



O software GrafEq e os registros de representação semiótica: uma análise de trabalhos com ilusão de ótica

Márcia Notare

Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Brasil

marcia.notare@gmail.com

Leandra Anversa **Fioreze**

Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

leandra.fioreze@gmail.com

Fabício Fernando **Halberstadt**

Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

ffhmatematica@gmail.com

Resumo

Este artigo tem como propósito analisar, a partir dos registros de representação semiótica de Duval, as construções de imagens de ilusão de ótica no GrafEq com o uso de parâmetros. Foram analisadas as produções de alunos (estes em sua maioria, professores de matemática) em uma das atividades da disciplina de Mídias Digitais II, do Curso de Especialização em Matemática, Mídias e Didática: Tripé para Formação do Professor de Matemática, da UFRGS. Utilizamos esta teoria, devido à importância das representações semióticas na aprendizagem da matemática, em especial para os conceitos da geometria analítica. Nesse sentido, o GrafEq consiste em uma interessante alternativa pedagógica, pois apresenta um bom potencial semiótico ao permitir a manipulação simultânea dos seus registros algébrico e gráfico. A partir da análise das produções dos alunos e dos relatórios entregues, percebemos que esta atividade proporcionou aos alunos um momento de mobilização para a compreensão das relações matemáticas utilizadas.

Palavras chave: semiótica, GrafEq, aprendizagem, equações e inequações, ilusão de ótica.

Introdução

O Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática: Tripé para Formação do Professor de Matemática, é oferecido pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS na modalidade à distância. Este curso tem como propósito a atualização dos conhecimentos dos professores de Matemática, especialmente quanto ao uso das mídias digitais no processo de ensino e aprendizagem. O curso caracteriza-se pela articulação entre conhecimento matemático, tecnologia e prática pedagógica.

O curso está em sua segunda edição e foi ofertado para seis cidades polos do estado do Rio Grande do Sul – Brasil, totalizando cento e oitenta vagas, destinadas a professores de matemática dos níveis de ensino fundamental e médio.

Uma das disciplinas deste curso, Mídias Digitais II, do qual parte dos autores deste artigo atua como professores formadores e conteudistas, teve como objetivo discutir o uso de vídeos nas aulas de Matemática e a abordagem de conceitos de geometria analítica com a utilização de mídias digitais. A disciplina foi organizada nos seguintes módulos: Módulo I – O uso de vídeos no ensino de Matemática; Módulo II – Construção de obras de arte com o uso do GrafEq, sendo que estas obras apresentam uma riqueza de elementos geométricos, com relações matemáticas que representam segmentos de retas de inclinações variáveis; Módulo III – Construção de imagens de ilusão de ótica, a partir do uso de parâmetros no GrafEq; Módulo IV - Construção de superfícies de revolução no software Winplot e no objeto de aprendizagem Gira; Módulo V – Planejamento de uma proposta de ensino com a utilização de recursos digitais, implementação da proposta e descrição e análise dos resultados.

Daremos ênfase, neste artigo, ao Módulo III – construção de imagens de ilusão de ótica a partir do uso de parâmetros. Neste caso, analisamos as construções dos alunos do curso (em sua maioria, professores de matemática da educação básica do interior do estado do Rio Grande do Sul) sob o olhar da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2009, 2006). Utilizamos esta teoria, pois sabemos da importância das representações semióticas na aprendizagem da Matemática, em especial para a aprendizagem de conceitos da geometria analítica, suas equações e suas respectivas representações gráficas, sendo que a mobilização de diferentes representações semióticas é condição fundamental para a compreensão de um conceito matemático. Com isso, o uso do *software* GrafEq no ensino da Matemática pode consistir em uma interessante alternativa pedagógica, pois apresenta um bom potencial semiótico, ao permitir a manipulação simultânea dos seus registros algébrico e gráfico.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: no próximo item, apresentamos a temática “Ilusão de Ótica”. Na sequência, tecemos considerações sobre a Semiótica e o papel dos softwares voltados para o ensino e aprendizagem da Matemática e, em especial, o potencial semiótico do GrafEq. Por fim, apresentamos a atividade proposta no curso de especialização, bem como os sujeitos da pesquisa, seguido da análise das produções dos alunos sob o olhar da semiótica.

