



Experiências com alunos e professores sobre números construtíveis utilizando régua e compasso

Angélica **Felix** Laurindo Silva
Universidade de Brasília
Brasil
angelicacqd@gmail.com

João Paulo dos **Santos**
Universidade de Brasília
Brasil

joaopaulo.mat@gmail.com
Roberta Paula Brandão de **Novais**
Universidade de Brasília
Brasil
roberta.novais@hotmail.com

Resumo

No trabalho que segue, mostraremos o desenvolvimento e os resultados de experiências realizadas pelos autores em um minicurso oferecido para alunos do curso de graduação em Matemática e professores da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF). Os objetivos foram: apresentar o significado de um número construtível, compreender a importância da construção com régua e compasso no ensino, relacionar geometria e álgebra apresentando novas resoluções de questões algébricas com construção geométrica e, observar como o conteúdo foi compreendido por alunos e professores. Para tanto, desenvolvemos com os dois grupos sequências de atividades envolvendo construções geométricas. Os resultados revelam a pertinência da construção geométrica para a conceituação em álgebra e geometria. Além disso, mostrou-se como elemento vital para reflexões sobre a formação dos professores na graduação e da consequente formação dos alunos que ingressam na universidade.

Palavras-chave: construções com régua e compasso, geometria, números construtíveis, relato de experiência, formação de professores.

Introdução

Este relato baseia-se em uma experiência realizada durante a aplicação de um minicurso sobre construções com régua e compasso e números construtíveis, ministrado pelos autores para alunos do curso de graduação de Matemática que integram Programa de Educação Tutorial de Matemática (PET-MAT), da Universidade de Brasília e para professores da SEEDF durante o VI Encontro Brasiliense de Educação Matemática (VI EBREM), promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Distrito Federal (SBEM-DF) em parceria com o Departamento de Matemática - UnB cujo tema foi SER EDUCADOR MATEMÁTICO, realizado na Universidade de Brasília nos dias 19, 20 e 21 de setembro de 2014.

Segundo Wagner e Carneiro (2007):

As Construções Geométricas devem, em nossa opinião, acompanhar qualquer curso de Geometria na escola secundária; visto que os problemas são motivadores, intrigantes e conduzem a descobertas de novas propriedades. Os mesmos são educativos no sentido em que cada um é necessário uma análise da situação, onde se deve fazer um planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade dos dados (Wagner & Carneiro, 2007, p. 18).

Além disso, os autores citados acima sugerem uma forma de aliar álgebra à geometria, tratando os problemas de construções geométricas de maneira completamente diferente:

se a solução de um problema não ocorre através dos recursos dados em geometria plana, pode-se adotar como incógnita algum segmento ainda desconhecido e tentar exprimi-lo em função dos elementos conhecidos. Com isso, é obtida uma “fórmula” que calcula esse segmento desconhecido em função dos dados do problema (Wagner & Carneiro, 2007, p. 29).

Vale lembrar que a ideia de construção, segundo Wagner e Carneiro (2007) significavam para os gregos, construir apenas com régua e compasso. A concepção grega de número real era inteiramente geométrica, a distinção entre construções com régua e compasso e construções mecânicas continha uma classificação de números reais, como ficaria claro séculos mais tarde. De fato, desde cedo os gregos esbarraram na dificuldade de, somente com a régua e compasso, duplicar o cubo, quadrar o círculo, tri-seccionar um ângulo genérico, por exemplo. A dificuldade encontrada por eles mostrou-lhes um problema, de que até hoje algumas pessoas não percebem, e acabam confundindo construções aproximadas ou mecânicas, com construções exatas com régua e compasso.

Atualmente, ainda se observa no ensino de matemática aulas expositivas, no qual o professor se comporta como detentor do conhecimento e o aluno tem um papel de mero expectador cujo seu maior esforço é, normalmente, na resolução de exercícios de fixação. Ciente destes fatos, preparamos um minicurso de modo a resgatar a construção com régua e compasso no ensino, abordando estas construções de maneira diferenciada de forma que geometria Euclidiana plana e a álgebra sejam aplicadas, por meio de construções, para auxiliar a compreensão do conceito de números construtíveis com régua e compasso.

