Aproximación a las concepciones usadas en la resolución de problemas de variación y cambio

Edwin **López** Velandia
Grupo EDUMAT-UIS, Universidad Industrial de Santander
Colombia
edwin.lopez8927@gmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

A través de esta comunicación presentamos resultados de una investigación que tiene por objetivo identificar algunas estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y cambio, en los estudiantes que realizan un curso de pre-cálculo. La Universidad Industrial de Santander (UIS) no es ajena a la problemática reportada por investigadores respecto a la reprobación y malos resultados de estudiantes en los cursos de cálculo diferencial e integral, por lo que desde 2013 se ofrece un curso de pre-cálculo fundamentado en la resolución de problemas y el uso de tecnología, con el propósito de potenciar el desarrollo del pensamiento variacional. Este curso se convierte en el escenario perfecto para esta investigación de tipo descriptivo-exploratorio enmarcado en una lógica cualitativa. Veremos la veracidad de las concepciones, identificadas con el modelo ckc (Balacheff, 2005) que utilizaron los estudiantes al plantear sus estrategias determinaron el éxito o no en la búsqueda de la solución a los problemas planteados.

Palabras clave: pre-cálculo, pensamiento variacional, estrategias, concepciones y resolución de problemas

Problemática y objetivo de investigación

Diferentes investigaciones evidencian dificultades en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo a nivel universitario que generan una gran problemática por las altas tasas de reprobación y repitencia en esta asignatura (Aparicio, 2006). En el caso particular de la Universidad

Industrial de Santander (UIS), a través de varios proyectos adelantados por la Vicerrectoría Académica, se reporta que el curso Cálculo I (Cálculo Diferencial) se ubica en el primer y segundo lugar en cuanto a reprobación, cancelación y repitencia en los estudiantes que recién ingresan a la universidad (Botello, 2013).

Artigue (2003) y Salinas y Alanís (2009) señalan que los métodos de enseñanza continúan siendo muy tradicionales ya que se enfocan en prácticas algorítmicas y algebraicas, esto afecta negativamente la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo: acumulación y variación. Esta problemática ha llevado a investigadores en educación matemática a reflexionar sobre los diferentes contenidos en los que se basa la enseñanza y el aprendizaje de esta rama de la matemática como lo son funciones, límites y derivadas, entre otros más específicos. Algunas instituciones universitarias no son indiferentes a la problemática esbozada, por lo que han surgido iniciativas como las tutorías y la implementación de cursos de pre-cálculo para mitigar el impacto negativo de esta situación que muchas veces termina en deserción escolar. Incluso, investigadores como François Pluvinage, David Tall, Luz Manuel Santos, Luis Moreno, Jorge Fiallo y Sandra Parada estudian la incorporación de software en las aulas para favorecer la construcción de ideas intuitivas de las nociones del cálculo.

La UIS ha venido ofreciendo desde el 2013 un curso de pre-cálculo que tiene como objetivo favorecer el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes a través de la resolución de problemas de variación y cambio con el uso de la tecnología (GeoGebra); por lo que un grupo de profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática de la universidad, diseñaron 14 talleres que se llevaron al aula, los cuales transitan desde los números reales, hasta ver la derivada como razón de cambio. Cada sesión de trabajo se distingue por diferentes momentos en los que el estudiante: inicialmente explora el problema relacionado sin ningún tipo de ayuda más que el dibujo en el taller o la descripción de la actividad; después se realiza una exploración de la simulación del problema en GeoGebra que permite ver la versión dinámica de la situación, favoreciendo la observación y el análisis de lo variante e invariante, realizar cálculos, analizar el problema en diferentes sistemas de representación, plantear conjeturas, explicar, justificar y argumentar. Durante estas etapas siempre se realiza la socialización de las estrategias y conjeturas sobre las posibles respuestas a las preguntas planteadas. Por último, se deja propuesto un nuevo problema que el estudiante realiza en casa como trabajo adicional. Por todo esto, el curso se enmarca en un enfoque no tradicional que supera el refuerzo de un repaso de contenidos donde lo más importante es la participación de los estudiantes durante diferentes momentos de la clase (Fiallo y Parada, 2014). Es en este escenario y la metodología de trabajo que favorece la interacción entre pares en el proceso educativo, surgió el objetivo de la investigación: *identificar algunas estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y cambio, en los estudiantes que realizan el curso de pre-cálculo de la UIS.*

