Modelación de una situación que implica el uso de la función exponencial

Diana **Tec** Escalante
Universidad de Quintana Roo
Méxicodjte21@hotmail.com
Verónica **Vargas** Alejo
Universidad de Quintana Roo
México
vargas.av@gmail.com

Resumen

En este artículo se presenta y analiza una actividad mediante la cual se propone a los estudiantes que modelen con lápiz y papel una situación y, posteriormente, simulen una familia de problemas con algún software dinámico como Geogebra. La Actividad forma parte de un conjunto de actividades y problemas que se han estado diseñado en el marco de un proyecto de investigación, cuyo objetivo ha sido apoyar el surgimiento y desarrollo de conceptos matemáticos como variación, tasa de cambio y función. La fundamentación teórica que ha servido como sustento para el diseño y análisis de las actividades es la de Modelos y Modelación. La Actividad se elaboró para implementarse con estudiantes de nivel medio superior o superior, que estén aprendiendo el concepto de función, específicamente de función exponencial. Se ha encontrado que al resolver actividades de este tipo, los estudiantes conjeturan, observan patrones, generalizan y evalúan sus ideas matemáticas.

Palabras clave: Análisis de una Actividad, Nivel medio superior o superior, Función exponencial, Variación, Patrones, Generalización, Ciclos de comprensión, Modelos y modelación.

Introducción

De acuerdo con Stewart (2003, p. 193) “Cambios de todo tipo influyen en nuestras vidas”, es por ello que surge la importancia y necesidad de entender y controlar nuestro entorno. Así mismo, el medio eficaz para llevar a cabo esta tarea son las matemáticas. La comunidad de matemática educativa reconoce la importancia de generar procesos de enseñanza - aprendizaje en el aula que propicien en los estudiantes el aprendizaje de conceptos angulares de la matemática como variación, tasa de cambio y función (NCTM, 2011), por su importancia para desarrollar otros conceptos matemáticos y porque permiten describir, explicar y predecir situaciones del entorno real. Apoyar la transferencia de conocimiento matemático fuera del aula es cada vez más importante (Schoenfeld, 1992).

El tema de funciones exponenciales, actualmente se aborda en el sistema educativo mexicano desde el nivel medio superior. Se espera que el alumno al concluir el tema sea capaz de definir si la función es creciente o decreciente a partir de su expresión algebraica; obtenga valores de funciones exponenciales y logarítmicas utilizando tablas o calculadora; pueda trazar las gráficas de éstas funciones tabulando valores; utilice las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, así como logre aplicar las propiedades y relaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas para modelar y resolver problemas. (Dirección Académica de la Dirección General del Bachillerato, 2014)

En este artículo se presenta y analiza una actividad matemática susceptible de ser usada en cursos de matemáticas del nivel medio superior o superior. Se diseñó para abordar conceptos como función exponencial, variación, tasa de cambio y ecuación (Ärlebäck, Doerr, O'Neil, 2013).

Antecedentes

Aprender el concepto de función exponencial y de función en general no se debe reducir a la memorización de definiciones, algoritmos y fórmulas, porque aprender matemáticas implica desarrollar conocimiento, y de manera simultánea: habilidades, destrezas, aptitudes y hábitos en los estudiantes (NCTM, 2000), quienes deben aprender a transferir su conocimiento a situaciones más allá de la escuela. ¿Cómo lograrlo? De acuerdo con perspectivas como la de Modelos y modelación (Lesh & Doerr, 2003) y la perspectiva de Resolución de problemas (Schoenfeld, 1992), entre los aspectos esenciales que deben cuidarse está el diseño y análisis del tipo de tareas a proponer en el aula; así como el tipo de ambiente de aprendizaje que se genere (NCTM, 2000).

La tecnología es reconocida como un elemento importante en la resolución de problemas, por su carácter dinámico y no estático, así como por la facilidad del uso de múltiples representaciones; estos aspectos pueden utilizarse para propiciar una reflexión más profunda de la situación y conceptos matemáticos relacionados y, por lo tanto, para promover una ampliación o modificación de los tipos y formas de razonamiento matemático que desarrollan los estudiantes (Kaput y Roschelle, 1998; Lesh y Doerr, 2003). La tecnología permite que los estudiantes puedan trabajar casos particulares, los cuales pueden ser la base para apoyar la observación de patrones y el desarrollo de procesos de generalización. Conceptos angulares de la matemática como variación y tasa de cambio, base para el desarrollo de conceptos como función y ecuación, pueden ser abordados de una manera no estática a través del software dinámico.