Na próxima seção apresentamos como o minicurso foi desenvolvido e os aspectos teóricos abordados. Apresentamos, também, os resultados obtidos das observações realizadas durante o minicurso. Finalmente, na última seção, apresentamos a conclusão do trabalho.

Referencial Teórico

O abandono das construções geométricas é notado pelas autoras em algumas escolas em que elas desenvolveram experiências, estágios e observações em disciplinas do curso de Matemática. Tal fator motivou reflexões que culminaram no minicurso aqui descrito.

Segundo Nacarato (2000):

Muitos são os fatores que contribuíram para esse abandono, dentre eles podemos citar a própria história do ensino e matemática no Brasil e, em especial, o de geometria, e a não compreensão por parte dos professores, da importância da formação de conceitos geométricos para desenvolvimento do pensamento matemático (Nacarato, 2000, p.84).

Entendemos que uma das causas do abandono pode ser também a maneira como as construções de régua e compasso passaram a ser ministradas em sala de aula. A construção geométrica tem-se resumido em como fazer o desenho sem a fundamentação teórica que mostra o porquê, sendo assim, impede ao aluno a percepção que a metodologia desenvolvida é coerente e necessária para a resolução do problema. Ressalta Saldanha (2012, p.2), ‘‘A Metodologia da Resolução de Problemas tem sido vista como uma das principais alternativas, constituindo-se como uma estratégia de ação que através de uma abordagem criativa permite introduzir conhecimentos matemáticos de forma dinâmica’’.

Tendo em vista a Metodologia de Resolução de Problemas, é possível perceber que uma construção de régua e compasso que valoriza o processo em detrimento do resultado perpassa as quatro etapas da resolução de um problema: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e a análise dos resultados. Desse modo entendemos que a metodologia de resolução de problemas mostra-se pertinente as situações de construções geométricas podendo contribuir para o ensino e aprendizagem tanto da geometria quanto da álgebra na Educação Básica.

Metodologia

Para dar suporte a temática, o minicurso foi inspirado na sequência didática (Ferreira & Miranda, 2008) desenvolvida com base na metodologia de resolução de problemas (Saldanha, 2012). O mesmo foi desenvolvido para ser apresentado no VI EBREM, tendo uma pré-apresentação para os alunos do grupo do PETMAT- UnB, onde foram feitas observações que seriam comparadas posteriormente com os participantes do VI EBREM. Além disso, foram feitas as últimas correções e ajustes para uma melhor apresentação no encontro promovido pela SBEM-DF.

O VI EBREM foi um encontro voltado para professores da Educação Básica, alunos de graduação e pós-graduação, professores do ensino superior e pesquisadores das áreas de Matemática, História da Matemática, Educação Matemática e áreas afins, proporcionando ao seu público atualização em relação aos conteúdos e a didática específica para o ensino de matemática, um intercâmbio cultural e científico entre pesquisadores e alunos de pós-graduação do DF e de outras partes do Brasil (para mais informações, consulte a página do evento: <http://www.sbemdf.com/index.php/home/sbemdf/noticias/item/105-vi-ebrem-relatorio>).

Sua pré-apresentação foi desenvolvida para o grupo PETMAT-UnB, formado por 12 alunos bolsistas e não bolsistas graduandos do curso de matemática da Universidade de Brasília, nos graus de licenciatura e bacharéis no período entre o 3º e 7º semestre da graduação

(http://www.mat.unb.br//index.php?option=com_content&task=view&id=57&Itemid=244).

O minicurso foi dividido em dois encontros de uma hora e trinta minutos. No primeiro encontro realizamos uma aula prática em que foram trabalhadas as construções básicas: construção de retas paralelas, reta perpendicular e mediatriz, tendo em vista que estas construções serão utilizadas para construções elementares de números com régua e compasso. Paralelamente com as construções, foram resgatados elementos fundamentais da geometria Euclidiana plana, como congruência de triângulos e paralelismo, abordando o estudo de paralelogramos, em particular foram vistas as propriedades do losango.

