escuela y desde las diferentes concepciones del ser docente, debe existir el momento en el que como elementos importantes y decisivos en el proceso de enseñanza aprendizaje reflexionamos acerca de nuestras prácticas. A continuación se describen algunos aspectos importantes de la puesta en práctica de la propuesta de enseñanza a partir de "el método de antanairesis" como una herramienta propia de la historia para introducir

[2]Notación acordada en el aula de clase para designar la cantidad de palitos de cada uno de los colores. En el caso particular se pensaba en doce palitos de un color y veintisiete del otro.

el concepto de proporcionalidad en estudiantes de grado séptimo.

Teniendo en cuenta que la enseñanza en la escuela debe cumplir un sin fin de retos específicos del contexto en el que se desarrolla y de las características propias de los aprendices y que a pesar de los diferentes intentos por abolir el paradigma que se tiene de las matemáticas como una ciencia para unos pocos que son aptos, exclusivos y con características intelectuales específicas para acceder a esta ciencia. Hoy por hoy aun nos encontramos bajo dicho paradigma, el cual por un lado nos aleja cada vez más del ideal de vencer dichos retos y llegar al éxito esperado en la escuela y por otro lado, justifica el constante fracaso ante los aprendizajes escolares.

Desde esta perspectiva una de las principales tareas del educador matemático esta en orientar a sus aprendices por los diferentes caminos de acceso a este mundo de conocimiento matemático útil para la vida y posibilitar a partir de sus prácticas la motivación, el aprendiz interés por el conocimiento, incluso en aquellos se consideran hacen parte del fracaso escolar, frente a las matemáticas ¡La tarea no es fácil! Ames (1987) ha llamado "reentrenamiento cognitivo" al tratamiento que se debe dar al fracaso en la escuela, el cual en la mayoría de los casos obedecen a la desconfianza que tienen los aprendices en sí mismos, en sus habilidades académicas y a la poca capacidad que consideran tener para enfrentarse al conocimiento y a la resolución de un problema. Se establecen tres pasos para afrontar dicho tratamiento: La primera, el reentrenamiento para identificar los orígenes del fracaso: propone exponer a los aprendices a una serie de tareas bien planeadas cuyo diseño asegurara la experiencia del logro a partir del modelaje, la socialización y el intercambio de ideas. La segunda, el entrenamiento para establecer metas alcanzables: plantea una guía y/o orientación al aprendiz en la que sea capaz de reconocer sus habilidades y capacidades al afrontar sus tareas de forma razonable y, la tercera, obedece al entrenamiento para aprender estrategias destinadas a la resolución de problemas: en esta ultima el aprendiz es capaz de decidir y lograr estrategias a partir del modelaje y la instrucción utilizadas a la hora de resolver por sí mismos un problema.

Ahora bien, y centrados en la reflexión que como docentes hacemos a la puesta en práctica de la propuesta de enseñanza a partir de "el método de atanairesis" además de las descritas en las actuaciones de los aprendices, resaltamos lo que para nosotras es lograr la motivación evidenciada en los aprendices en su totalidad al enfrentarse con las tareas de forma positiva, interesada y teniendo confianza en sí mismos a la hora de justificar sus acciones (acciones matemáticas). La simplicidad del método, el material tangible y la instrucción guiada dieron paso a la posibilidad de socializar los argumentos de cada uno, contradecir los del otro para defender sus ideas, generar un debate cognitivo en el aula, hacer uso de conocimientos ya adquiridos para justificar sus conjeturas como es el caso de los múltiplos, divisores, máximo común divisor, el número 1 como divisor de cualquier número, y adquirir aprendizajes incluso en los errores cometidos, genero un ambiente de confianza e interés por participar y acceder al conocimiento, ya que como ellos mismos lo manifestaban "estaban entendiendo". Dichas evidencias de motivación y trabajo por parte de los aprendices parecen atender al llamado "reentrenamiento cognitivo" descrito anteriormente.

