A ideia de máximo divisor comum para resolver equações diofantinas lineares

Valéria Ostete Jannis **Luchetta**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – campus São Paulo
Brasil
valeria@ifsp.edu.br
Hannah Dora de Garcia e **Lacerda**
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – campus Rio Claro
Brasil
hannahdoralacerda@gmail.com
C. Miguel **Ribeiro**
Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO), Universidad de Algarve, Portugal; Norwegian University of Science and Technology (NTNU, Norway)
miguel.ribeiro@math.ntnu.no

Resumo

Neste artigo discutimos alguns aspetos do conhecimento matemático especializado de um futuro professor ao abordar Equações Diofantinas Lineares para o Ensino Básico. O contexto corresponde a uma situação de simulação de ensino no espaço da disciplina Estágio Supervisionado 3 de uma instituição de nível superior. A partir da sugestão de resolução de um dos alunos para resolver a equação, discutiremos alguns aspetos do conhecimento matemático especializado do professor que sustentaria idealmente esta situação. Esse conhecimento associa-se a uma visão que engloba e relaciona o conceito de Máximo Divisor Comum, o método de Análise Diofantina e Algoritmo. Discutiremos também alguns dos porquês associados à importância de abordar este conteúdo no Ensino Básico e o conhecimento ideal do professor para ensina-lo.

Palavras chave: Conhecimento Matemático Especializado do Professor, Formação de professores, Estágio Supervisionado, Ensino de Álgebra.

Abstract

In this article we discuss some aspects of the Mathematics Teachers Specialized Knowledge (MTSK) of a future teacher to address Diophantine Linear Equations for Basic Education. Our analysis was made from a lecture/simulation of education in the discipline Supervised training 3 of an institution of higher education space. From the suggestion of solving one of the students facing the problem posed by the teacher, we discuss a possible strategy, as well as the ideally specialized mathematical knowledge that would support this. This strategy is the concept of Greatest Common Divisor, the method of Diophantine Analysis and Algorithm, to which we will focus in this work. We also discuss some of the whys associated the importance of addressing this content on Basic Education and the ideal knowledge of the teacher to teach it.

Keywords: Mathematics Teachers Specialized Knowledge, Teacher Training, Supervised training, Teaching Algebra.

Resumen

En este artículo vamos a discutir algunos aspectos del conocimiento matemático especializado de un futuro maestro para abordar Ecuaciones diofánticas lineales para la Educación Básica. Nuestra análisis se realizó a partir de una clase / simulación de educación en la disciplina Práticas Supervisadas 3 de una institución de educación superior. A partir de la sugerencia de la solución de uno de los estudiantes que se enfrentan al problema planteado por el profesor, discutir una posible estrategia, así como el conocimiento matemático especializado que lo ideal sería apoyar esto. Esta estrategia es el concepto de Máximo común divisor, el método de análisis Diophantine y Algoritmo, a la que nos vamos a centrar en este trabajo. También vamos a discutir algunos de los porqués asociados la importancia de abordar estos contenidos en la Educación Básica y el conocimiento del maestro ideal que le enseñara.

Palabras clave: conocimiento matemático especializado del profesor, Formación del Profesorado, Práticas Supervisadas, la enseñanza del álgebra.

Introdução

A Álgebra é um dos tópicos matemáticos em que os alunos revelam algumas dificuldades, essencialmente por considerarem que se trata apenas/essencialmente de manipulação de símbolos, não lhe atribuindo qualquer significado (e.g., Charalambous, Jakobsen, & Ribeiro, 2013; Ribeiro, 2011). Esse entendimento por parte dos alunos sustenta-se, também, no conhecimento do professor, nas atividades que prepara e na(s) forma(s) como as implementa em sala de aula (Charalambous, 2008). Isso porque o conhecimento do professor sobre cada um dos conteúdos que têm de abordar assume fator de grande importância nos resultados e conhecimento dos alunos (e.g., Grossman, 2010).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Brasil (Brasil, 1998) recomendam que o aluno entre em contato com as diferentes concepções da Álgebra para que seu pensamento algébrico seja desenvolvido. Dessa forma, é referido que “o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas” (Brasil, 1998, p. 117). Apesar de não aparecerem explicitamente no currículo do Ensino Básico, o ensino de Equações Diofantinas Lineares corrobora com as recomendações dos PCN, pois possibilita aos alunos trabalharem com diferentes linguagens da Matemática: natural, numérica, algébrica e gráfica (Pommer, 2013). A utilização destas equações permite favorecer a contextualização de situações-problema que explorem e desenvolvam um pensamento analítico e reflexivo do aluno.