Fundamentación teórica

El aprendizaje de las matemáticas puede ser considerado un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales o modelos que están constantemente cambiando, en la medida que un individuo interacciona con un problema o situación (Lesh y Doerr, 2003). El conocimiento matemático puede considerarse como un organismo viviente y el desarrollo conceptual como un proceso gradual y contextualizado, complejo y no lineal, dinámico y en continua adaptación y auto organización (Lesh y Yoon, 2004). Los sistemas conceptuales o modelos iniciales tienden a ser burdos, pero en la medida que los estudiantes interactúan con las situaciones pueden extenderse, modificarse y refinarse; dando lugar a diferentes ciclos de comprensión (Lesh y Yoon, 2004).

Aprender matemáticas implica medir, comparar, buscar patrones, generalizar y modelar (Kaput, 1999; Lesh y Doerr, 2003). Los procedimientos que los estudiantes emprenden son más importantes que las soluciones del problema. El énfasis en el aprendizaje de las matemáticas debe hacerse en las grandes ideas como variación, tasa de cambio, función y ecuación. “Las funciones son herramientas para describir, explicar y predecir las relaciones entre cantidades que están cambiando” (Ärlebäck, Doerr y O’Neil, 2013, p. 315). El concepto de función se construye sobre la base del concepto de variación. La tecnología por su carácter dinámico puede apoyar la comprensión del concepto de variación, y función y propiciar una ampliación, modificación y refinamiento de las formas de razonamiento matemático. El aprendizaje de los estudiantes está estrechamente relacionado con la creación de formas de pensamiento o modelos que el estudiante revela o construye durante el proceso de solución de un problema, las cuales le permiten interpretar, describir y explicar situaciones (Lesh, 2010).

Las actividades o situaciones son esenciales para la construcción y modificación de significados, así como el apoyo en tecnología y softwares, los cuales permiten a los estudiantes utilizar distintas representaciones. El papel del docente en el proceso de aprendizaje es esencial (Schoenfeld, 1992). Debe diseñar los problemas o situaciones, y generar un ambiente en el aula propicio para el desarrollo de conocimiento, habilidades, destrezas y hábitos. Al estudiante se le debe permitir utilizar sus propios conocimientos, procedimientos y hábitos al resolver una situación (Lesh y Doerr, 2003); el papel del profesor debe centrarse en apoyar que el estudiante los modifique, extienda o refine.

Metodología

La Actividad que en esta comunicación se presenta y analiza trata de relacionarse con problemas que comúnmente son señalados como de la “vida real” (Lesh y Doerr, 2003). Con el diseño de la Actividad, se pretende que los estudiantes modifiquen y refinen sus modelos o formas de pensar en torno al concepto de función, función exponencial y conceptos asociados, esto en el sentido de la concepción de aprendizaje de la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh, 2010).

La población de estudiantes con la cual puede trabajarse esta APM, como ya se mencionó, son estudiantes de nivel medio superior o superior (17 y 18 años) cuyo curso de matemáticas aborde el concepto de función exponencial. Puede trabajarse en un ambiente de Resolución de problemas, donde se entregue la Actividad al grupo conformado previamente en equipos de estudiantes. Una vez que los equipos tengan avances sustanciales, se sugiere se promueva una discusión grupal con énfasis en la exposición de los procedimientos. Se deben discutir los procedimientos de manera grupal, de tal manera que se desarrolle una mejor comprensión de la situación y de los conceptos matemáticos inmersos.

Se sugiere el uso de Geogebra o de Excel para simular una familia de problemas, una vez que se ha modelado uno de ellos.

Actividad Provocadora de Modelos (APM)

La APM se relaciona con el tema de la jubilación o el ahorro para el retiro y consiste en lo siguiente: Un artículo de periódico, preguntas sobre el contexto y un problema. Para la implementación de la actividad se sugiere que la disposición del grupo sea en equipos de tres integrantes. A cada equipo se le entregaría el artículo de periódico y se podría solicitar la lectura por equipo o en grupo. El objetivo del artículo es generar interés en el tema. Posterior a la lectura, se les entregaría una hoja con preguntas de comprensión con respecto a la lectura. Después de comentar las preguntas en el grupo se sugiere entregar a cada equipo el Problema *Ayuda a Mateo* (Figura 1) e indicar a los estudiantes que redacten una carta donde ayuden a Mateo a resolver sus dudas sobre el ahorro para el retiro. Durante el proceso de solución del problema, el docente debe recordar que lo importante es ese proceso de resolución del problema, más que responder las preguntas. En una APM el producto es el proceso (Lesh y Doerr, 2003).