Ilusões de Ótica

Malba Tahan, em seu livro “As maravilhas da matemática”, no capítulo 8, aborda ilusões de ótica, sob o título “As aparências que enganam”. O autor, citando John Newman, reconhece que este tema não é específico da matemática, pois nosso raciocínio poderá interferir nas ilusões

de ótica que deturpam a visão natural das coisas, porém reconhece que o assunto é de alto interesse para a geometria.

Segundo Leivas (2013), ilusões óticas e Matemática sempre andaram juntas com as Artes. A história ilustra muitas situações nas quais a ciência auxiliou os artistas em suas obras que geram imagens dúbias. “Entretanto, na área artística, o termo utilizado é anamorfose, oriundo do grego, significando “sem forma”. Com essa técnica, podem ser produzidas tais imagens, as quais podem ser apoiadas na perspectiva matemática”.

Conforme o autor, as anamorfose são imagens distorcidas que, dependendo do ponto onde o observador se encontra, ou por meio de objetos refletores, aparecem reconstituídas aos nossos olhos.

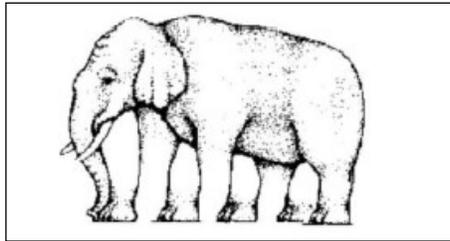


Figura 1. Quantas pernas tem o elefante?

Fonte: Ilusiones visuales. Recuperado em 29 setembro, 20014, de http://iesmjuncalero.juntaextremadura.net/archivos_insti

Observe, na Figura 1, que dependendo do ponto de vista do observador, teremos uma dualidade na interpretação do número de pernas do elefante. Uns dirão que nesta imagem há quatro pernas, pois é um mamífero, e outros, acompanhando a tromba do elefante pelo lado direito, dirão que há seis pernas.

É interessante perceber que o controle das construções geométricas de muitas imagens pode comprovar que se tratam apenas de ilusões. Vamos observar as imagens ilustradas na Figura 2.

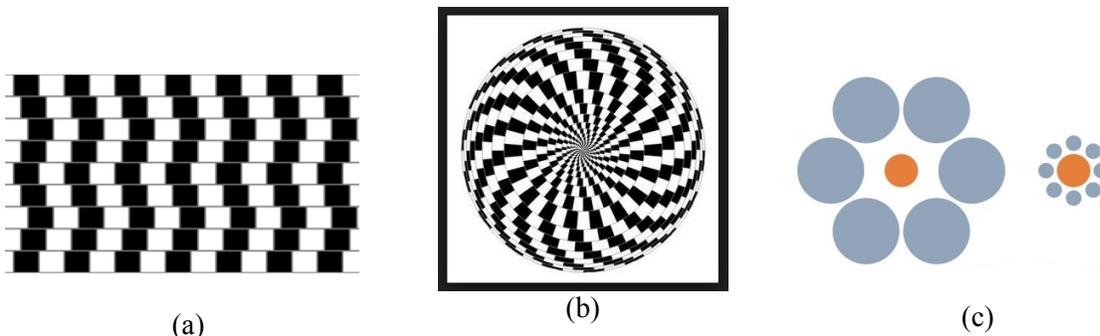


Figura 2. Imagens de Ilusão de Ótica.

