El Esquema del Concepto Transformación Lineal. Una Mirada a tres Interpretaciones desde la Teoría APOE

Isabel **Maturana** Peña
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
isamatup@hotmail.com
Marcela **Parraguez** González
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
marcela.parraguez@ucv.cl
Maria **Trigueros** Gaisman
Instituto Tecnológico Autónomo de México
México
trigue@itam.mx

Resumen

Basándonos en la teoría APOE (Acciones, Procesos y Esquemas) (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) investigamos los niveles de coherencia en el esquema del concepto Transformación Lineal, entendiendo este como una articulación entre diferentes interpretaciones, las que hemos denominado interpretación funcional, matricial y geométrica; todas ellas entrelazadas por la combinación lineal. En este reporte de investigación, damos cuenta de una segunda etapa en la investigación, referida específicamente al proceso de validación del modelo multinterpretativo para el concepto transformación lineal, a partir de entrevistas semiestructuradas, desde donde se concluye, por ejemplo que el concepto de kernel es determinante en la evolución del esquema del concepto transformación lineal.

Palabras clave: Esquema, Transformación Lineal, APOE.

Introducción

Analizamos el concepto transformación lineal considerando tres formas en que este se presenta, donde cada una de ellas fue descompuesta en sus elementos fundamentales y articulados básicamente por el concepto combinación lineal; es así que nuestro estudio propuso, y basándose en la metodología propia de la teoría APOE, una descomposición genética, por cada interpretación del concepto transformación lineal que permitió una descripción detallada del esquema para el concepto, estas descomposiciones genéticas aparecen en forma detallada en Alme 27, bajo el título “Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal” (Maturana, Parraguez ,2014) y en acta CIBEM VII, bajo el título “Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica” (Maturana, Parraguez ,2013), en esta última se muestran las primeras evidencias obtenidas donde se incorporan las tres interpretaciones, desde donde emerge un modelo multinterpretativo para el estudio del concepto transformación lineal.

Sobre el concepto de transformación lineal, la documentación hasta ahora obtenida, da cuenta que su aprendizaje presenta una dificultad mayor, y son diversas las investigaciones en didáctica de la matemática que han abordado su problemática. Algunas de ellas en la última década, corresponden a los aportes de Uicab y Oktaç (2006), Molina y Oktaç (2007) ambas investigaciones abordan la problemática de aprendizaje en un contexto geométrico del concepto, identificando aquellos modelos que pueden tener los estudiantes en relación al concepto transformación lineal y el grado de interferencia de estos. Por otra parte, Roa y Oktaç (2010), dan cuenta de su investigación sobre la construcción de una Descomposición Genética del concepto transformación lineal, la cual se sustenta en la teoría APOE, proporcionando como resultado de investigación dos formas de construcción para concepto, ambas basadas en lo que llamaos interpretación funcional del concepto. Por su parte, Bagley, Rasmussen y Zandieh (2012) centran su investigación en la relación conceptual que los estudiantes establecen entre las matrices y las funciones lineales. Son algunos de los antecedentes que constituyeron la base para el diseño del modelo de investigación, entendido este como una propuesta desde APOE, que describe en detalle las construcciones y mecanismos mentales necesarios para la construcción y evolución del esquema concepto transformación lineal, es así que nuestros hallazgos, dan cuenta de los niveles de coherencia en el esquema del concepto transformación lineal, esto es la triada: Nivel Intra- Transformación Lineal, Nivel Inter-Transformación Lineal y Nivel Trans-Transformación Lineal.

La Teoría APOE

Dubinsky (Arnon et al., 2014) basado en el concepto de abstracción reflexiva, de Piaget, para describir la construcción de objetos mentales, distingue los siguientes mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, y reversión. Estos, a su vez, originan diferentes construcciones mentales: acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Consideremos F un concepto matemático. Un individuo posee una concepción acción de F si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de F si puede realizar una operación interna que hace esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de F. Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. Una descomposición genética, describe en detalle los aspectos constructivos de F para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales.