Ao falarmos em Equações Diofantinas Lineares, e seguindo Domingues e Iezzi (2013), consideramos as equações polinomiais em duas variáveis com coeficientes inteiros. Assim, na linha do que referem Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), consideramos também que o ensino destas equações no Ensino Básico possibilita a exploração de vários elementos que são caracterizadores do pensamento algébrico. Dentre eles estão a “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação problema e a presença do processo de generalização” (Fiorentini et al., 1993, p. 87).

Tendo por base estes pressupostos, conjugando o conhecimento do professor e as potencialidades das abordagens às Equações Diofantinas Lineares, e pretendendo contribuir para obter um maior entendimento relativamente ao conteúdo do conhecimento do professor, neste texto iremos focar a nossa atenção no conhecimento matemático especializado “ideal” do professor associado à resolução dessas equações. Note-se que ao referirmos o conhecimento do professor estamos a entendê-lo no sentido do *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013). O objetivo dessa proposta é contribuir, de forma ativa e participativa, para uma melhoria dos resultados dos alunos, sustentada na formação de professores, bem como, portanto, no incremento de um conhecimento especializado para a melhoria da atuação docente. Com esse intuito, será analisado um episódio de uma aula (simulação) ministrada por um licenciando em Matemática de uma instituição de ensino superior, na disciplina Estágio Supervisionado 3. Assim, iremos discutir o *conhecimento matemático especializado do professor*, focando essencialmente aspetos do conhecimento do conteúdo durante uma situação de contingência (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005) envolvendo a resolução de um problema através de Equações Diofantinas Lineares. Esse conhecimento especializado centra-se, aqui, por um lado, nas oportunidades perdidas e, por outro, na sustentação de atribuição de sentido aos comentários dos alunos, essencialmente quando esses comentários saem do próprio espaço de soluções do professor (Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014).

Assim, neste texto analisamos, discutimos e refletimos sobre as opções e conhecimento revelados por um futuro professor, durante uma simulação de aula, quando um “aluno” apresenta uma proposta de resolução alternativa envolvendo o máximo divisor comum como ideia fundamental da resolução. Essa discussão e reflexão permite discutir alguns dos aspetos essenciais do conhecimento especializado ideal do professor para abordar este tema.

Algumas notas teóricas

De acordo com os PCN, para que o professor possa desempenhar sua função como mediador entre o aluno e o conhecimento matemático, é necessário que tenha “um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos" (Brasil, 1998, p. 36). Este "sólido conhecimento" de conceitos e procedimentos pode ser encarado sob uma multiplicidade de perspectivas. Se, por um lado, pode ser interpretado na perspetiva de que ao professor caberá um conhecimento de uma matemática avançada, tal como Álgebra, Análise, Topologia ou Equações Diferencias, por outro lado, e na perspectiva que assumimos, ao professor, caberá um conhecimento matemático que lhe permita ampliar e transferir os conhecimentos matemáticos mobilizados na prática de forma que os seus alunos entendam os porquês associados ao que fazem e porque o fazem, a cada momento, deixando, inclusive, a porta aberta para aprendizagens futuras.

No que se refere ao conhecimento matemático específico do professor, Ball, Thames e Phelps (2008) propõe um refinamento das categorias de Shulman (1986), com uma concepção que denominam de *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), estabelecendo dois grandes domínios: o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didático do conteúdo, encontrando-se cada um deles composto por três subdomínios. No sentido de contribuir para clarificar algumas problemáticas sentidas em alguns trabalhos que foram desenvolvidos baseados no MKT, e procurando contribuir também com exemplos da prática relativamente ao conhecimento "ideal" do professor, este conhecimento especializado é encarado aqui seguindo a conceptualização do *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2013). Pelo contexto da investigação realizada (veja Contexto e método, abaixo) iremos focar-nos apenas nos subdominios relativos ao conhecimento do conteúdo.