Marco conceptual

Para el diseño de las actividades y la metodología del trabajo del curso se tuvieron en cuenta aspectos teóricos del pensamiento variacional, la resolución de problemas y el uso de tecnologías como pilares fundamentales. Estos elementos constituyen el marco conceptual de esta investigación, tomando en cuenta principalmente las posturas de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia (MEN, 1998), MEN (2004), los principios y estándares para la educación matemática (NCTM, 2003) y Vasco (2006).

Pensamiento Variacional

Son varias las investigaciones alrededor del pensamiento variacional que resaltan su importancia como parte fundamental en la formación matemática de los estudiantes. En este trabajo tenemos en cuenta la caracterización de pensamiento variacional planteada por Vasco (2006):

> "El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad" (Vasco, 2010).

La variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente. El *razonamiento covariacional* se caracteriza por "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra (Carlson, *et al*, 2003, citado por Villa-Ochoa, 2012, p. 12).

Resolución de Problemas

Respecto a la resolución de problemas tomamos lo que nos presenta el NCTM (2003) en uno de los cinco estándares de procesos

> "La resolución de problemas significa comprometerse en una tarea para la que el método de resolución no se conoce de antemano. Para encontrar una solución, los estudiantes tienen que recurrir a sus conocimientos y, a través de este proceso, muchas veces adquieren nociones matemáticas nuevas. Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo" (p. 55).

Por otra parte, Polya, 1981 plantea que:

> "[...] se entenderá que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados" (Polya, 1981, p.1).

La resolución de problemas se debe vivir como un proceso de enseñanza-aprendizaje y no como método de evaluación o un resultado ya que fortalece en el estudiante la posibilidad de explorar, la posibilidad de conjeturar, de descubrir o reinventar las matemáticas. Esta idea es apoyada por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) que alientan a la comunidad de docentes del país a utilizar estas situaciones problema como una forma de promover el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes, favoreciendo así el dominio del conocimiento, la utilización de estrategias cognoscitivas y metacognitivas, dejando en evidencia el sistema de creencias de los estudiantes respecto a los temas trabajados.

En la resolución de problemas el papel del profesor está caracterizado por ser un mediador y guía del proceso de resolución de la situación y de la argumentación que hacen los estudiantes. Él es el responsable de preparar buenos problemas que no solo le den la oportunidad a los estudiantes de utilizar lo que saben si no la oportunidad de investigar y aprender nuevos conceptos que estén acordes a su nivel escolar.

De Guzmán (1994, s.n.) afirma que:

> "La enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo. Lo que en el fondo se persigue con ella es transmitir en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas. Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra" (s. n.).

Por lo anterior, es importante que el profesor cuestione a los estudiantes en todo momento con preguntas como: *¿Estamos seguros de que entendemos esto? ¿Cuáles son nuestras opciones? ¿Tenemos un plan? ¿Estamos progresando, o deberíamos reconsiderar lo que estamos haciendo? ¿Por qué creemos que esto es verdad?,* etc. con el fin de dirigir los estudiantes por el "camino correcto".