Por un momento se tornó en el aula un espacio de aprendizaje agradable, interesante, amable, divertido, emocionante, al cual todos pudieron acceder sin embargo, como bien sabemos es necesaria la formalización del objeto matemático en cuestión y fue allí donde se presentó una dificultad. Si bien los aprendices se familiarizaron con el método "lo entendieron" estaban a un paso de llegar a la relación de proporcionalidad a partir de lo que ya se tenía y lo más importante se tenía "entendido" de momento se evidencio una ruptura en dicha aura que contemplaba la clase. Como lo describe la docente orientadora quien observaba detenidamente la clase, se sintió caer un tempano de hielo que enfriaba las emociones de los aprendices y reflejaba en ellos caras de preocupación por el paso que daban (formalizar en un lenguaje matemático el concepto), o mejor el paso que daba la docente quizás con algunos pocos que seguían sus ideas "matemáticamente habladas", afortunadamente hubo quienes no se rindieron y después de haber salido del posible "fracaso" y sentir que desvanecían nuevamente, esto les dio la fortaleza para hacer un aporte más importante que si hubiesen definido en ese momento la proporcionalidad… y fue decir "no entiendo" en este momento la docente retoma la instrucción de manera muy guiada y explicita intentando llevar a todos nuevamente y aunque lo logra, se pierden emociones de la clase.

Conclusiones

Uno de los factores que se identifican como importantes (y casi como esenciales) al momento de desarrollar las actividades propuestas en el aula, es la motivación de los estudiantes entendida esta como el interés y actitud que nace por parte de ellos al ver que los recursos (en este caso palitos de colores y representaciones de segmentos) son asequibles a su nivel de conocimiento, evento que no sucede cuando desde el inicio el discurso del docente esta permeado del formalismo que usualmente se maneja en la escuela.

La historia, como recurso didáctico, es una fuente inagotable para idear propuestas de enseñanza de las matemáticas y enriquecer los conocimientos del futuro docente. Ésta permite utilizar elementos que para los estudiantes son muchos más intuitivos y que desarrolla en ellos una habilidad innata, como la que seguramente experimentaron los matemáticos y pensadores en la época en que surgió el concepto enseñado.

De otro lado, la historia nos ilustra, en algunas ocasiones, sobre los errores y obstáculos que pueden llegar a mostrar los estudiantes al momento de apropiarse del conocimiento, debido a que son las dificultades que son naturales en la construcción de los conceptos. Además, de rechazar, en cierta medida una de las concepciones que de los matemáticos se tiene (y en general de cualquier persona que hace actividad matemática), y es que son seres que un día divulgaron una idea genial e innovadora y del cual no se conocen las dificultades y obstáculos que se presentaron para llegar a dichas ideas. Sin embargo, ésta muestra a los actores involucrados en el proceso educativo que esto es erróneo, debido a que para llegar a esa "ideas geniales" hubo un camino arduo lleno de equivocaciones y análisis, para resolver los problemas.

Por otro lado, concluimos la importancia de considerar para esta propuesta y en general para cualquier propuesta de enseñanza de las matemáticas, establecer en un inicio relaciones entre un lenguaje cotidiano del aprendiz y el objeto matemático en estudio, de tal manera que él encuentre un lenguaje propio con sentido útil para referirse a las relaciones encontradas a partir del método; para nuestro caso la relación de proporcionalidad. Posteriormente cuando el docente tenga certeza de que el aprendiz dio el paso del método a la generalización de un concepto, propiedad y/o relación matemática, introduzca ahora sí, lo mismo pero en el lenguaje matemático.

Referencias y bibliografía

Ames, C. (1987). The enhacement of student motivation. En M. Maehr, & D. Kleyber (Eds.), *Avances y Motivation and Achievement: Enhacing Motivation* (Vol.5). Greenwich, CT: Jai Press.

Ames, C. (1990). Motivation: What teachers need to know? *Teacher collage Record, 91*(3), 409 – 421.

Corry, L. (s.f.). La teoría de las proporciones de Eudoxo interpretada por Dedekind.Recuperado de http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Dedekind-Eudoxus.pdf

Fowler, D. (1999). *The mathematics of Plato's Academy: A new reconstruction.* Oxford: Clarendon press.

Guacaneme, E. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas* (Tesis de maestría). Universidad del Valle: Cali, Colombia.

Gonzales, P.(2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *Sigma*, *33*(1), 101-130. Recuperado de http://www.ejgv.euskadi.net/r53-2291/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_33/8_solucion_eud oxo_33.pdf