Diseño metodológico de la investigación

Incorporamos a la metodología propia de la teoría APOE el estudio de caso (Stake, 2010). La unidad de estudio que constituyo el "caso", son 20 alumnos chilenos de una universidad del país, estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática. La selección de dichos estudiantes se vinculó con las siguientes categorías: estudiantes exitosos académicamente, avance curricular, ejercitan ampliamente en matemática, voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores. Es preciso dejar en clara que al caso de estudio se aplicó el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como descomposición genética; un diseño, basado en la descomposición genética teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala et al., 1996).

En este reporte damos cuenta de la etapa final en la investigación relacionada con la búsqueda de los indicadores para la construcción del esquema para el concepto transformación lineal, esto es mostraremos las evidencias obtenidas desde las entrevistas realizadas a los estudiantes del caso que mostraron construcciones próximas a la objeto para el concepto transformación lineal. Establecimos la articulación entre las interpretaciones del concepto como criterio de selección para establecer el nivel de la coherencia en el esquema para el concepto de transformación lineal. Para ello trabajamos en un resumen tabular de la información sobre las construcciones mentales mostradas en un cuestionario previo, para algunos tramos de las descomposiciones genéticas propuestas.

Denominaremos por las siglas M, F y G a las interpretaciones Matricial, Funcional y Geométrica del concepto transformación lineal.

Tabla 1

Estudiantes del caso que mostraron construcciones metales próximas a la de objeto en la interpretación funcional. Fuente propia año 2013

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION FUNCIONAL
E3	MFG	PROCESO
E6	FMG	PROCESO
E9	GMF	OBJETO
E15	FMG	PROCESO
E16	FMG	PROCESO
E17	FGM	PROCESO
E18	MFG	PROCESO

Tabla 2

Estudiantes del caso que mostraron construcciones metales próximas a la de objeto en la interpretación matricial. Fuente propia año 2013

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION MATRICIAL
E3	MFG	PROCESO
E9	GMF	PROCESO
E13	MFG	PROCESO
E18	MFG	PROCESO

Tabla 3

Estudiantes del caso que mostraron construcciones metales próximas a la de objeto en la interpretación geométrica. Fuente propia año 2013

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION GEOMÉTRICA
E3	MFG	PROCESO
E5	MGF	PROCESO
E7	GFM	PROCESO
E9	GMF	OBJETO
E18	MFG	PROCESO
E19	FGM	PROCESO

Se realizó un proceso de triangulación de los datos y la información de las tablas anteriores (tablas 1, 2 y 3), el propósito es encontrar quienes son los estudiantes del caso que mostraron construcciones mentales próximas a la de objeto para el concepto de TL; es así que: E3, E9 y E18 fueron los candidatos para ser entrevistados. En tabla 4 se muestra el resumen de este procedimiento.

Tabla 4

Triangulación de los datos de la investigación. Fuente propia año 2013

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION FUNCIONAL	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION MATRICIAL	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION GEOMÉTRICA
E3	MFG	PROCESO	PROCESO	PROCESO
E9	GMF	OBJETO	PROCESO	OBJETO
E18	MFG	PROCESO	OBJETO	PROCESO

La información mostrada por los estudiantes seleccionados, E3, E9 y E18, sobre la articulación de las interpretaciones, permitió planificar el guion de sus entrevistas.

- E3, muestra una construcción mental proceso en todas las interpretaciones, sobre la articulación, entre la interpretación funcional y geométrica, está basada en el teorema fundamental del álgebra lineal, no presenta evidencias claras de articulación con la interpretación matricial, lo que es contradictorio con: primeramente el orden en que selecciono responder al cuestionario fue MFG, y que mostró una construcción mental proceso en las respuestas a las preguntas de la interpretación matricial del concepto. Para la entrevista de E3, se debió considerar que no mostró algún tipo de preferencia por interpretación.