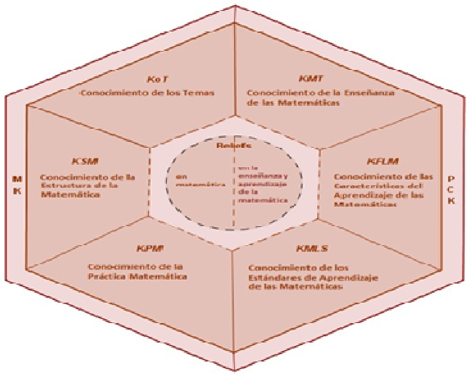

Figura 1. Subdominios do MTSK (Carrillo et al, 2013).

O MTSK, por emergir de problemáticas sentidas ao analisar a prática com o MKT pode ser considerado uma "evolução" dessa conceptualização, considerando também três subdomínios em cada um dos dois domínios definidos por Shulman (1986). No entanto, nesta conceptualização, ao contrário do que ocorria no MKT, todo o conhecimento é considerado especializado já que diz respeito ao conhecimento do professor para a atuação docente. Os três subdomínios do conhecimento do conteúdo dizem respeito ao conhecimento dos temas (KoT); ao conhecimento da estrutura matemática (KSM) e ao conhecimento da prática matemática (KPM).

O KoT inclui um conhecimento sobre a matemática escolar, para além de um conhecimento matemático como disciplina, mas também como conhecimento relativo a uma fundamentação teórica e aos distintos procedimentos "tradicionais" e alternativos, além múltiplas formas de representação de um mesmo conteúdos/tópico. Um elemento central do KSM é o conhecimento associado às conexões entre a matemática elementar e avançada, enquanto o KPM diz respeito às diferentes formas de "fazer" matemática que caberá ao professor para que possa, posteriormente, desenvolver a sua prática tais como seja um conhecimento associado a diferentes formas de demonstrar ou a diferentes interpretações que uma mesma palavra/expressão pode assumir, bem como um conhecimento da sintaxe da matemática.

Contexto e método

Esse trabalho enquadra-se numa perspectiva de pesquisa qualitativa, cujo foco é "entender e interpretar dados e discursos" (D'Ambrósio, 2012, p. 12), recorrendo a um estudo de caso instrumental (Stake, 2000), com o objetivo de obter um conhecimento mais aprofundado sobre uma realidade específica. Consideramos a prática da sala de aula como ponto de partida para o nosso trabalho e, a partir dela, adotamos uma leitura plausível dos acontecimentos para refletirmos sobre o processo de ensino. Segundo Lins (2012, p. 23), "a leitura plausível se aplica de modo geral aos processos de produção de conhecimento e significado". Nesse sentido, buscamos legitimar as argumentações dos alunos e as respostas, ou sua ausência, do professor, no sentido de entender os significados produzidos para refletir acerca de alguns aspetos do conhecimento especializado ideal do professor ao trabalhar com Equações Diofantinas Lineares.

Os dados foram extraídos da transcrição de uma aula de 45 minutos, gravada em vídeo, correspondendo a uma simulação ministrada por um licenciando em Matemática. Estavam presentes 17 alunos da disciplina Estágio supervisionado 3, regência, componente curricular na qual o aluno tem oportunidade de desenvolver uma regência de aula (simulação) e refletir sobre sua prática docente, sendo responsável tanto pelo tema a abordar como pela metodologia a utilizar. Essa disciplina aborda a organização do ensino com destaque para o planejamento e o desenvolvimento de diferentes estratégias de ensino de Matemática, permitindo ao licenciando propor atividades no sentido de debater as possíveis mudanças nas condutas do professor em sala de aula. Assim, a referida disciplina configura-se, também, como uma oportunidade para que os futuros professores possam vivenciar, na primeira pessoa, o mesmo tipo de experiências que esperamos que venham a facultar aos seus alunos – mas obviamente a um nível distinto (Pinto & Ribeiro, 2013).