Problema 1. Ayuda a Mateo

Mateo un chico Chetumaleño de 19 años, acaba de obtener su primera oportunidad de trabajo como cajero.

En la firma del contrato le dieron una pequeña orientación sobre el pago de su sueldo, el cual es de $1400 mensual. Le explicaron brevemente sobre las deducciones que se le deben de realizar conforme a la ley. Entre ellas la cuota obrera para cesantía y vejez con la cual le descuentan el 1.125% de su salario para aportarla a su fondo de ahorro para el retiro. La encargada de recursos humanos le comenta que este fondo genera un interés el cual se acumula al fondo al final de cada mes, esto dependiendo de la AFORE que elija.

Siendo su primer trabajo, Mateo sale de la firma del contrato con la duda de cómo elegir ello. Solicita información vía correo electrónico a la AFORE XXI Banorte donde tú eres parte del equipo de atención a clientes, por lo que deberás redactar una carta donde le ayudes a aclarar sus dudas a Mateo, explicándole detalladamente tus procedimientos:

1. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del primer mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
2. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del segundo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
3. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del cuarto mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
4. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
5. ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
6. ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra?

Cuentas con la siguiente información:

La aportación total a una cuenta de Afore está compuesta por la parte del patrón 5.15%, la del empleado 1.125% y del Gobierno Federal 0.225%, calculado del Salario Base del empleado.

El rendimiento que genera tu fondo de ahorro, se acumula al capital final de cada intervalo de tiempo previsto.

Requisitos para tener derecho a pensión por cesantía (vejez) para la Ley de 1997, Artículo 162 de la Ley del Seguro Social

Tener 65 Años Cumplidos,
Tener como Mínimo 1,250 Semanas de Cotización.
Cumplir con los requisitos anteriores a la Ley del '73, (son los mismo)

Información de AFORES

AFORE	RENDIMIENTO	COMISION %
Sura	11.45	1.21
Profuturo	11.12	1.27
Banamex	10.85	1.16
MetLife	10.81	1.39
XXI Banorte	10.72	1.1
Principal	10.55	1.36
Azteca	8.9	1.45
Coppel	7.96	1.49
Afirme Bajío	7.61	1.4
Inbursa	5.79	1.17
FUENTE: CONSAR		

Figura 1. Problema 1 Ayuda a Mateo.

Análisis de la APM

Es importante mencionar que actividades como estas se han implementado desde el año 2010 en el marco de uno de los proyectos de la Universidad de Quintana Roo. Ello posibilita hacer un previo análisis de lo que puede ocurrir en el aula al presentar esta Actividad, además de que este análisis permite conocer la APM y su potencial para desarrollar conocimiento en el aula.

Cuando se presenta una actividad como ésta, la discusión de los estudiantes puede girar, inicialmente, en torno a experiencias personales o de un pariente, relacionadas con la temática. Es importante esta etapa porque denota cómo los estudiantes están inmersos en la Actividad. Enseguida, los estudiantes revisan la terminología que se maneja en el Problema, analizan la situación, de manera cualitativa, y conjeturan. En este caso, lo común es que manifiesten que el ahorro está creciendo. Inclusive, algunos estudiantes se podrán imaginar un crecimiento lineal. Posteriormente, los estudiantes podrían empezar a realizar cálculos con los datos identificados en el Problema.

Uno de los procedimientos iniciales podría ser que calcularan la aportación que entrará al ahorro administrado por la AFORE, así como el rendimiento neto.

Porcentaje total de la portación: $5.15 + 1.125 + 0.225 = 6.5$
Monto que entraría al fondo de ahorro: \$1400(.065)=91
Rendimiento neto (Tabla 1): 10.72-1.1=9.62

Partiendo de ello los estudiantes podrían resolver el Problema empleando formas y representaciones diferentes. Una primera representación podría ser la representación numérica, usando procesos recursivos, y quizás auxiliándose con una tabla.

Procedimiento numérico recursivo. Los estudiantes podrían comenzar a responder las preguntas planteadas en el problema acudiendo a una forma recursiva en la que los alumnos sólo realicen operaciones numéricas obteniendo los montos ahorrados al final de cada periodo. Esto lo podrían realizar directamente en la calculadora, sin tomar nota de las estructuras matemáticas, sin observar algún patrón, de la siguiente forma:

En el primer pago de Mateo (cero meses transcurridos), sólo le realizan el descuento a ingresar a su fondo de ahorro que es de \$91.