O losango foi a nossa motivação na construção de retas paralelas e perpendiculares. Ele foi escolhido porque nos processos de construções dessas retas era sempre observada a construção de um losango e, dadas as suas propriedades, a construção das retas anteriores eram validadas. Por este motivo, optamos por realizar nossa primeira atividade propondo aos participantes que construíssem dois losangos, de tal modo que na primeira construção a reta dada deveria ser a reta suporte de um de seus lados, enquanto que na outra deveria ser a reta suporte de uma das suas diagonais.

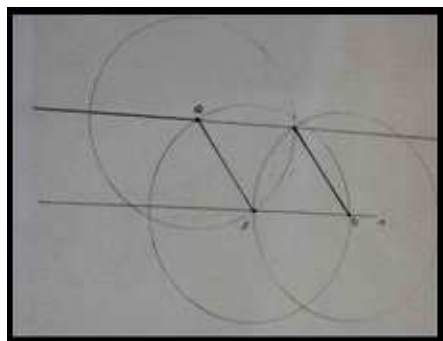


Figura 1. Construção de retas paralelas, feita por um participante do PETMAT-UnB.

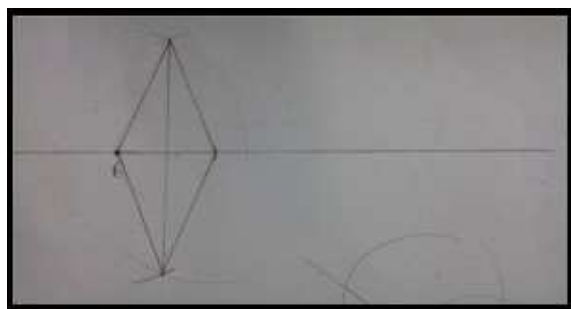


Figura 2. Construção da reta perpendicular, feita no primeiro dia do encontro do PETMAT-UnB.

Foram trabalhadas também as construções elementares de números: $a+b$; $a-b$; $a \cdot b$; $a \div b$, onde a e b representam medidas de segmentos. Nesta etapa, conclui-se que os números racionais são construtíveis. As duas primeiras construções foram feitas de maneira mais intuitiva deixando que os participantes percebessem que se tratava apenas de transposições dos segmentos dados. As duas últimas são feitas a partir do Teorema de Tales que é citado na nossa sequência didática. Esse tipo de abordagem corrobora com as discussões promovidas por Kushima, Pirkel e Steenbock (2009) a partir da compilação de inúmeros trabalhos sobre desenho geométrico. De modo geral essas discussões apontam que é “importante que essas atividades sejam conduzidas,

de forma que mantenha ligações estreitas com o estudo de outros conteúdos, em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade. ” (Kushima, Pirkel & Steenbock, 2009, p.96)

Partindo de um segmento unidade, construímos os números inteiros e os números racionais através destas construções elementares. Para a compreensão da construção do \sqrt{a} foi feita uma dinâmica diferente, na qual a construção foi apresentada e os participantes tiveram que argumentar a fundamentação da construção.

Na análise de resultados de todas as atividades, conforme a metodologia de resolução de problemas que proporciona um enriquecedor processo de aprendizagem, foi salientada o fato de analisar os diferentes caminhos escolhidos e seus resultados.

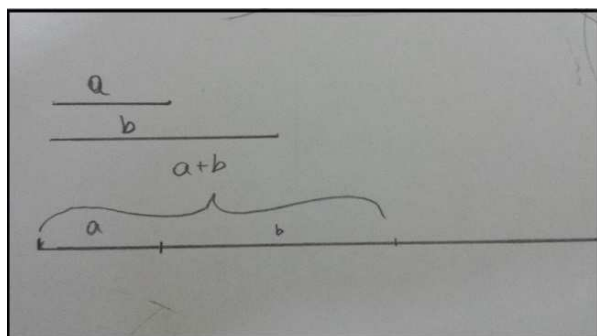


Figura 3. Construção de um segmento de medida $x = a + b$, feita por um integrante do PETMAT-UnB.