O estudante preparou o seguinte problema para explorar na simulação de uma aula de sétimo ano:

> *Carlos obteve boas notas no bimestre escolar, por isso seu pai resolve gastar R$100,00 com Carlos como forma de presente. É época de copa do mundo então Carlos quer muito figurinhas para seu álbum. Como estava muito quente, o pai de Carlos o convenceu a gastar R$4,00 desses R$100,00 em um belo sorvete completo. Do valor restante, Carlos queria gastá-lo inteiro com pacotes de figurinhas. Na loja, existiam pacotes de R$15,00 e R$12,00, com muitas figurinhas em cada um. De quantas formas o pai de Carlos consegue gastar todo o dinheiro que sobrou após a compra do sorvete?*

A partir de um episódio associado à exploração deste problema, iremos discutir os comentários de um aluno (Pedro), cujo nome foi modificado para preservar sua identidade, dando valor às suas contribuições (Walshaw & Anthony, 2008), e a resolução proposta por ele de modo a refletir sobre que conhecimento matemático especializado do conteúdo caberá idealmente ao professor para ensinar Equações Diofantinas Lineares. Com base no diálogo entre o professor e o aluno, procuramos produzir significados aos conhecimentos que o aluno manifestava. O episódio centra-se na oportunidade perdida pelo professor e a análise, elaboração e discussão de possíveis caminhos que poderiam ser tomados a partir da efetivação dessa oportunidade.

Discutindo um episódio

Ao iniciar a aula, o professor pediu que os alunos se organizassem em grupos de cinco e, entregou o problema. Após uma breve explicação do mesmo, pediu que os alunos discutissem a resolução deste tendo como base o que já haviam aprendido sobre equações polinomiais do primeiro grau, Máximo Divisor Comum (MDC) e conceitos de divisão. Os alunos (note-se, também eles, futuros professores) conseguiram encontrar facilmente a equação que modela o problema, mostrando-se aptos a trabalharem com a linguagem algébrica. Dessa forma, chegaram à equação $12x + 15y = 96$, onde x e y correspondem, respectivamente, ao número de pacotes de figurinhas de R$12,00 e o número de pacotes de figurinhas de R$15,00.

No episódio que descreveremos a seguir, o professor tem a oportunidade de trabalhar na direção do que é referido nos PCN quanto ao fato de que o ensino da matemática deva garantir o desenvolvimento de várias capacidades, tal como (Brasil, 1998, p. 56): "observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa".

> Pedro: Professor, você colocou ali o MDC, né? Eu achei o MDC valendo 3. Tem alguma relação que eu posso usar?
> Prof.: Você achou o MDC de quem?
> Pedro: do 12 e do 15.
> Prof.: O MDC de 12 e 15 é 3. Tem uma relação sim, e foi uma ótima observação que você fez.
> (...)
> Prof.: Qual é o MDC entre 4 e 5?
> Pedro: 1
> Prof.: Pensa nisso, você achou 3 e você achou aqui 1. E elas são equivalentes. Pensa nisso...
> (...)
> Pedro: Professor, se eu usar o MDC valendo 3 e fizer a multiplicação de $12 \cdot 3$ e $15 \cdot 3$ vai dar uma diferença de 15 sempre. Aí eu posso concluir que sempre vai faltar uma figurinha no y, vai faltar um conjunto no y.
> (...)
> Prof.: Porque ele falou $12 \cdot 3$ e $15 \cdot 3$, eu acho que está errado!
> (...)
> Pedro: o MDC é 3, se eu fizer $12 \cdot 3$ e $15 \cdot 3$ dá 81. Vai faltar um saquinho de 15. Eu não posso definir então...
> Prof.: Talvez você até possa definir, não para esse exercício. Você fez um pensamento, um bom pensamento, mas para esse exercício talvez você não vá usar.