Estrategias

Charles y Lester (1982, en Sigarreta y Laborde (s.f.), p. 16) plantean comprender la resolución de problemas como "el proceso de coordinación de la experiencia previa, conocimientos e intuición, y un intento de determinar un método para resolver una situación cuyo resultado nos es desconocido". Revisando este proceso, se hicieron evidentes las estrategias que utilizaron los estudiantes en la resolución de los problemas que mostraremos en esta investigación. La importancia de las estrategias fue determinada por aquellos recursos cognitivos utilizados por el estudiante al enfrentarse a la resolución de problemas. Los principios y estándares del NCTM (2003) destacan que:

> "De las muchas descripciones de estrategias para resolver problemas, una de las más conocidas puede encontrarse en el trabajo de Polya (1957). Estas estrategias, frecuentemente citadas, incluyen: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear un problema más sencillo".

Los profesores de matemáticas constatan que los estudiantes hacen uso de una variedad de procedimientos para resolver las diferentes tareas de aprendizaje; estos pueden ser de dos tipos: procedimientos algorítmicos y procedimientos heurísticos. Siendo estos últimos más abiertos y formados por operaciones más alternativas, que involucran la consciencia y el control con que se realicen; mientras que los primeros son más cerrados y están formados por operaciones prefijadas.

En este estudio las estrategias son concebidas como "un proceso de toma de decisiones, consciente e intencional, que consiste en seleccionar los conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales, necesarios para alcanzar un determinado objetivo, siempre en función de las condiciones de la situación en que se produce la acción" (Monereo, 2001).

Uso de tecnología (GeoGebra)

Debemos tener claro que el uso de la tecnología en las clases depende del profesor ya que, como cualquier herramienta, puede ser usada bien o deficientemente. Los Principios y Estándares para la Educación Matemática señalan que las herramientas tecnológicas son esenciales para aprender, hacer y enseñar matemáticas. Siendo el profesor quien guie al estudiante a reflexionar, razonar, tomar decisiones y resolver problemas en áreas temáticas como la Geometría, Estadística, Álgebra, Medida y Números.

El uso de la tecnología, y en nuestro caso particular de GeoGebra, permitió modelar una amplia gama de situaciones interesantes donde ellos pudieron conjeturar a partir de una visualización y razonamiento espacial, fruto de la interacción con animaciones. Podemos afirmar que el uso de las tecnologías y la resolución de problemas constituyen dos elementos que transforman el salón de clases en un espacio donde prima el razonamiento matemático alrededor de la variación y autonomía de los estudiantes orientada por los saberes que les permita avanzar en el proceso de aprendizaje para consolidar su proceso y facilitar el desarrollo del pensamiento variacional. Además, “el empleo de herramientas computacionales en la resolución de problemas no solamente puede facilitar la implementación de estrategias, sino también potenciar o extender el repertorio de las heurísticas” (Santos-Trigo, 2008).

Modelo ckc

Dado que se realizó un análisis de las concepciones que usan los estudiantes cuando resuelven problemas con el uso de la tecnología, se trabajó con el modelo ckc, que es una herramienta metodológica propuesta por Balacheff para el análisis de los conocimientos que movilizan los estudiantes en la resolución de un problema. De ahí la importancia de estudiar las concepciones durante el proceso de identificar las estrategias, pues las concepciones se yuxtaponen a estas. Este modelo analiza cuatro componentes que se imponen cuando se quiere evidenciar una concepción y que son suficientes para caracterizarla: Un conjunto de problemas, un conjunto de operadores, un sistema de representación y una estructura de control.

Un operador es lo que permite la transformación de los problemas, son visibles en las producciones y los comportamientos de los estudiantes y legitiman el paso entre datos y la conclusión y se explicitan a menudo en la forma “si…entonces”.

Un sistema de representación (lingüísticas o no) permite la expresión de los problemas y de los operadores. Las modalidades de representación presentan una gran diversidad: representaciones lingüísticas y no lingüísticas, eventualmente constituidas en registros semióticos. Las representaciones permiten la expresión de los controles, de las acciones y de los problemas, para la anticipación y la validación. En efecto, la caracterización de la concepción pasa necesariamente por la de un sistema de representación, o incluso de un registro semiótico.