Fonte: Hype Science. Recuperado em 29 setembro, 20014, de <http://hypescience.com/incriveis-ilusoes-de-otica>

Na Figura 2 (a), temos a ilusão de que as linhas horizontais não são paralelas. As curvas que observamos em (b) parecem espirais, porém, na realidade, são circunferências concêntricas. Na Ilusão de Ebbinghaus (c), temos a ilusão de que o círculo central da esquerda é menor que o círculo central da direita, porém ambos os círculos possuem raios de mesma medida. Ao realizar a construção destas imagens com o GrafEq ou outro software, podemos verificar, de fato, que se trata de uma ilusão de ótica.

Conforme Leivas (2013), geralmente, as imagens de ilusão de ótica despertam o interesse e servem para explorar os diversos olhares que se pode ter, conduzindo a debates sobre os significados que uns e outros atribuem a estas imagens.

O software GrafEq e os registros de representação semiótica

Atualmente, temos à nossa disposição diferentes recursos digitais, que nos possibilitam tratar o processo de aprendizagem de matemática de forma mais dinâmica e interativa. Muitos destes recursos permitem a elaboração de atividades nas quais as estratégias para sua resolução impulsionam ao entendimento global de conceitos matemáticos, que muitas vezes são compreendidos pelos alunos de forma restrita, em situações limitadas e focadas em manipulações algébricas repetitivas.

Os registros de representação semiótica tem papel fundamental na aprendizagem de conceitos matemáticos. Um sistema de representação semiótica pode ser considerado como um conjunto de signos expressos por meio da fala, da escrita e do desenho, associado a um conjunto de regras de produção e de organização destes signos, que estabelecem o fluir do discurso e a um conjunto de relações entre signos e seus significados.

Para Duval (2009), os sistemas de representação semiótica tem importante papel no processo de aprendizagem da matemática. Os objetos matemáticos, em geral, são expressos por meio de diferentes registros, tais como o registro algébrico com suas regras de funcionamento, o registro gráfico, com regras de tratamento que levam à identificação dos elementos pertinentes de uma figura e, dentro deste registro, inclui-se o de natureza gráfica, dado por sistema de coordenadas cartesianas e curvas que nele são traçadas, o registro discursivo em linguagem natural, e também com símbolos, com suas regras convencionais de comunicação.

A teoria de Duval (2009) traz a ideia de transformação de registros. Esta ideia explicita o quanto a atividade matemática consiste, essencialmente, de transformações sobre as representações. As transformações desdobram-se em dois tipos: tratamentos, caso em que elas acontecem dentro de um mesmo registro; e conversões, caso em que as transformações transitam entre dois diferentes registros. No processo de aprendizagem da matemática, Duval destaca que nas conversões, muito mais do que nos tratamentos, encontram-se as maiores dificuldades.

Halberstadt & Fioreze (2014) salientam que a conversão não se esgota em mudar de registro de representação semiótica. Diferentes registros de um objeto matemático podem evidenciar propriedades ou aspectos desse mesmo objeto, ou seja, as representações semióticas de um mesmo objeto não possuem o mesmo conteúdo. Daí a necessidade de haver a coordenação de ao menos dois tipos de registros de representações semióticas para que os objetos matemáticos não se confundam com as próprias representações.

Conforme Notare & Gravina (2013), o GrafEq¹ é um software que permite a construção de gráficos e regiões do plano a partir de equações implícitas ou inequações. Sua interface possibilita o trabalho simultâneo nos registros algébrico e gráfico, que pode ajudar na aprendizagem das equações e relações envolvendo as coordenadas (x, y) de pontos no plano.

Na área de trabalho do GrafEq, tem-se duas janelas: uma delas para registro algébrico e outra para o registro gráfico. Diferentes registros algébricos convertem-se em formas geométricas, em uma mesma janela gráfica do software, conforme ilustra a Figura 3.