- E9 muestra una construcción mental objeto en dos interpretaciones, la funcional y a geométrica, sobre esta articulación evocando el teorema fundamental del álgebra lineal, sin dar evidencias sobre coordinación con otras interpretaciones. Para su entrevista consideraremos que ha mostrado una articulación, y su tratamiento al concepto emerge desde lo geométrico, lo que queda confirmado en su selección para escoger el orden en el cuestionario (GMF).
- E18 muestra una construcción mental objeto en la interpretación matricial, sobre la articulación, da evidencias de coordinaciones entre lo funcional y lo geométrico, no muestra articulaciones con lo matricial. E18 responde al cuestionario es MFG, por lo que en su entrevista profundizaremos en sus articulaciones desde lo matricial.

El esquema y el modelo multinterpretativo

Nuestra propuesta para analizar los esquemas de los estudiantes seleccionados del caso se basa en el modelo multinterpretativo para el concepto de transformación lineal. El concepto de transformación lineal es un concepto unificador para el álgebra lineal, por esta razón para la caracterización de su esquema como construcción mental, proponemos considerar las interpretaciones como esquemas mentales que nos permitirán determinar los niveles de coherencia en el esquema global del concepto. Entonces, para obtener evidencias sobre estos niveles de coherencia en el esquema del concepto, consideramos el “exterior” de nuestras interpretaciones, que forman parte del concepto, pero que no fueron consideradas como elementos fundamentales en la construcción del concepto transformación lineal, es decir no aparecen como construcciones o mecanismos mentales en ninguna de las descomposiciones genéticas de cada interpretación, el propósito es poner a prueba cada descomposición genética como modelo descriptivo para el aprendizaje, y al mismo tiempo obtener evidencia de los elementos emergentes que construyen al concepto transformación lineal.

En la figura1 damos cuenta de esta idea, sobre la estructura para el concepto transformación lineal, donde posee componentes de origen funcional, matricial y geométrico, pero no desconocemos que es más que esto. Un ejemplo importante de un concepto en este “exterior”, es el de isomorfismo de espacios vectoriales, el que puede servir para examinar los elementos emergentes, pues posee características transversales para el álgebra en general.

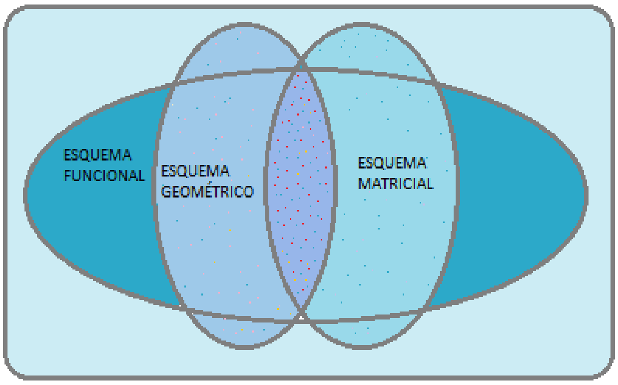

*Figura 1***.** Las componentes propuestas para él Estudio del esquema del concepto transformación lineal.

Para analizar la coherencia en el esquema del concepto transformación lineal y determinar sus componentes, proponemos que un estudiante muestra un nivel de esquema *Intra* para el concepto transformación lineal, si en alguna de sus interpretaciones da cuenta de poseer una construcción mental objeto, la que le permite realizar ciertas acciones sobre algunas estructuras fundamentales, pero no ha articulado las tres interpretaciones, por lo que responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto transformación lineal en alguna de sus interpretaciones, sin establecer correspondencia con las otras interpretaciones del concepto. Es así que al enfrentarlo a situaciones referidas al concepto transformación lineal, de un nivel superior, por ejemplo en relación al teorema del isomorfismo de espacios no podría responder en forma adecuada.