Transcurrido el primer periodo, Mateo tendrá la aportación del periodo al fondo más el monto inicial aportado con su 9.62% (0.0962) de rendimiento; es decir:

91+91+0.0962 (91)= 182+8.7542= 190.75

Para el monto del fondo de ahorro a final del segundo periodo, Mateo tendrá la aportación del periodo al fondo más el rendimiento correspondiente, así como lo que obtuvo el primer mes más 9.62% de esa cantidad; es decir:

91+190.75+0.0962 (190.75)=300.10

Los estudiantes podrían calcular el monto para el tercer periodo aunque no se le solicite, ya que en el procedimiento que se plantearon requeriría el monto generado en ese periodo para poder calcular el monto para el cuarto periodo.

Calculando el monto del fondo al final del tercer periodo 91+300.10+0.0962 (300.10)=419.96
Calculando el monto del fondo al final del cuarto periodo 91+419.96+0.0962 (419.96)=551.37

Para responder a la pregunta ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? Es probable que algunos de los estudiantes sigan la misma lógica, calculando los montos predecesores a ese periodo.

⋮

Calculando el monto del fondo al final del onceavo periodo

91+1652.14+ 0.0962 (1652.14)]=1902.08

Calculando el monto del fondo al final del doceavo periodo

91+1902.08+ 0.0962 (1902.08)= 2176.06

Este procedimiento les podría resultar accesible a los estudiantes en sus ciclos iniciales de comprensión (Lesh & Yoon, 2004), donde los montos a calcular son al final de periodos cortos y con lo cual podrían obtener respuestas rápidas. Algunos estudiantes seguramente se quedarían con este procedimiento y continuarían los cálculos hasta encontrar las respuestas a las preguntas planteadas.

La dificultad quizá iniciaría al intentar contestar la última pregunta. Los estudiantes preguntarían ¿Es necesario hacer todos los cálculos? ¿No hay alguna otra manera de obtener la cantidad solicitada? ¿Existe alguna fórmula?

Procedimiento numérico tabular. Otro procedimiento para abordar el Problema podría ser mediante el empleo de una tabla de datos. Podrían resolver el Problema empleando una tabla como la mostrada a continuación (Tabla 1). Donde quizás aún empleen procesos recursivos, pero organizados en una tabla de datos.

Tabla 1

Ejemplo de representación tabular de los estudiantes.

Periodos transcurridos	Rendimiento	Monto del sueldo a fondo	Monto del periodo anterior	Intereses ganados de monto anterior	Monto final del periodo
0	0.0962	91	0.00	0.00	91.00
1	0.0962	91	91.00	8.75	190.75
2	0.0962	91	190.75	18.35	300.10
3	0.0962	91	300.10	28.87	419.97
4	0.0962	91	419.97	40.40	551.38
5	0.0962	91	551.38	53.04	695.42
6	0.0962	91	695.42	66.90	853.32
7	0.0962	91	853.32	82.09	1026.41
8	0.0962	91	1026.41	98.74	1216.15
9	0.0962	91	1216.15	116.99	1424.14
10	0.0962	91	1424.14	137.00	1652.14
11	0.0962	91	1652.14	158.94	1902.08
12	0.0962	91	1902.08	182.98	2176.06
13	0.0962	91	2176.06	209.34	2476.40

Los estudiantes sin especificarlo podrían realizar los siguientes cálculos entre los valores de las columnas

Intereses ganados de monto anterior (Columna 5, Tabla 2): Rendimiento (Columna 2, Tabla 2)* Monto periodo anterior (Columna 4, Tabla 2)

Monto del periodo anterior (Columna 3, fila n, Tabla 2): Monto final del periodo (Columna 6, fila n-1, Tabla 2)

Monto final del periodo (Columna 6, Tabla 2): Monto del sueldo a fondo (Columna 3, Tabla 2) + Monto del periodo anterior (Columna 4, Tabla 2)+ Intereses ganados de monto anterior (Columna 5, Tabla 2)

Tabla 2

Referencia para cálculos entre valores de columnas.

Tiempo transcurrido en meses	Rendimiento	Monto del sueldo a fondo	Monto del periodo anterior	Intereses ganados de monto anterior	Monto final del periodo
(Columna 1, Fila n)	(Columna 2, Fila n)	(Columna 3, Fila n)	(Columna 4, Fila n)	(Columna 5, Fila n)	(Columna 6, Fila n)
(Columna 1, Fila n+1)	(Columna 2, Fila n+1)	(Columna 3, Fila n+1)	(Columna 4, Fila n+1)	(Columna 5, Fila n+1)	(Columna 6, Fila n+1)

La tabla podría surgir entre los primeros *ciclos de comprensión* (Lesh & Yoon, 2004) de los estudiantes, o como un refinamiento de procedimientos numéricos recursivo o de operaciones escritas desorganizadamente. En la tabla los estudiantes podrían comenzar a organizar y sistematizar las operaciones llevadas a cabo.