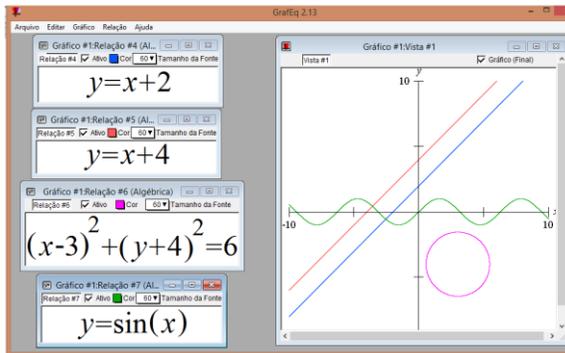


Figura 3. Interface do GrafEq.
Fonte: Ilustração dos autores.

Um recurso interessante do GrafEq é a possibilidade de trabalhar com equações com parâmetros. É possível trabalhar, de forma simultânea, com os registros algébricos e gráficos de famílias de curvas. A Figura 4 ilustra este recurso: em (a), podemos verificar na janela algébrica o parâmetro a admitindo os valores 1, 2 e 3, que produzem na janela gráfica três curvas, uma para cada valor de a , que representam o movimento de dilatação/compressão vertical; em (b), podemos verificar na janela algébrica o parâmetro b admitindo os valores -1, 0, 1, 2 e 3, que produzem na janela gráfica cinco curvas que representam o movimento de translação vertical.

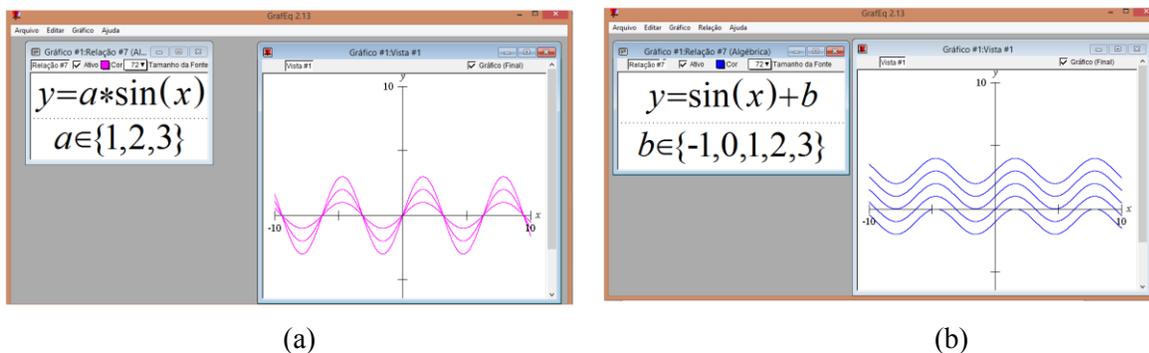


Figura 4. Família de curvas construídas a partir de parâmetros no GrafEq.
Fonte: Ilustração dos autores.

O uso de parâmetros, no GrafEq, pode tornar mais evidente a relação entre a equação algébrica e os efeitos de dilatação e/ou translação aplicados às relações algébricas. Este

¹ <http://www.peda.com/grafeq/>

tratamento da equação, via variedade de transformações a partir do uso de parâmetros, pode proporcionar situações que levem o aluno ao entendimento global da relação entre as coordenadas dos pontos que pertencem à curva.

O GrafEq também permite a representação de regiões no plano por meio de inequações. A intersecção de regiões é produzida a partir da inclusão de diferentes relações de desigualdade em uma mesma janela algébrica do GrafEq. A Figura 5 ilustra este processo.