Un estudiante muestra un nivel de esquema *Inter* del concepto transformación lineal, es aquel que por lo menos ha articulado dos de las interpretaciones de este esquema, es de esta forma que responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto transformación lineal, lo que le permite establecer las primeras correspondencias o concordancias con los teoremas propios de las transformaciones lineales. Para finalizar un estudiante muestra un nivel de esquema *Trans* del concepto transformación lineal, si responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto transformación lineal, y es capaz de establecer correspondencia con todas las otras interpretaciones del concepto. Por lo que establecería conexiones con los teoremas propios de las trasformaciones lineales, como por ejemplo el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales. Es así que incorporamos en algunas de las preguntas seleccionadas para la entrevista la noción de isomorfismo de espacios vectoriales; a modo de poner a prueba todas las componentes del esquema del concepto transformación lineal. Pensamos que las nociones desde la perspectiva funcional como las de injectividad y epiyectividad debieran emerger, junto con la de linealidad, estas deben coordinarse con el concepto kernel y de dimensión, para en lo posible dar una respuesta que construya una función que respete la estructura de espacio vectorial. Los conceptos de grupo cociente y clase estarían en el límite del concepto transformación lineal, por lo que este tipo de construcción obedecería a un nivel Trans siempre que dé muestras de su coherencia.

Hemos dado cuenta de la forma en que fueron seleccionados los estudiantes del caso para las entrevistas, además se mostró el criterio para analizar los esquemas lo que constituye la directriz de análisis de nuestros datos.

Algunas evidencias obtenidas en las entrevistas

A continuación presentaremos un extracto de los relatos de los tres entrevistados para dar respuesta a la siguiente pregunta desde donde se pudo obtener algunas de las evidencias que sostenemos. Las entrevistas se realizaron por separado y se video gravaron**.**

Dada la transformación lineal $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $[F]_D^{D'} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$, donde $D = \langle (1,0,1),(1,1,0),(2,1,2) \rangle$ y $D' = \langle (1,1),(1,-1) \rangle$, determine si la transformación lineal *F* es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Extracto de la respuesta de E3:

Realiza algunos cálculos que aparecen en la figura 2, los que corresponden a la búsqueda del kernel de la transformación lineal.

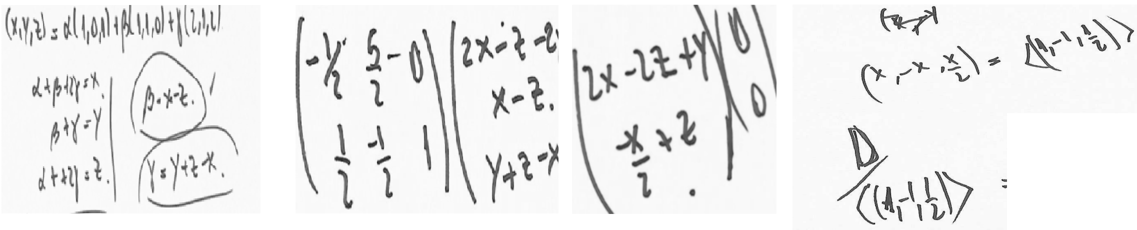

*Figura 2***.** Los cálculos realizados por E3.

[Ent-267] ¿Es un isomorfismo de R^3 en R^2?

[E3--267] No. No, no, no. Porque quizás no es inyectivo. Hay que hacerlo.

Realizó los cálculos mostrados en la figura 2, donde el kernel le permite dar respuesta a la pregunta, y por otra parte, reconstruir la función preservando la estructura algebraica de espacio vectorial.

[E3--281] Claro, pero por el Kernel no era 0.

[Ent-282] ¿Cómo calculaste el Kernel?

[E3--282] Las tres imágenes dan cero.

[E3--284] …Es que me huele que si uno de estos me da 0… No me va a dar 0

[E3--287] Sí, es un conjunto de preimágenes del 0.

[E3--288] También es un subespacio. Además los puntos de R^3 que van a dar al 0 de la transformación.

Responde que no es un isomorfismo, pero frente a la situación de reformular la función para que si lo sea E3 muestra que el esquema de la interpretación matricial le permite reconstruir la transformación en su interpretación funcional y responder a esta pregunta sobre el isomorfismo.

Extracto de la respuesta de E9:

[E9--36] Nuevamente la dimensión de los espacios es distinta, así que no puede haber un isomorfismo.

[Ent-37] ¿Estás seguro? Entonces tú dices que no hay un isomorfismo.

[E9--37] Sí.