Ao analisar o diálogo entre o professor e o aluno, percebemos que o professor se interessou pela estratégia que o aluno havia montado, mas ficou inseguro quanto à legitimidade da mesma, revelando aspetos do seu KoT, mas também do KSM já que ficou limitado nas possíveis conexões e associações entre um conteúdo matemático elementar (aqui, no caso, o MDC) e outros mais avançados. Por isso, o professor não validou o argumento do aluno, nem explicitou o porquê dessa ausência de validação. Segundo Lins (2008, p. 542),

> O que acontece, do ponto de vista do professor, quando ele diz algo a um aluno e o aluno lhe responde algo? Há algumas possibilidades. Uma, que o que o aluno diga pareça bem ao professor, e que este decida que não há mais nada a fazer com relação a esse "episódio". Mas o professor pode, também, achar que parece que a resposta está bem, mas que mesmo assim lhe interessa saber como o aluno pensou para dizer o que disse, porque aquilo que lhe interessa é conhecer os objetos com que aquele aluno estava pensando, que significados produziu para eles.

Cabe ao professor perceber as oportunidades de ensino e aprendizagem que surgem em sala de aula, principalmente aquelas que estimulem o aluno a criar, argumentar, sustentar seu argumento e generalizar.

Vamos analisar o argumento do aluno:

Como o MDC de 12 e 15 é 3, o aluno substituiu o valor do MDC na equação e observou que $12 \cdot 3 + 15 \cdot 3 = 81$ e $96 - 81 = 15$, ou seja, a diferença 15 é o valor de um pacote de figurinha, concluindo que Carlos pode comprar 3 pacotes de figurinhas de R$12,00 e 4 pacotes de R$15,00. O aluno supôs que o máximo divisor comum fosse um dos valores do par ordenado da solução da equação e encontrou uma das respostas do problema, mas o professor não legitimou sua resolução por não observar ser verdade, nesse caso específico. Este é um caso particular que merece alguma reflexão relativamente ao conhecimento do professor na hora de selecionar os valores a serem incluídos no problema e que se relaciona com a escolha e papel dos exemplos fornecidos. Ribeiro (2009, p. 16), reflete sobre a escolha dos exemplos a serem apresentados aos alunos referindo que esse será um dos aspetos que deverá merecer mais atenção tanto a nível da formação de professores, quanto inicial e continuada.

Partindo da avaliação do professor, o aluno não se convenceu que seu argumento não era válido. Nesse sentido, notamos que a escolha do problema apresentado não passou por uma análise minuciosa das possíveis resoluções, onde o professor poderia propor, aproveitando a oportunidade desta resolução, a aplicação desse método de resolução à equação $12x + 15y = 99$.

Note que o MDC de 12 e 15 continua sendo 3. Aplicando o raciocínio do aluno temos:

$$12 \cdot 3 + 15 \cdot 3 = 81$$

$$99 - 81 = 18$$

Mas aqui, com os R$18,00 restantes, compramos um pacotinho de figurinha de R$15,00 e sobra R$3,00, ou seja, compramos 3 pacotes de figurinhas de R$12,00, resultando R$36,00 e 4 pacotes de figurinhas de R$15,00, resultando R$60,00, o total gasto com figurinhas foi R$96,00, sobrando R$3,00. A exploração desta situação (complementarmente à situação anterior) permitiria a construção de um entendimento da solução particular encontrada pelo aluno e a impossibilidade de uma sua generalização, o que contribuiria para uma busca de método(s) que fornecesse uma solução ótima para a equação.

O professor, conhecendo as várias abordagens de resoluções de Equações Diofantinas Lineares, poderia explorar a resolução através do Algoritmo (Pommer, 2013), enunciando alguns resultados da Teoria dos Números e resolvendo a Equação Diofantina Linear.

Calculando o MDC entre 12 e 15:

	1	4
15	12	3
3	0	

Logo, MDC(15,12) = 3 e como 3 | 99, a equação tem solução inteira.