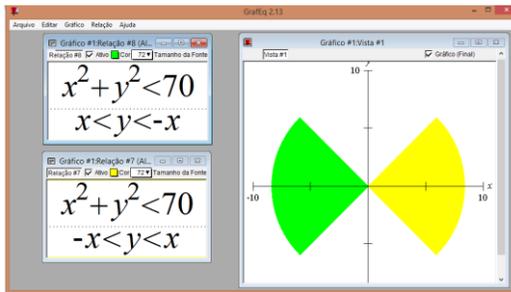
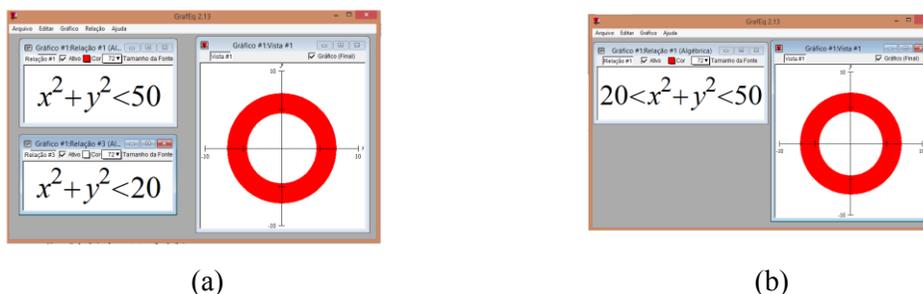


Figura 5. Intersecção de regiões no plano por meio de relações de desigualdades.

Fonte: Ilustração dos autores.

Neste caso, o potencial do software está na necessidade do entendimento de uma forma geométrica como sendo a intersecção de conjuntos soluções de diferentes inequações. Em experiências vivenciadas com alunos, muitas vezes, percebemos o estabelecimento de conflitos cognitivos frente à aparente não resposta do software ao desenho de forma resultante de intersecções de conjuntos – é o caso em que os alunos não entendem de imediato, que a intersecção solicitada via desigualdades algébricas é um conjunto vazio e que, portanto, o software está respondendo de forma adequada.

Na construção de formas geométricas a partir de inequações, é possível perceber raciocínios algébricos mais ou menos estruturados. Por exemplo, se na construção de regiões do plano é colocada a exigência de não haver sobreposição de formas, na janela de álgebra é preciso fazer intersecção de regiões. Para ilustrar o que estamos falando, podemos observar na Figura 6 duas formas de obter um mesmo anel circular: em (a) tem-se duas janelas de álgebra, uma para o círculo vermelho e a outra para círculo branco que é sobreposto ao vermelho; em (b) tem-se uma única janela de álgebra, resultado de raciocínio que usa maior estruturação algébrica.



(a)

(b)

Figura 6. Anel circular e estruturação algébrica.

Fonte: Ilustração dos autores.

Ainda com o uso de parâmetros, é possível obter a união de regiões do plano em uma única janela de álgebra. Na Figura 7, temos um exemplo simples: uma coleção de retângulos. O potencial deste recurso está na possibilidade de desenvolvimento de raciocínio generalizador a partir da utilização de parâmetros via registro algébrico.

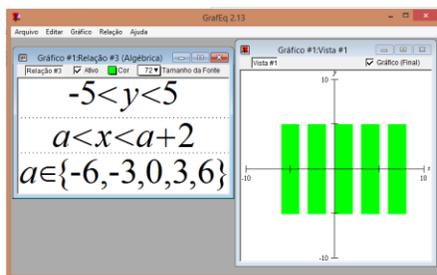


Figura 7. União de regiões no plano por meio do uso de parâmetros.
Fonte: Ilustração dos autores.

Dessa forma, podemos dizer que o GrafEq apresenta-se como um recurso interessante para trabalhar gráficos e suas respectivas relações algébricas com os alunos, provocando o desenvolvimento de habilidades em operar tanto no registro algébrico, quanto no registro gráfico.

A disciplina Mídias Digitais II e as atividades planejadas

Conforme dito anteriormente, uma das disciplinas do curso de especialização Matemática – Mídias Digitais – Didática: tripé para Formação do Professor de Matemática denomina-se Mídias Digitais II.