El maestro podría apoyar con preguntas a los estudiantes para la identificación de patrones, lo cual sabemos es importante en la matemática de acuerdo con Schoenfeld (1992) y Lesh (2010) y se relaciona con los conceptos de función y variación. Las preguntas que se sugieren son del siguiente tipo ¿De qué otra forma se puede rescribir la expresión utilizando el monto anterior? ¿Qué datos empleas del cálculo del monto anterior para calcular el siguiente? Con ello se orientaría al estudiante a la siguiente forma de análisis:

Sistematización de la información al identificar patrones. La aportación inicial al fondo de Mateo es de Mo = 91.
Al cabo de un mes, tendrá la cantidad de:

$$M_1=91+91+0.0962\ (91)=190.75$$

Esta cantidad, también puede ser escrita como:

$$M_1=91+\mathbf{Mo}+0.0962\ \mathbf{Mo}=190.75$$

Al cabo de dos meses, Mateo tendrá la aportación del periodo actual, así como lo que obtuvo el primer mes, más 9.62% de esa cantidad; es decir:

Partiendo de la forma numérica explicada anteriormente:

$$M_2 = 91 + \boldsymbol{M_1} + 0.0962\ \boldsymbol{M_1} = 300.1$$

Simplificando los términos en negritas

$$M_2 = 91 + 1.0962\ \boldsymbol{M_1} = 300.1$$

Para analizar el monto en el fondo al cabo de tres meses, Mateo tendrá la aportación del tercer mes, más lo que obtuvo el segundo mes con el rendimiento 9.62% de esa cantidad; es decir:

$$M_3 = 91 + \boldsymbol{M_2} + 0.0962\boldsymbol{M_2} = 419.97$$

Simplificando los términos en negritas

$$M_3 = 91 + 1.0962\boldsymbol{M_2} = 419.97$$

Así para el monto en el fondo al cabo de cuatro meses, se le orienta al estudiante a observar la misma relación, la aportación del cuarto mes, más el fondo que obtuvo el tercer mes más 9.62% de esa cantidad:

$$M_4 = 91 + 1.0962\boldsymbol{M_3} = 551.38$$

Respondiendo a la pregunta ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? Los estudiantes podrían seguir la misma lógica, calculando los montos predecesores a ese periodo, el maestro debe conducir a los estudiantes a explicitar el patrón identificado para obtener la siguiente expresión (Lesh, 2010):

$$\vdots$$

$$M_{12} = 91 + 1.0962\boldsymbol{M_{11}} = 1902.08$$

Un análisis como éste podría ser aprovechado por el profesor para apoyar los procesos de generalización (mencionados por Schoenfeld, 1992) y la escritura en forma algebraica de los procedimientos.

A partir de este procedimiento, es importante el papel del docente (NCTM, 2003) para promover una reflexión que permita a los estudiantes proponer y escribir una relación funcional que permita contestar la pregunta ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto? sin hacer tantos cálculos.

Procedimiento algebraico. Las preguntas ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del primer mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del segundo, cuarto y doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? tienen como finalidad que el alumno al ordenar la información y analizar las operaciones, pueda generalizar sus procedimientos hasta contestar la pregunta relacionada con la edad de la jubilación.

Hasta la pregunta ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del onceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? el alumno podría realizar los procedimientos descritos anteriormente. Sin embargo, se sugiere que el docente junto con los estudiantes analicen sus operaciones de la siguiente manera.

La aportación inicial al fondo de Mateo es de Mo =91.

Al cabo de un mes, tendrá la cantidad de:

$$M_1=91+Mo+0.0962\ (Mo) = 190.75$$

Esta cantidad, también puede ser escrita como:

$$M_1=91+91+0.0962\ (91)= 190.75$$

$$M_1= 91+ 91(1.0962)= \mathbf{91[1+ 1.0962]}= 190.75$$

Al cabo de dos meses, Mateo tendrá la aportación del periodo actual, así como lo que obtuvo el primer mes, más 9.62% de esa cantidad; es decir:

Partiendo de la forma numérica explicada anteriormente:

$$M_2 = 91 + \boldsymbol{M_1} + 0.0962\ \boldsymbol{M}_1 = 300.1$$

Simplificando los términos en negritas

$$M_2 = 91 + 1.0962\ \boldsymbol{M}_1 = 300.1$$

Cantidad que puede ser reescrita recordando que $\boldsymbol{M_1}$=**91[1+ 1.0962]**

$$M_2 = 91 + 1.0962[\mathbf{91} + \ \mathbf{91}(\mathbf{1.0962})] = 300.1$$

$$M_2 = 91 + 91 \cdot 1.0962 + \ \mathbf{91} \cdot \mathbf{1.0962^2} = 300.1$$

$$M_2 = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2) = 300.1$$

Para analizar el monto en el fondo al cabo de tres meses, Mateo tendrá la aportación del tercer mes, más lo que obtuvo el segundo mes con el rendimiento 9.62% de esa cantidad; es decir:

$$M_3 = 91 + \boldsymbol{M_2} + 0.0962\boldsymbol{M_2}$$

Simplificando los términos en negritas

$$M_3 = 91 + 1.0962\boldsymbol{M_2}$$

O bien:

$$M_3 = 91 + 1.0962 \cdot \mathbf{91}(\mathbf{1} + \mathbf{1.0962} + \mathbf{1.0962^2})$$

Simplificando los términos puede ser rescrita como

$$M_3 = 91 + 91(1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3)$$

$$M_3 = 91[1 + 1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3]$$

Así para el monto en el fondo al cabo de cuatro meses, se propone orienta al estudiante a observar la misma relación, la aportación del cuarto mes, más el fondo que obtuvo el tercer mes más 9.62% de esa cantidad:

$$M_4 = 91 + 1.0962M_3$$

$$M_4 = 91 + 1.0962 \cdot \mathbf{91}[\mathbf{1} + \mathbf{1.0962} + \mathbf{1.0962^2} + \mathbf{1.0962^3}]$$

O bien:

$$M_4 = 91 + 91[\mathbf{1.0962} + \mathbf{1.0962^2} + \mathbf{1.0962^3} + \mathbf{1.0962^4}]$$

Cantidad que puede ser rescrita como

$$M_4 = 91(1 + \mathbf{1.0962} + \mathbf{1.0962^2} + \mathbf{1.0962^3} + \mathbf{1.0962^4})$$

$$M_4 = 91(1 + \mathbf{1.0962} + \mathbf{1.0962^2} + \mathbf{1.0962^3} + \mathbf{1.0962^4})$$

Para responder la pregunta ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? Los estudiantes podrían seguir la misma lógica, calculando los montos predecesores a ese periodo, el maestro debe conducir a los estudiantes a identificar el patrón para obtener la siguiente expresión:

$$\vdots$$

$$M_{12} = 91(1 + \mathbf{1.0962} + \mathbf{1.0962^2} + \mathbf{1.0962^3} + \mathbf{1.0962^4} + \cdots + \mathbf{1.0962^{12}})$$

Donde las respuestas a las preguntas del Problema las podrían expresar de la siguiente forma:

a) Monto al final del primer mes:

$$M_1 = 91[1 + \ 1.0962]$$

b) Monto al final del segundo mes:

$$M_2 = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2)$$

c) Monto al final del cuarto mes:

$$M_4 = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3 + 1.0962^4)$$

d) Monto al final del doceavo mes:

$$M_{12} = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3 + \cdots + 1.0962^{12})$$

Ante la pregunta ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto?, el estudiante podría razonar que el tiempo a calcular es la diferencia de la edad para ello menos la edad actual de Mateo: 65-19=46 años. Conociendo que son 46 años, entonces deberán calcular el monto del fondo para ese tiempo en meses: 46(12)= 552 meses.

En otro *ciclo de comprensión*, a los estudiantes se les podría ocurrir que la solución correspondería a la siguiente expresión:

$$M_{552} = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2 + \cdots + 1.0962^{100} + \cdots + 1.0962^{300} + \cdots + 1.0962^{552})$$

El maestro debería preguntar a los estudiantes ¿Cuál es la expresión matemática que nos permitiría calcular la cantidad de dinero que tendrá Mateo al cabo de cualquier cantidad de años? Los estudiantes podrían analizar casos particulares que les permitieran responder preguntas como ¿Qué relación encuentras entre el periodo del fondo que se está calculando y el exponente de la expresión? ¿Podrías definir la expresión para calcular el monto del fondo de Mateo al momento de su retiro?