Una *estructura de control* da y organiza las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción. La estructura de control asegura la no contradicción de la concepción y contiene las herramientas de decisión sobre la legitimidad del empleo de un operador o sobre el estado (solucionado o no) de un problema. Los controles reúnen juicios, decisiones, medios de elección, métodos, estructuras y organización de los operadores. Permiten las anticipaciones y la posible construcción de planes. Dos dificultades teóricas y metodológicas acompañan a toda consideración de controles: i) Los controles son generalmente implícitos; ii) la distinción entre controles y operadores no es absoluta sino relativa a una concepción (Balacheff, 2005).

Para efectos de esta investigación, no se analizaron los problemas que se resuelven con la concepción. Por lo tanto, la caracterización de la concepción para este trabajo corresponde a la tripleta (R, L, Σ) ya que el interés está en aportar al conocimiento de estrategias y concepciones que emplean los estudiantes al resolver problemas propios de curso de pre-cálculo de la UIS. Queremos enfatizar, para finalizar, en que la concepción es el componente que subyace a la estrategia.

Proceso metodológico

Como se mencionó, la investigación desarrollada fue de tipo descriptivo-exploratoria enmarcada en una lógica cualitativa cuyo interés fue conocer las estrategias que emplearon los estudiantes en la resolución de problemas, de ahí su diseño emergente. La muestra seleccionada para la recolección de datos fue un curso de 30 estudiantes quienes ingresaban a diferentes carreras de ingenierías y de la Facultad de Ciencias de la UIS en el segundo semestre de 2013.

Para recolectar los datos se realizó acompañamiento en cada una de las 15 sesiones de trabajo correspondientes al curso, de las cuales se tomaron dos sesiones para ser analizadas: "Análisis de Información" por ser una de las primeras sesiones que trabajaron los estudiantes y en la cual se estaban adaptando a la metodología de trabajo y "La Derivada como Razón de Cambio", que por ser una de las últimas sesiones trabajadas, posiblemente, nos mostraría avances en la resolución de los problemas planteados en los talleres. Estas sesiones fueron filmadas, se recogieron los apuntes de algunos estudiantes (la solución de los talleres) y adicionalmente a esto se tomaron algunas notas en una libreta de campo, todo esto para extraer evidencias que soportaran el análisis que apunta al objetivo de la investigación.

Posterior a esto, se analizaron los datos sistematizados realizando una triangulación entre los datos recolectados, el marco conceptual y la interpretación del investigador para dejar a la luz las concepciones utilizadas por los estudiantes en las estrategias empleadas en la resolución de los problemas del curso de pre-cálculo.

Resolución de problemas, concepciones y estrategias

Para favorecer la comprensión de lo que se presentará, se debe tener en cuenta que el análisis se articula desde la transcripción de las conversaciones del profesor-estudiante o investigador-estudiante en los momentos donde se evidencia la estrategia, se sintetizan los elementos de la concepción según el modelo ckc en una tabla y se explica la estrategia que es utilizada. Todo esto acompañado de la integración de los elementos del marco conceptual y la interpretación de investigador que permitieron dar conclusiones al final de cada grupo de estrategias descritas para una misma situación. Dentro de las transcripciones de los diálogos se estilaron en cursiva las aclaraciones pertinentes para entender mejor al estudiantes.

Presentaremos dos estrategias que sirven de ejemplo para la Situación 2 del Taller "Análisis de Información" en la cual los estudiantes debían identificar el modelo que mejor se ajusta a la situación.

La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros, de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

Tabla 1: Rendimiento Toyota Corolla

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0.14	0.21	0.31	0.46	0.55	0.64	0.78	0.83	0.99	1.10	1.20	1.33	1.43	1.52	1.67

Contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo. Justifica tu respuesta.

1. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico?
2. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 20 km en hora pico?
3. Realice un gráfico con la información suministrada en la tabla 1.
4. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer x km en hora pico?

Figura 1. Situación problema del taller.