Os recursos digitais enfocados na disciplina foram: vídeos, GeoGebra, GrafEq e Winplot. Para cada mídia apresentada aos alunos, atividades são planejadas, tendo em vista o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos da educação básica, além da aprendizagem do *software* em si. Para tal, foi desenvolvido um website da disciplina², o qual foi organizado em cinco módulos. Cada módulo foi estruturado de forma a conter os seguintes menus: Apresentação, Conteúdos, Atividades, Recursos e Complementos. No menu Apresentação, trazemos a ideia e o objetivo geral do módulo; o menu Conteúdos apresenta os conteúdos matemáticos abordados nas atividades do módulo; o menu Atividades traz as atividades propostas; em Recursos, apresentamos o suporte necessário para que o aluno utilize o recurso digital abordado no módulo; no menu Complementos, procuramos trazer atividades, leituras ou recursos complementares ao tema abordado no módulo. O material desenvolvido apresenta animações, tutoriais e vídeos que explicam os principais recursos de cada mídia abordada, buscando dar o suporte necessário ao aluno à distância.

A atividade relatada neste artigo foi desenvolvida no segundo semestre de 2014. A atividade proposta consistia em construir no GrafEq uma imagem de ilusão de ótica a partir de relações matemáticas, caracterizada pela repetição de padrões, utilizando um número mínimo de relações com o uso de parâmetros. Além disso, solicitou-se aos discentes do curso que elaborassem um texto no qual descrevessem as etapas da sua construção, o raciocínio utilizado e

² http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II_2014/

as principais dificuldades encontradas nesse processo. A Figura 8 ilustra esta atividade.

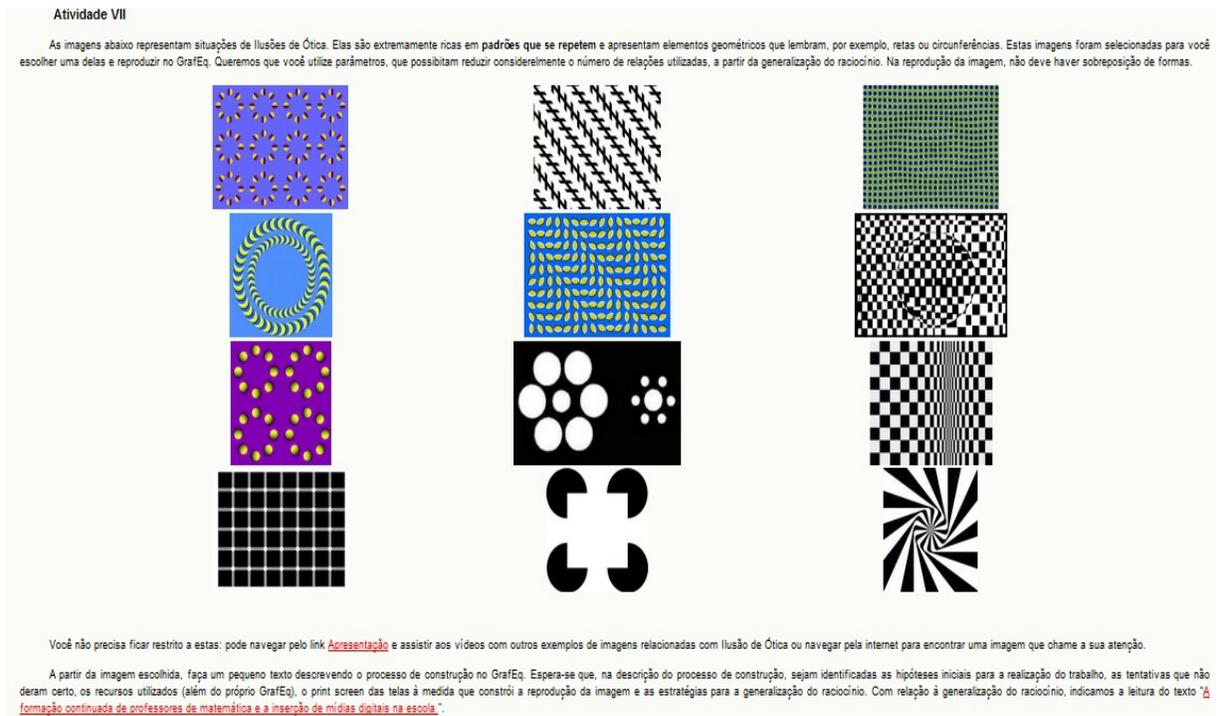


Figura 8. Atividade proposta no módulo III – Ilusões de Ótica.