No segundo encontro, realizamos aula expositivo-teórica, onde foram relacionados aspectos algébricos com construções geométricas, com um tratamento mais formal de números construtíveis. Foram tratados inicialmente construções com régua e compasso de soluções de equação do 2º grau e de sistemas; cuja solução para equação do 2º grau $x^2 - ax + b^2 = 0$ passa pela análise do discriminante Δ , que determina a existência de soluções. A escolha desta equação ao invés da equação com a forma geral, foi devido a motivação geométrica que ela nos proporciona, permitindo análises tanto do seu discriminante, quanto abordar o problema de encontrar soluções para uma equação do 2º grau, através da resolução do sistema $x_1 + x_2 = a$, $x_1 \cdot x_2 = b^2$. Além disso, os coeficientes dessa equação, comparados aos da equação da forma geral, podem ser reescritos e construídos com régua e compasso, fazendo as mudanças devidas.

Um exemplo abordado foi o caso em que para $\Delta \neq 0$, temos geometricamente que $\sqrt{\Delta}$ é um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa a e outro cateto igual a $2b$ (Figura 4). Agora sendo Δ menor que 0 (zero), lembrando que $\Delta = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b^2 = a^2 - (2b)^2$, temos pela equação que $a^2 < (2b)^2$, logo $a < 2b$, o qual chegamos em um absurdo, pela existência de um triângulo retângulo, pois estamos concluindo que sua hipotenusa é menor que um dos catetos.

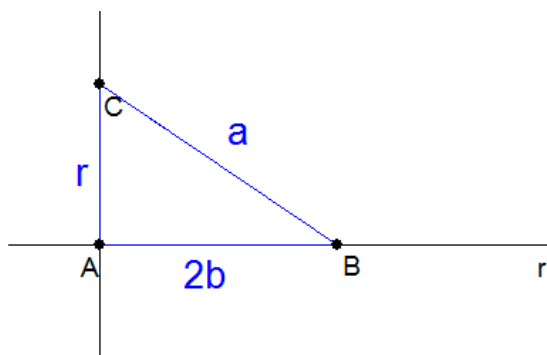


Figura 4. Construção de um triângulo retângulo em que $r = \sqrt{\Delta}$ feita no software KSEG.

No caso em que $\Delta > 0$ sabe-se que a equação tem duas raízes reais e distintas e a construção das raízes desta equação, $x_1 = a/2 - r/2$ e $x_2 = a/2 + r/2$, foi dada pela construção deste triângulo retângulo (Figura 4), de forma que D seja o ponto médio do segmento BC, DF pertença a uma reta paralela a AB obtendo-se assim o segmento $CF = r/2$. O círculo de centro C e raio CF determina G e H na reta BC tais que $DG = x_1$ e $DH = x_2$ são as raízes da equação dada.

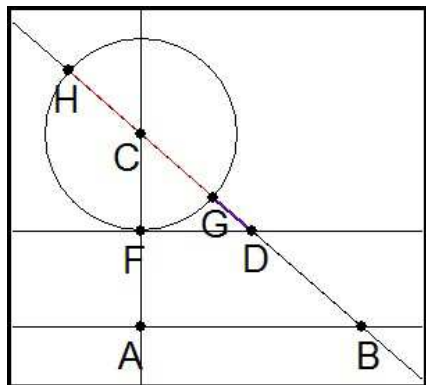


Figura 5. Construção das raízes da equação: $DG = x_1$ e $DH = x_2$, realizada no software KSEG.

Nessa abordagem destacamos a importância da representação visual de algo que normalmente é mostrado somente em fórmulas matemáticas. Segundo Garcia (2006), citado por Kushima, Pirkel e Steenbock (2009, p.98)

A fórmula favorece o processo mecânico de resolução de problemas, porém pouco favorece a compreensão de conceitos. A visualização torna-se uma forma mais efetiva para uma melhor compreensão da Matemática apesar da língua verbal e escrita ser mais utilizada em sala de aula (Kushima, Pirkel & Steenbock, 2009, p.98).