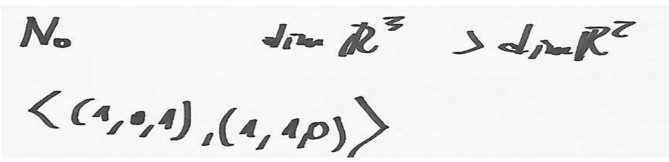

Figura 3. Muestra los argumentos de E9.

[Ent-39] ¿Y, no es posible redefinir?

[E9--39] No, no es posible, porque si… Porque el espacio en el conjunto es de dimensión 3, así que nosotros, aquí abajo no puede generar todo…

Tenemos una base aquí de dimensión 2.

[E9--41] Y en la imagen. Y conjunto de dimensión 2 no puede generar …. que tiene que aparecer aquí. Así que no puede haber un isomorfismo aunque sean iguales.

E9 para dar respuesta a la pregunta 5 coordina las construcciones mentales proceso del concepto de dimensión con el concepto de función, mediante el teorema fundamental del álgebra lineal. Lo que no alcanza para construir el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales, pues falta coordinar con el concepto de núcleo de la TL que le permitiría construir el grupo cociente lo que permitiría construir un isomorfismo.

Extracto de la respuesta de E18:

Lee la pregunta y reflexiona sobre las dimensiones de los espacios de partida y de llegada:

[E18-126] Pero si vamos al teorema, este tiene tres, y si se confirma que tiene que ser cero, más dos… No nos daría la igualdad.

[Ent-127] A ver, cómo. Explícame. Qué es ese juego de números.

[E18-127] Ya. Es que la dimensión de los espacios de partida… La dimensión…

[E18-128] Es 3. Si fuera un isomorfismo, el Kernel, o sea la dimensión del Kernel, tendría que ser cero. Sí, porque para que nos podamos devolver y esa sea invertida. Y la dimensión del espacio de llegada tendría que llegar a todo el espacio, pero ese es dos. Entonces no nos va a dar dos.

[Ent-129] Ya. Entonces, ¿cuál es tu respuesta?

En figura 4 se aprecia el trabajo de E18, donde se muestra que coordina los conceptos de función, dimensión, kernel e imagen, mediante el teorema de las dimensiones, Este corresponde a establecer que una TL entre espacios vectoriales finito dimensionales cumplen con la siguiente relación $\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Img} T)=\dim(V)$ donde V es el espacio vectorial de partida.

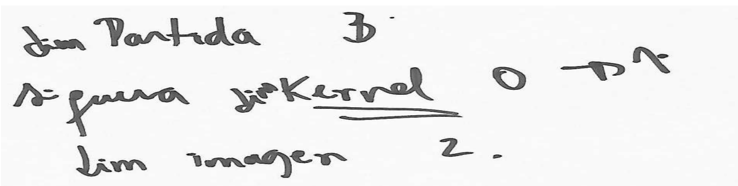

Figura 4. Trabajo de E18.

Comienza su explicación a su conclusión de que la transformación lineal de la pregunta es un isomorfismo.

[E18-129]- Que no. …Y esos de ahí son LI. Quiero ver eso. (1, 0, 1), (1, 1, 0) y (2, 1, 2). [Piensa en voz alta, trabaja.] (…) Entonces…

[Ent-130] ¿Son LD?

[E18-130] Estoy viendo si es LD. Y si es una contradicción, entonces es LI.

[Ent-131] ¿Y llegan a dónde?

[E18-131] Ese proceso tiene que ser dos. El 1 tiene que ser igual a B y ahí me tendría que dar C igual a dos, pero si beta es uno, entonces tendría que ser uno, entonces sí es LI.

[E18-134] Si es isomorfismo.

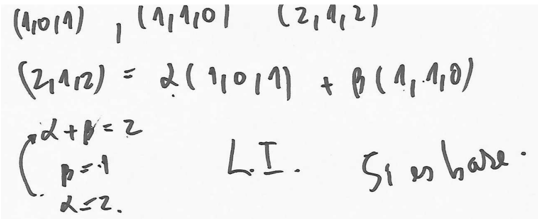

*Figura 5***.** Cálculos realizados por E18.