Estrategia sin el uso de GeoGebra

Esta estrategia se caracteriza por el razonamiento cuantitativo sobre el consumo verificando el incremento entre un dato y el siguiente.

[1] Inv: ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico? ¿Y cuánto para 20 km?

[2] Inv: Cuénteme qué está haciendo ahí, qué es esto *[señalándole al estudiante lo que está escribiendo en su hoja]*

[3] Est: Es la diferencia que hay entre los litros, respectivo a los kilómetros, por ejemplo de 1 a 2 km, cuantos litros de gasolina ha consumido el vehículo (Ilustración 3)

[4] Inv: ¿Por qué está hallando la diferencia entre los consumos de combustible?

[5] Est: Es que quería saber si el consumo era igual y sumarle eso hasta llegar a 17 y 20 *[señalando el último dato de la tabla de datos]*, pero noto que consume no en modo constante, si no discontinuo y así cómo puedo saber cuánto aumentaría [Está diciendo que Δy no es constante si no variable].

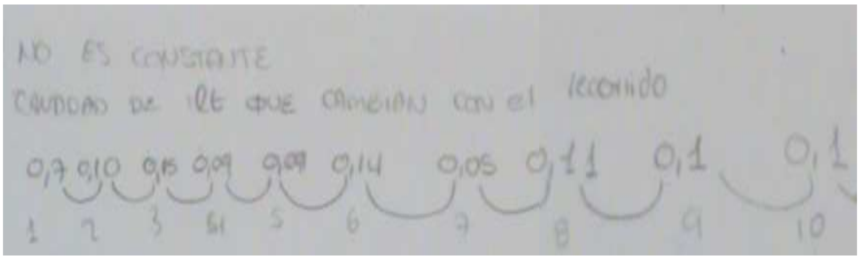

Figura 2. Operador.

[6] Inv: Me dice que no es continuo el gasto, ¿a qué se refiere con eso?

[7] Est: Pues, para el primer km gastó 0.14 litros de gasolina, después de haber hecho 2 km el gasto es de 0.21 pero ya al tercer km gasta 0.31 o sea ya gasta 10 litros más respecto al principio y por ejemplo cuando recorre 10 km gasta 0,1 litros respecto a los primeros km, pero si usted mira siempre recorre 1 km, pero como le decía no consume siempre en modo continua así que no sé qué hacer para 17 y 20 (Figura 2).

Tabla 1

Concepción

OPERADORES	**SISTEMA DE REPRESENTACIÓN**	**ESTRUCTURA DE CONTROL**
R_1: Hallar la diferencia del consumo, Δy (Ilustración 3) [3], [5], [7] R_2: Sí $\Delta x = k \implies \Delta y = k_1$, con k, k_1 constantes [5]	L_1: Esquema-Numérico [7] (Ilustración 3)	Σ_1: Numérico: Δy no es constantes [7]
Concepción: Proporcionalidad directa		

La estrategia consiste en verificar si el aumento entre los consumos del combustible son constantes para tomar el último dato de la tabla, correspondiente al consumo para 15 km, y sumarle este valor hasta encontrar el consumo correspondiente para 17 km y 20 km.

El estudiante percibe que la diferencia entre los kilómetros recorridos es constante ($\Delta x = 1$), y espera que la diferencia entre el consumo de combustible (Δy) también lo sea (R_2), por esto halla varios Δy (R_1) para así poder verificar su conjetura (Σ_1). El estudiante hace uso de su razonamiento covariacional al analizar la variación a través de las diferencias. El sistema de representación es un esquema numérico en el que resalta el consumo de combustible de un kilómetro a otro (L_1). Este esquema le sirve para ejercer el control a su concepción y como no obtiene los resultados esperados abandona la estrategia.

Estrategia utilizando GeoGebra

En esta estrategia el estudiante usa GeoGebra para elaborar y darle una representación a la misma de la situación trabajada.