Foi abordado também o conceito formal de número construtível e apresentado o princípio básico da solução do problema de números construtíveis. Ao final, concluímos a apresentação com o resultado que diz que um número é construtível quando é raiz de um polinômio de grau de potência de dois. Como aplicação apresentamos o problema clássico da duplicação do cubo (Silva, 2013).

Para o desenvolvimento do minicurso, foi utilizada uma sala com quadro negro, giz, apagador, régua e compasso para o quadro. Os participantes receberam: uma apostila desenvolvida pelos autores, régua, compasso, folhas em branco e um questionário para avaliação

do minicurso. No questionário perguntou-se sobre a formação, a idade e o sexo dos participantes, além de quatro questionamentos: “Quais suas expectativas do minicurso?”, “O que vocês acham que podem aprender com o minicurso?”, “Suas expectativas foram alcançadas?”, “Ficou algo para ser esclarecido? Alguma dúvida?” e ao fim pedimos sugestões.

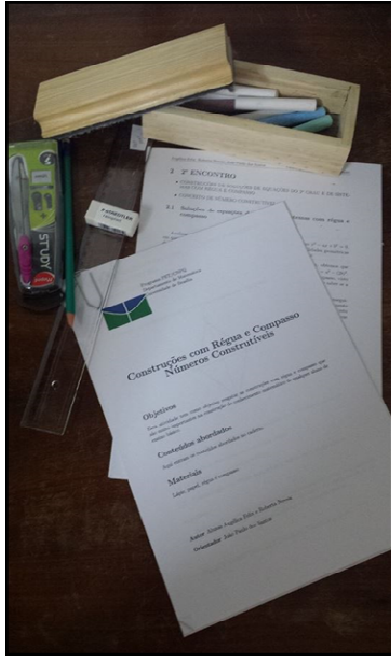


Figura 6. Materiais didáticos utilizados pelos participantes.



Figura 7. Régua e compasso utilizados pelos autores.

Análise dos Resultados

Relacionamos geometria e álgebra, apresentando novas resoluções de questões por meio de construções geométricas, como no caso das soluções das raízes do 2º grau do tipo $x^2 - ax + b^2 = 0$. Vimos que, de fato, algo novo foi apresentado para os participantes em que eles ficaram bastante satisfeitos da forma em que foi apresentado, por poderem ter uma nova visão do porque que

quando o $\Delta < 0$ a equação não tem solução nos reais. Outro fator que os participantes avaliaram positivamente foi à apresentação do resultado de quando um número é construtível ou não com régua e compasso estar diretamente relacionado com a raiz de um polinômio que ele representa e consequentemente, a facilidade depois de compreender porque que raiz cúbica de dois não pode ser construtível com régua e compasso, relacionando tal fato com o célebre problema da duplicação do cubo, cuja história apresentada foi bastante apreciada pelos participantes.

Apesar de ter alguns resultados comuns nos dois encontros, como exposto acima, tivemos também suas particularidades.

Encontro do PETMAT-UnB

Nesse primeiro encontro, percebemos a importância do tema tratado. Todos os participantes do PETMAT-UnB demonstraram bastante interesse e vontade de entender as atividades propostas. Três dos participantes já haviam feito a disciplina “Geometria I”, que na Universidade de Brasília aborda geometria Euclidiana plana e construções com régua e compasso. Assim, estes serviram muitas vezes de mediadores para os demais, dos quais, nenhum deles tinha visto tais construções. Muitas dúvidas de nível básico surgiram, como por exemplo, alguns não sabiam o que era uma reta suporte, outro, um aluno do 3º semestre do curso de matemática, não sabia o que era Teorema de Tales, conteúdo abordado para a construção de ab e a/b . Foi dito que nunca havia visto tal conteúdo, o que evidencia a deficiência no ensino básico e na sua formação.