Aplicando o Algoritmo de Euclides, temos: $15 = 12 \cdot 1 + 3$. Assim,

$$3 = (1) \cdot 15 + (-1) \cdot 12 \text{ (I)}$$

Multiplicando (I) por $\frac{99}{3} = 33$, temos

$99 = (33) \cdot 15 + (-33) \cdot 12$

Portanto temos uma solução particular:

$$x_0 = -33 \text{ e } y_0 = 33$$

As outras soluções são da forma

$$x = -33 + 5t,$$

$$y = 33 - 4t \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

Considerando o problema que levou à essa equação, vemos que só interessam respostas não-negativas; assim devemos ter

$33 - 4t \geq 0$, isto é, $t \leq 8$ e $-33 + 5t \geq 0$, então , $t \geq 7$.

Logo, $t \leq 8$ e $t \geq 7$. Assim, $t \in \{7, 8\}$.

Considere a tabela com os resultados possíveis:

t	$x = -33 + 5t,$	$y = 33 - 4t$	(x, y)
8	7	1	(7, 1)
7	2	5	(2,5)

Assim, $12 \cdot x + 15 \cdot y = 99$

$12 \cdot 7 + 15 \cdot 1 = 84 + 15 = 99$

$12 \cdot 2 + 15 \cdot 5 = 24 + 75 = 99$

MDC(15,12) = 3 não é solução da equação dada.

O professor com um amplo KSM, sustentado, obviamente no KoT sobre a resolução de equações diofantinas, estaria em condições de relacionar resultados da Teoria dos Números, na exploração de distintos métodos ou estratégias de resoluções desta Equação Diofantina Linear, sustentado no comentário efetuado pelo aluno. Poderia, inclusive, desenvolver/explorar com os alunos situações associadas a perguntas do tipo: Quais as condições para que essa equação possua solução? Quantas são as soluções? Como calcular as soluções, caso existam? Uma outra possibilidade seria a exploração de Equações Diofantinas Lineares que não tem solução inteira ou com infinitas soluções.

Nesta resolução, notamos os conceitos e procedimentos sugeridos pelos PCN (Brasil, 1998, p. 87):

> "Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta".

Lembramos ao leitor que a resolução do problema proposto é comum em um curso de Teoria dos Números, no nível superior, e pode ser vista em Milies e Coelho (2006) e Domingues e Iezzi (2013). Nesse sentido, existe a necessidade de uma efetiva relação entre o que se explora, e como se explora (objetivo e foco) em cursos de formação matemática avançada com o trabalho docente. Uma possível abordagem prende-se com a utilização de situações da prática para atribuir sentido, e permitir o desenvolvimento de conexões, entre aspetos da matemática avançada e outros do ponto de vista mais elementar. Assim, uma abordagem sustentada na prática (Thames & Van Zoest, 2013) se configura como uma das formas de possibilitar essas conexões e potenciar uma relação mais profícua também entre teoria, prática e formação.

Algumas considerações finais

No presente artigo, analisamos um episódio de uma proposta de ensino de Equações Diofantinas Lineares para o ensino Básico, e discutimos qual o conhecimento matemático especializado do conteúdo é ideal ao professor ao ensiná-la. Percebemos, por meio do dialogo entre professor e aluno quais foram as produções de significados do aluno e como o professor não os legitimou. Destacamos, ainda, um possível caminho e conhecimentos necessários ao professor para resolvê-lo.

Percebemos que a escolha do problema não foi cuidadosamente elaborada, pois um aluno produziu significado para sua resolução, utilizando a proposta do professor de máximo divisor comum, a qual não foi legitimada pelo professor, pois ao substituir o par ordenado (3, 3) na equação, o professor não conseguiu compartilhar o mesmo espaço comunicativo com o aluno, para ele esta não era uma resposta legítima. O professor fala na direção de seu conhecimento, não na direção dos alunos, e o aluno fala em outra direção. Segundo Ball (2000, p. 243) "muitos professores são incapazes de ouvir os alunos de forma flexível", ou seja, de entender as ideias dos alunos e conectar elas ao conteúdo trabalhado, estes professores não conseguem pensar sobre os conteúdos de forma que não sejam os seus próprios caminhos. Isso leva a que apenas considerem o seu próprio espaço de soluções quando propõem um determinado problema (Jakobsen et al., 2014), condicionando assim as possíveis aprendizagens dos alunos. Nesse sentido, se mostra necessário ouvir os alunos (Walshaw & Anthony, 2008), para que professor e aluno possam então compartilhar o mesmo *espaço comunicativo* (Lins, 2012).