[1] Inv: ¿Cuál curva es la que mejor se ajusta a los puntos y que me permitirá predecir el consumo de combustible cuando se han recorrido 17 y 20 km?

[2] Est: Pues yo estoy haciendo una recta que pase por lo puntos 2 y 3 (Figura 3), que es la como hizo la compañera antes, porque si hago la que pasa por 1 y 2 tocaría empezar con 1 y mire lo que pasa, *[la estudiante está observando el monitor y ve que la recta que ella escogió pasa más cerca a los demás puntos, lo que no sucede si escoge la otra recta (que pasa por el primer y el segundo punto) ya que esta se aleja de los demás puntos]*

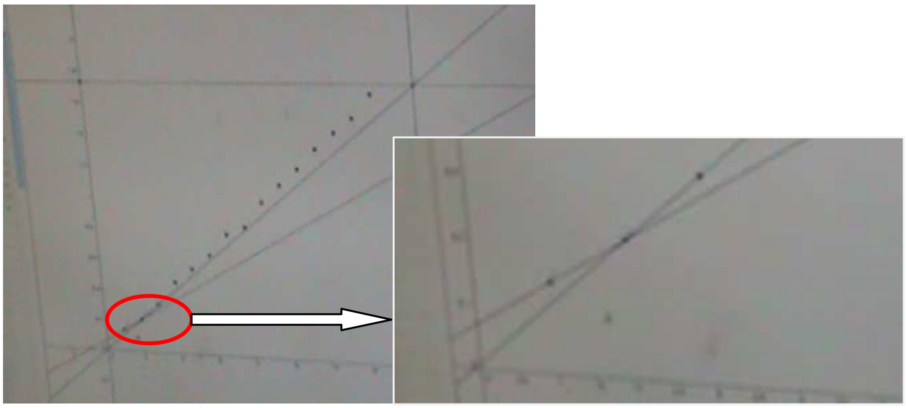

Figura 3. Operadores $\boldsymbol{R_1}$ *y* $\boldsymbol{R_2}$

[3] Inv: ¿Qué espera de la recta que está construyendo?

[4] Est: Que la recta pase por estos dos puntos *[señalando con el dedo los puntos en la pantalla del computador], por eso la construí pasando por estos dos puntos, el dos y el tres.*

[5] Inv: ¿Por qué una recta que pase exactamente por esos puntos?

[6] Est: Porque los ejercicios que habíamos hecho anteriormente los habíamos hecho a partir de esos dos puntos, así hallamos la pendiente y el punto de corte.

[7] Inv: ¿Con esta recta cómo halla el valor del consumo del combustible para 17 y 20 km?

[8] Est: Pues sería mirar acá para 17 cuánto me da el valor de la recta.

[9] Inv: ¿Cómo lo haría?

[10] Est: Trazo una recta vertical por acá y miro cuando se encuentre con esta. *[El estudiante hace una recta que pasé por* $x = 17$ *pero la ubica a ojo y busca donde se corta con la recta que había hecho antes]* O sea busco el punto de intersección y miro cuál es la coordenada en y (Figura 3).

Tabla 2

Concepción

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Recta que pasa por el segundo y el tercer punto [2]. R_2: Punto de intersección entre la recta inicial R_1 y la recta $x = 17$ [10]	L_1: Geométrico	Σ_1: Analítico: intersección de dos rectas.
Concepción: Intersección entre las rectas R_1 y $x = 17$		

El estudiante construye en GeoGebra la recta que pasa por dos de los quince puntos suministrados en la tabla de datos [$P = (2, 0.21)$ y $Q = (3, 0.31)$] y que resultan graficados en el plano cartesiano (R_1). Después busca el valor del consumo cuando se han recorrido 17 km, hallando la intercepción entre la recta de ajuste y la recta que pasa por $x = 17$ (R_2), evidenciado nociones analíticas que son la base para articular su estrategia. .