Como o primeiro encontro era mais prático e, como já comentado, alguns dos participantes já tinham feito Geometria I, tivemos um fator facilitador para o desenvolvimento das construções. Já o segundo encontro, promoveu maior tratamento teórico como também apresentação de conceitos e de novas metodologias.

De modo geral, o encontro mostrou fragilidades conceituais na formação básica dos participantes, em especial, sobre: geometria plana e álgebra.

Encontro do VI EBREM

Diferentemente do encontro com alunos do PETMAT-UnB, nosso minicurso do VI EBREM foi desenvolvido junto a professores já formados e alunos de graduação. A expectativa era que, ao menos alguns deles mostrassem algum conhecimento prévio sobre o conteúdo, principalmente do primeiro encontro, onde construções elementares foram abordadas, porém isso não aconteceu. Apenas dois participantes de um total de cinco professores formados, com experiência em sala de aula, mostraram algum conhecimento. Os demais não demonstraram familiaridade com os temas abordados. O que mais chamou atenção foi que esses últimos demonstraram dificuldade além da esperada, como por exemplo, diferenciar o que são relações métricas com as relações trigonométricas de um triângulo retângulo. Foi preciso mediar muitas vezes junto a eles para que os mesmos conseguissem terminar ou entender o que era proposto nas atividades.

Mesmo com todas as dificuldades observadas é importante destacar a iniciativa desses professores e alunos em buscar o aprimoramento dos seus conhecimentos. Todos mostraram muita atenção e envolvimento com as atividades. O minicurso possibilitou grande troca de experiência entre os participantes, devido a sua constituição diversificada que compreendia em um grupo pessoas que estão começando o curso e pessoas que estão em formação continuada, o

que foi bastante relevante. Os estímulos de discentes quando transmitidos a docentes fazem muita diferença a ambos, pois estas experiências permitem aos alunos se colocarem no lugar de professores e aos professores aprenderem com os alunos.

As dificuldades gerais mais percebidas foram no início das construções de retas paralelas e perpendiculares e no estabelecimento do plano para a construção do segmento $a.b$. No primeiro caso, os participantes queriam usar régua para marcação de medidas e não tinham muita familiaridade com o compasso mostrando o desuso de tal instrumento. No segundo caso, a dificuldade foi em entender que eles precisariam primeiramente entender as relações dos segmentos no esquema do Teorema de Tales e somente depois utilizar a construção de uma reta paralela.

Diante de tudo isso, avaliamos que o objetivo foi alcançado. Como dito anteriormente, buscava-se proporcionar aos professores de Matemática uma atualização do conteúdo e uma nova didática, especificamente em nosso caso, com relação a construções com régua e compasso, apresentando a eles uma nova metodologia para mediar tais conteúdos, e uma atualização também para os graduandos futuros professores. Mas não podemos pensar que apenas essa ação seja suficiente para chegarmos ao ponto desejado: o resgate do uso das construções geométricas para o ensino de álgebra e geometria. Percebemos que esses professores ficaram motivados, porém só motivação não é o suficiente uma vez que muitos deles mostraram determinadas dificuldades que apenas um minicurso não é suficiente para supri-las. Além disso, foi possível observar os pontos que devem ser melhorados para suprir a deficiência de conteúdo apresentado.

Conclusões

Nosso intuito em compreender a importância das construções com régua e compasso no ensino para os participantes do minicurso foram alcançados. Mostramos aos professores e aos alunos mais um método de ensino e aprendizagem, fazendo o uso de situações problemas para as construções dos números.

Mostramos, também, aos professores que construções com régua e compasso são uma forte ferramenta no ensino da matemática, pois permite aos alunos ampliar o raciocínio matemático devido a possibilidade de manipulação e visualização. Quanto aos alunos, foi observado o desenvolvimento de pensamento sistêmico, de cooperação e do estabelecimento de conexões entre conhecimentos prévios; habilidades necessárias a sua formação.