Su argumentación según transcripción de audio y escrito consiste en primeramente verificar que el espacio de partida dado como un generado sea un conjunto linealmente independiente, esto es verificación de que es una base, por lo que está mostrando una construcción proceso del concepto base de un espacio vectorial, posteriormente al concluir que son linealmente independiente asegura que la transformación lineal es un isomorfismo de espacios vectoriales. Lo que muestra que no ha coordinado el concepto de función con el de espacio vectorial mediante la combinación lineal.

Por esta razón se invita a comparar esta respuesta con la dada anteriormente.

[Ent-135] ¿Es un isomorfismo? Te recuerdo que antes tú dijiste algo.

[E18-135] Ah, sí.

[E18-136] Por el determinante. El teorema es el que determina…

[Ent-137] ¿Y se puede calcular ese determinante?

[E18-137] Entonces no podemos.

[Ent-143] ¿Por qué?

[E18-143] Porque… Es que… No quiero, no sé, no quiero como usar… Ya, porque no cumple eso. Y no puedo calcular el determinante.

Se da cuenta que no puede calcular el determinante y comienza a trabajar con el concepto del kernel de la transformación lineal. Esto muestra que la construcción mental asociada al concepto de kernel es proceso, pues recurre a ella desde el concepto de determinante de la matriz asociada a la transformación lineal.

Algunas conclusiones

Desde el estudio de las entrevistas sobre el concepto de transformación lineal, nos fue posible establecer que al analizar el proceso de articulación de las interpretaciones del concepto se pone a prueba su esquema, es así que los tres entrevistados mostraron en términos generales, las siguientes construcciones mentales: espacio vectorial, vector, base, conjuntos linealmente independientes y linealmente dependientes, combinación lineal, función lineal, inyectividad, matriz, coordenada, Matriz asociada a una transformación lineal, dimensión, kernel, isomorfismo, teorema fundamental del algebra de espacios vectoriales.

Cada una de ellas como construcciones mentales proceso u objeto sobre las cuales efectuaban acciones o coordinaciones; las que estuvieron dispuestas en nuestras descomposiciones genéticas, pero la diferencia en la coherencia de sus esquemas se pudo establecer mediante la introducción del concepto de isomorfismo de espacios vectoriales, donde dos de los tres estudiantes entrevistados, mostraron que las construcciones mentales de los conceptos de dimensión y kernel eran fundamentales, ambos lo relacionaron a la interpretación funcional del concepto transformación lineal , donde la estructura algebraica de espacio vectorial era fundamental. Por otra parte, en ambos emerge el concepto de grupo cociente, vinculado a la estructura de espacio vectorial, pensamos que estos estudiantes lograron relacionar el álgebra abstracta con el álgebra lineal mostrando así uno de ellos un esquema para el concepto de transformación lineal de nivel Trans, el que logró articular las tres interpretaciones y construir el isomorfismo ente espacios vectoriales. Las diferencias con los otros entrevistados radicaron, por una parte, en: las interpretaciones no construidas como construcción mental objeto, lo que impidieron levantar respuestas claras, por otra el uso mecanizado de algunos teoremas sobre la dimensión de espacios vectoriales y su relación con el isomorfismo de espacios vectoriales. La inyectividad resulto ser otro indicador, pues no siempre se coordina con el concepto de kernel lo que limita la construcción del esquema para el concepto de transformación lineal.

Referencias y bibliografía

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics ducation. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, 6*, 1-32. Providence: American Mathematical Society.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*. New York: Springer.

Bagley, S., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2012). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics.*

Maturana, I., & Parraguez, M. (2014). Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 7, pp. 771-778). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maturana, I., & Parraguez, M. (2013). Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica. En SEMUR (Ed), *Acta VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 1993-2000*. Uruguay.

Molina, G., y Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10*(1), 241-273.

Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Stake, R.E. (2010). *Investigación com estudio de casos*. Barcelona: Labor.

Ubicab, R., & Oktaç, A. (2006). *Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica* (Tesis de doctorado). CICATA-IPN, D.F., México.