A partir da análise realizada, podemos observar que para o ensino de Equações Diofantinas Lineares no Ensino Básico, o professor necessita de um conhecimento especializado do conteúdo que lhe permita conhecer, saber e entender (atribuir sentido e significado), a uma multiplicidade de possíveis resoluções e abordagens.

Apesar desse conteúdo não constar no PCN, constatamos sua importância para a aprendizagem da Aritmética e Álgebra no Ensino Básico, ao possibilitar a abordagem de diversos conteúdos como equações, múltiplos e divisores, MDC, algoritmo da divisão. Dessa forma, o ensino desse tópico se mostra enriquecedor para introduzir estratégias de resolução de problemas.

Esse artigo apresentou um episódio próprio da sala de aula, que são demandas do trabalho de ensinar matemática e percebemos a necessidade de um conhecimento matemático especializado para o ensino (Ball et al., 2008), pois o professor com seu conhecimento pode aproveitar para trabalhar diversos conteúdos em um único problema, assim interligando conceitos da Teoria dos Números e da Álgebra.

Referências

Ball, B. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, *93*(4), 373–397.

Ball, D. L. (2000). Bridging Practices: Intertwining Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241–247. doi:10.1177/0022487100051003013

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*, 389–407.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. MEC/SEF.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Actas CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Charalambous, C. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281–288). Morelia: PME.

Charalambous, C., Jakobsen, A., & Ribeiro, C. M. (2013). Using a Practice-Based Approach to understand Horizon Content Knowledge. In *Proceedings of the European Association for Research on Learning and Instruction, 15th Biennial conference - Responsible teaching and sustainable learning.* Munique.

D'Ambrósio, U. (2012). Prefácio. In M. C. Borba & J. L. Araújo (Eds.), *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* (4ª ed., p. 140). Belo Horizonte: Autêntica.

Domingues, H. H., & Iezzi, G. (2013). *Álgebra Moderna* (Vol. único). São Paulo: Atual.

Fiorentini, D., Miorim, M. Â., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. *Pro-Posições, 4*(1), 78–91.

Grossman, P. L. (2010). *Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation*. Nea Policy Brief.

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371–404). New York: Information Age Publishing.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Lins, R. C. (2008). A diferença como oportunidade para aprender. In E. Peres, C. Traversini, E. Eggert, & I. Bonin (Eds.), *Trajetória e processos de ensinar e aprender: sujeitos, currículos e cultura*. Porto Alegre: ediPUCRS.

Lins, R. C. (2012). O modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In C. L. Angelo, E. P. Barbosa, J. R. V. dos Santos, S. C. Dantas, & V. C. A. de Oliveira (Eds.), *Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história*. São Paulo: Editora Midiograf.

Milies, F. C. P., & Coelho, S. P. (2006). *Números: Uma introdução à Matemática*. São Paulo: EDUSP.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis* (pp. 237–257).

Pinto, H., & Ribeiro, C., M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas, 3*(1), 85-105.

Pommer, W. M. (2013). *Equações Diofantinas Lineares no Ensino Básico: Uma abordagem didático-epistemológica* (1ª ed.). São Paulo: Edição do autor.

Ribeiro, C. M. (2009). Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Bolema, 22*(34), 1-26. (WOS: 274255400001)

Ribeiro, C. M. (2011). Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa*, *37*(2), 407-422. ISSN: 1517-9702; doi: 10.1590/S1517-97022011000200013(http://www.scielo.br/pdf/ep/v37n2/v37n2a13.pdf)

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(4), 4–14. doi: 10.3102/0013189X015002004

Thames, M., & Van Zoest, L. R. (2013). Building coherence in research on mathematics teacher characteristics by developing practice based approaches. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*, 583-594.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Walshaw, M., & Anthony, G. (2008). The Teacher's Role in Classroom Discourse: A Review of Recent Research Into Mathematics Classrooms. *Review of Educational Research*, *78*(3), 516–551. doi:10.3102/0034654308320292.