El docente podría apoyar la deducción de la forma general a partir de (1)

$$M_n = 91 + 91(1.0962) + 91(1.0962^2) + 91(1.0962^3) + \cdots + 91(1.0962^n) \qquad (1)$$

$$1.0962M_n = 91(1.0962) + 91(1.0962^2) + 91(1.0962^3) + 91(1.0962^4) + \cdots + 91(1.0962^{n+1}) \qquad (2)$$

Luego, restando (2) a (1)

$$M_n - 1.0962M_n = 91 - 91(1.0962^{n+1})$$

$$M_n(1 - 1.0962) = 91(1 - 1.0962^{n+1})$$

Despejando M_n

$$M_n = 91\,\frac{(1-1.0962^{n+1})}{(1-1.0962)} \qquad (3)$$

Obteniendose así una relación funcional útil para los estudiantes para responder cualquier pregunta relacionada con la cantidad de dinero que tendrá Mateo al cabo de cualquier cantidad de años.

Para responder las primeras preguntas del Problema basta considerar situaciones particulares (monto ahorrado en determinado tiempo). Sin embargo, para generalizar, se requiere que los estudiantes sean capaces de organizar sus procedimientos, observar o identificar patrones y relaciones (Schoenfeld, 1992; Lesh y Doerr, 2003). Escribir la relación funcional no es un paso sencillo, aun cuando los estudiantes sean universitarios, lograr acceder a este *ciclo de comprensión* requiere con frecuencia del apoyo del docente. El apoyo puede brindarse a través del planteamiento de preguntas que promuevan la reflexión durante el trabajo en equipo o en sesiones grupales, donde cada equipo exponga sus avances. Inclusive a través de proponerles otras situaciones que les permitan evaluar su modelo. Por ejemplo, se les puede solicitar que respondan las mismas preguntas para otra situación similar, en este caso utilizando otro banco (AFORE), como se muestra a continuación.

Comparación de modelos y extensión hacia el análisis del ahorro para otras AFORES. Como respuesta a la pregunta ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra? el alumno podría calcular el monto que tendría Mateo para los mismos periodos que se indican en las preguntas anteriores a éste, pero eligiendo AFORES con diferentes rendimientos. El maestro podría orientar la discusión hacia reflexionar la pregunta ¿Funcionan los modelos construidos para analizar el ahorro utilizando otras AFORES?

Con ello se pretende apoyar la comparación del monto final ahorrado considerando distintas AFORES y propiciar la construcción de modelos gráficos que permita al estudiante refinar sus *ciclos de comprensión* respecto a los conceptos matemáticos: variación y función, al comparar y analizar una familia de problemas. Debido a que el estudiante ya realizó un análisis a lápiz y papel de la situación, ésta sección es recomendable abordarla con el apoyo de software donde se trabajen hojas de cálculo y graficación (EXCEL, Geogebra). Con la meta de ahorrar tiempo en los cálculos que ya se analizaron anteriormente, e invertirlo mejor en el análisis de la situación y conceptos matemáticos desde modelos diferentes (Figura 1).

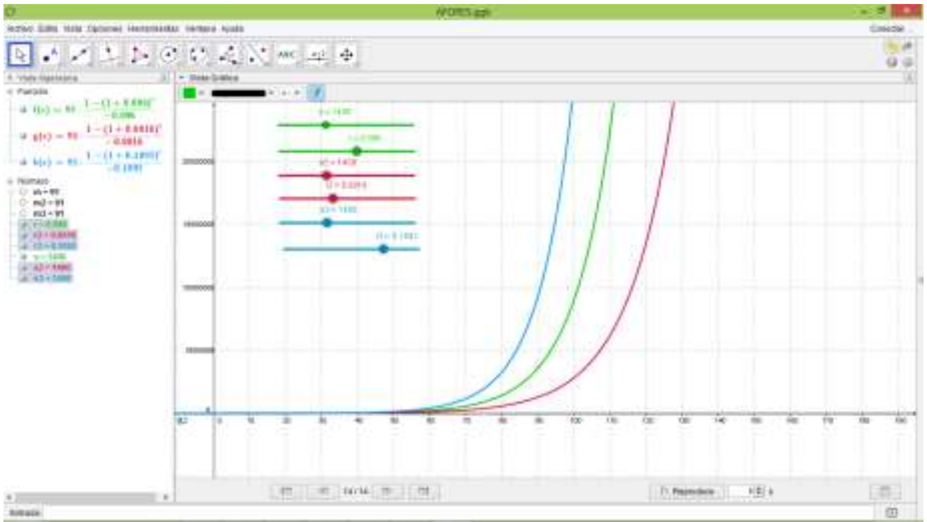

Figura 2. Ejemplo de representaciones tabulares y gráficas que se esperan analizar con estudiantes.