A sequência didática por nós abordada, permitiu observar o ciclo vicioso que tanto alunos como professores têm em resolver problemas de construções geométrica seguindo o passo a passo, valorizando o resultado ao invés do processo. Os recursos utilizados por meio da metodologia da resolução de problemas, passando primeiramente pela compreensão do problema, estabelecimento e execução de um plano, juntamente com a análise dos resultados, possibilitou o entendimento de fato do processo de construção de uma reta paralela, utilizando a construção do losango, em uma das atividades propostas no minicurso.

Acreditamos que as dificuldades conceituais e metodológicas apresentadas por alguns professores, acontecem devido a inúmeros motivos, entre eles: limitações da formação inicial, poucas oportunidades de formação continuada, alta carga didática nas escolas, como também por não abordarem o assunto no dia a dia em sala de aula.

O presente relato de experiência amplia nossa reflexão sobre a formação dos professores na graduação e da conseqüente formação dos alunos que ingressam na universidade. O abandono de determinados conteúdos por parte dos professores, as maneiras rígidas de apresentação dos conteúdos acabam inibindo alguns raciocínios matemáticos dos alunos. Assim, determinados conteúdos acabam permanecendo com um bloqueio para o discente, futuro docente. Visto que muitos alunos segundo Pais (2011, p.26) “arrastam, por muitos anos, dificuldades referentes à aprendizagem de conteúdos estudados nas primeiras séries da escolaridade, gerando os conhecidos “traumas” pela resolução de problemas, em função da experiência particular por ele vivenciada.”

O objetivo de resgatar os elementos básicos de construções geométricas no momento do minicurso foi cumprido, mas, pelos seus envolvimento e dúvidas durante o minicurso, tememos que, caso não aplicado de maneira recorrente em sala de aula, o tema seja esquecido. Isso acaba gerando um desconforto, principalmente para os já formados, com isso eles terminam ensinando o que eles sabem, deixando de lado aquilo que não sabem tanto assim. Ressaltamos aqui a importância da formação continuada, a busca por mais conhecimentos e metodologias como destacou um professor, no questionário em que perguntávamos quais eram as suas expectativas para o minicurso: “Expectativas de ver novidades que possam ser aplicadas no Ensino Fundamental II”.

Referências

- Baran, I. (2004). *KSEG: Software de Geometria Dinâmica* (versão 0.401) [Software]. Disponível: <http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html>
- Ferreira, F.A., & Miranda, D.F. de (2008, setembro). *Demonstrações em Geometria Euclidiana: uma sequência didática como recurso metodológico para o seu ensino*. XII Encontro Brasileiro dos Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Rio Claro, SP, Brasil, 7.
- Kushima, A.A., Pirkel, J., & Steenbock, P.R. (2009). O ensino de geometria com suporte de desenho geométrico [versão eletrônica], *Revista Científica do Colégio Militar de Curitiba* (Kur'Yt'yba), 1(1), 87-103.
- Nacarato, A. M. (2000). *A educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação: currículo em ação de um grupo de professores ao aprender ensinando geometria* (Tese de Doutorado em Educação: Educação Matemática). FE, Unicamp, Campinas, SP, Brasil.
- Pais, L.C. (2011). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa* (3ª ed., Coleção Tendências em Educação Matemática, p. 26). Belo Horizonte: Autêntica.
- Saldanha, M. A. (2012, agosto). *Resolução de problemas: uma metodologia alternativa para o ensino e a aprendizagem de matemática nas escolas do CASE*, III EIEMAT Escola de Inverno de Educação Matemática, 1º Encontro Nacional PIBID Matemática, Santa Maria, RS, Brasil, 1.
- Silva, L. P. Jr. (2013). *Construções geométricas por régua e compasso e números construtíveis* (Dissertação de Mestrado Profissional). PROFMAT, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB, Brasil. Disponível: <http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Luis.pdf>
- Wagner, E., & Carneiro, J.P.Q. (2007). *Construções Geométricas*. (2ª ed., Coleção do Professor de Matemática, pp.18-29). Rio de Janeiro: SBM.