Fonte: Ilustração dos autores.

O uso de vídeos permeou todas as atividades planejadas, pois acreditamos no seu potencial pedagógico, sendo que geralmente trazem algo de novo para a sala de aula e instigam a curiosidade dos alunos, ou por serem divertidos e atraentes, ou por trazerem boas animações, que ajudam a esclarecer determinados conceitos. Embasamos nossas ações tomando como referência textos que tratam do ponto de vista pedagógico o uso de vídeos na sala de aula, como Moran (1995) e Arroio e Giordan (2006).

Foram entregues um total de oitenta e oito trabalhos. Nestes, foram identificadas dez imagens de ilusões de ótica diferentes. No processo de análise e avaliação destes trabalhos, consideramos elementos como: a reprodução da imagem de ilusão de ótica busca ser fiel à original, com relações matemáticas que apresentam, por exemplo, segmentos de retas ou circunferências; a reprodução da imagem de ilusão de ótica utiliza parâmetros para reproduzir padrões que se repetem, estabelecendo um número mínimo de relações a partir de raciocínios generalizadores; a reprodução da imagem de ilusão de ótica evita a sobreposição de formas, recorrendo à intersecção de curvas para determinar as regiões do plano; no texto elaborado, o aluno expressa detalhadamente o processo de construção da imagem de ilusão de ótica. Dos trabalhos entregues, percebemos que trinta e sete trabalhos atenderam a todos os elementos explicitados acima; trinta e seis trabalhos atenderam a quase todos estes elementos; apenas quinze trabalhos apresentaram uma construção mais precária. Esse cenário evidencia que a grande maioria dos alunos se empenhou em realizar um bom trabalho, ao verificarmos que setenta e três trabalhos foram bem avaliados.

A ilusão de ótica que foi escolhida pelo maior número de alunos (22) foi o Quadrado de

Kanizsa:

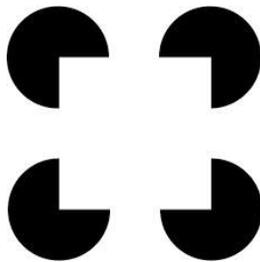


Figura 9. Ilusão de ótica escolhida.

Fonte: A natureza da inteligência. Recuperado em 29 setembro, 2014, de <http://www.intelliwise.com.br/digital/natinta/natinta9.asp>

Infere-se que a escolha se deve por aparentemente ser uma das mais simples de ser construída. Verifica-se que todos, à exceção de um aluno, conseguiram construir a sua versão para a ilusão de ótica. A maioria realizou a construção a partir da plotagem dos quatro círculos pretos, sem que lhe fosse subtraída o quarto de área correspondente. Em seguida, plotaram sobre esses círculos um quadrado branco de vértices nos centros dos círculos pretos. A Figura 10 ilustra uma destas situações.

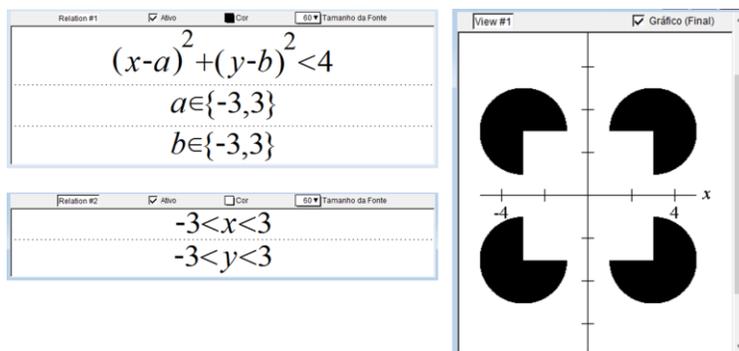


Figura 10. Ilusão de ótica escolhida.