El sistema de representación que moviliza la estrategia es geométrico ya que en el procedimiento se utiliza GeoGebra (L_1) y, como se puede percibir, esto es suficiente para que el estudiante se convenza de lo que hace, ya que logra darle solución al problema de predecir el consumo del combustible, hallando la intercepción entre la recta construida (la hace pasar por dos puntos) y la recta que pasa por $x = 17$ (Σ_1).

Resultados

Para el taller "Análisis de Información" se identificaron 13 estrategias y las respectivas concepciones que los estudiantes emplearon en la resolución de problemas planteados en la actividad. En el taller "La Derivada como Razón de Cambio" se identificaron 12 estrategias y las concepciones empleadas.

Al utilizar el modelo ckc para analizar las concepciones utilizadas en las estrategias, se percibe que estas junto con las habilidades de los estudiantes son fundamentales en la resolución de problemas. A través del análisis de las actuaciones de los estudiantes se corroboró que las estrategias que ellos emplean en la resolución de problemas están influenciadas por la veracidad de las concepciones que poseen. En las estrategias halladas, se observó que hubo algunas permitieron la solución acertada del problema y otras que no, todo gracias a la validez, coherencia y eficacia de la concepción utilizada, por lo tanto si los estudiantes tienen concepciones erradas o muy lejos de lo que son los conocimientos matemáticos, tienen menos posibilidades de resolver los problemas.

Del estudio de las estrategias evidenciadas en el análisis de los talleres del curso de pre-cálculo, se puede afirmar que algunos estudiantes siguieron las etapas del marco metodológico propuesto por Fiallo y Parada (2014) al incorporar el uso de GeoGebra, ya que inicialmente problematizaban la situación, esto los llevaba a realizar una exploración del problema, posteriormente buscaron métodos de solución para luego reflexionar sobre la estrategia, esto con la orientación del profesor y la participación del estudiante en el proceso de socialización realizado.

Gracias a la interacción entre pares, estudiante-profesor, estudiante-investigador fue posible identificar las estrategias de los estudiantes. Esto resalta, como lo fundamental de un aula participativa en la cual se construya el pensamiento matemático a partir de la resolución de problemas.

Bibliografía

Artigue, M. (2003). "¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?". *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *X*(2). Recuperado de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf

Aparicio, E. (2006). Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y eficiencia terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: el caso de la facultad de matemáticas de la universidad autónoma de Yucatán. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME19)*. Recuperado de http://www.clame.org.mx/documentos/alme19.pdf

Balacheff, N. (2005). Marco, registro y concepción. *Revista Ema*, *9*, 181-204. Recuperado por http://funes.uniandes.edu.co/1498/1/116_Balacheff2005Marco_RevEMA.pdf

Botello, C. (2013). *Procesos de Seguimiento y Acompañamiento Académico a Estudiantes de Cálculo Diferencial: Un Aula Experimental para Profesores de Matemáticas en Formación* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Industrial de Santander, Colombia.

De Guzmán, M. (1994). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. España. Disponible en:http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras#3.5.

Fiallo, J., & Parada, S, (2014). *Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional*. Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas.* Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Variacional y Tegnologías Computacionales*. Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda.

Monereo, C. (2001). Estrategias de Aprendizaje. *Revista Letras de Deusto, 91*(31). Abril-Junio. Bilbao (España): Universidad de Deusto.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Parada, S. (2012). *Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander* (Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas). Bucaramanga, Colombia: UIS.

Santos-Trigo, L. (2008) *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica*. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

Salinas, P., & Alanís, J. A. (2009).Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Relime*, *12*(3), Noviembre. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n3/v12n3a4.pdf

Sigarreta, J., & Laborde, J. (s.f.). Estrategia para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural. *Sociedad Argentina de Educación Matemática*. Recuperado el 10 de marzo de 2014, disponible en: http://www.soarem.org.ar/Documentos/20%20Sigarreta.pdf

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis, 3,* 9-25.