La ventaja de usar Geogebra para simular la situación es que los estudiantes pueden hacer uso tanto de tablas de datos, como gráficas y fórmulas previamente obtenidas. Estas representaciones pueden ser desplegadas en una sola pantalla (Figura 2). Al generar dichas tablas y gráficos, el profesor puede dirigir la discusión a cuestionar a los alumnos qué sucedería con una tasa de rendimiento neta mayor o menor a la que le ofrecieron originalmente a Mateo. Pedir que generen conjeturas al respecto, previo a la simulación, tales como: ¿Cómo es el incremento del monto del fondo en el tiempo, si consideramos diferentes tasas de rendimiento? ¿Qué podemos decir acerca del monto inicial? ¿Cómo es el monto después de un determinado tiempo? ¿Qué ocurre con la intersección de la curva con el eje y? Estas preguntas permitirían analizar el significado de los parámetros en una función exponencial (Ärlebäck, Doerr, O'Neil, 2013).

Es importante pedir a los estudiantes que, como última actividad, indiquen un procedimiento a Mateo para calcular el monto final de ahorro dependiendo de la AFORE elegida, el cual le permita hacer comparaciones y tomar decisiones. La comunicación de los procedimientos por escrito, no sólo verbal, es un aspecto importante en una Actividad Provocadora de Modelos, debido a que apoya la construcción de conocimiento.

Conclusiones

Las actividades o situaciones que se implementan en el aula son esenciales para propiciar la construcción y modificación de significados, así como el apoyo en tecnología y softwares. El análisis de la Actividad y de los procesos de solución que aquí se presentan se aborda considerando heurísticas para la resolución de problemas y direcciones instruccionales, que pueden explotarse durante y posterior al surgimiento de diversos modelos al resolver esta Actividad. Coincidimos con Lesh y Yoon (2004) en cuanto a que la construcción de modelos por los estudiantes no sigue precisamente un desarrollo lineal, el tipo de modelos que surgen dependen de los recursos de cada estudiante. El papel del profesor, tal como lo menciona el NCTM (2003) es importante para apoyar el desarrollo de conocimiento, por lo tanto con el análisis que aquí se presenta se pretende apoyar al docente dando elementos que puedan servirle de reflexión para que ayude al estudiante a adaptar, modificar, extender y refinar modelos (Lesh & Doerr, 2003) o ideas que ellos tienen alrededor del concepto de función exponencial.

La Actividad se está experimentando para refinarla como una Actividad Provocadora de Modelos (APM o MEA por sus siglas en inglés: Model Eliciting Activity; Lesh, 2010) porque hemos encontrado que al resolver actividades de este tipo, los estudiantes conjeturan, observan patrones, generalizan y evalúan sus modelos o ideas matemáticas, lo cual es importante en el aprendizaje de las matemáticas.

Bibliografía

Ärlebäck, J. B., Doerr, H., & O'Neil, A. (2013). A Modeling Perspective on Interpreting Rates of Change in Context. *Mathematical Thinking and Learning, 15*(4), 314-336.

Dirección Académica de la Dirección General del Bachillerato. (03 de Junio de 2014). Subsecretaría de educación media superior. Obtenido de Dirección general del bachillerato: http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01 programasdeestudio/cfb_4sem/Matematicas-IV.pdf

Kaput, J., & Roschelle, J. (1998). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New Content, new context. En C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.), *Mathematics for a new millennium* (pp. 155-170). London: Springer-Verlag.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R. A. (2010). Tools, Researchable Issues & Conjectures for Investigating what it Means to Understand Statistics (or other topics). *Meaningfully. Journal of Mathematical Modeling and Application , 1*(2)*, 16-48.*

Lesh, R. & Yoon, C. (2004). Evolving Communities of Mind –In Which Development Involves Several Interacting and Simultaneously Developing Strands. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), *205-226.*

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios para la Educación Matemática* (Trad. M. Fernández). España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (Trabajo original publicado en 2000).

National Council of Teachers of Mathematics (2011). *Developing essential understanding of expressions, equations and functions.* Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition making in mathematics. En D. Grows (Eds.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Mc Millan.

Stewart, I. (2003). La enseñanza agradable de las matemáticas. En R. García, *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 183-217). México, D.F. : DC: National Academy Press..

Torres, Y. (2013). *En México no se ahorra lo suficiente para la jubilación.* El Economista. Recuperado el 8 de septiembre de 2014, de http://eleconomista.com.mx finanzas personales/2013/09/18/usted-apuesta-retiro-laboral-comodo