Fonte: Produção dos alunos.

Construções como estas não seguiram as orientações da atividade, afinal uma das recomendações foi a não sobreposição de formas. Contudo, a partir dessa construção, observamos que por meio da utilização dos parâmetros a e b , o aluno generalizou em apenas uma relação matemática a posição relativa dos círculos.

Um aspecto que se observou em muitos dos relatórios apresentados pelos alunos, foi que a generalização resultou de um processo de várias tentativas. Segue a descrição do aluno A:

“Para sua reprodução foram muitas tentativas, inicialmente tentei criar cada circunferência separadamente, e então logo usei a dica do texto e criei as quatro ao mesmo tempo”.

Esse aspecto vai ao encontro com o que se esperava do GrafEq nessa atividade: proporcionar diferentes experimentações ao aluno e promover o pensar do aluno. O software contribuiu para a mobilização do aluno em busca da compreensão dos conceitos matemáticos

envolvidos na atividade.

Quatro alunos não usaram parâmetros algébricos de modo a reduzir o número de relações utilizadas nas suas construções. É interessante observar na descrição de um deles que mesmo observando a relação existente entre os círculos, o aluno não conseguiu expressar de que forma isso seria representado em uma única relação. Percebe-se que este aluno ainda está em processo de compreensão do efeito dos parâmetros na construção da figura, ou seja, ainda não possui um entendimento global deste conceito, pois, conforme Duval (2009, 2006), não controla as relações dos parâmetros nas equações e seus efeitos na representação geométrica.

O aluno B realizou uma interessante estratégia: o recurso *if*.

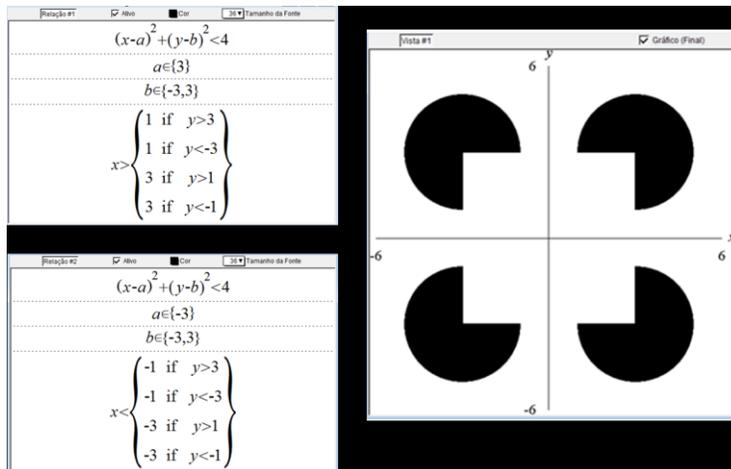


Figura 11. Ilusão de ótica escolhida e o recurso *if*.

Fonte: Produção dos alunos.

“[...] pensei numa maneira de construir somente os círculos da imagem, utilizando apenas uma relação. Minha primeira tentativa foi construir os quatro círculos com a mesma relação anterior e ainda utilizar o recurso *if*, disponível no software, para estabelecer a condição de existência dos círculos, inserindo uma restrição para valores de x . Esta tentativa, no entanto, não funcionou, pois dependendo da condição de existência utilizada, por vezes nenhuma região aparecia no gráfico, ou apareciam só dois círculos, ou a parte oculta do círculo não correspondia à imagem original. Foi então que optei por uma segunda tentativa, em que utilizei uma relação para cada par de círculos.”

Verificamos no registro escrito do aluno B que ele articulou os registros algébrico e gráfico (e vice-versa) dos círculos representados. À medida que introduzia relações algébricas no GrafEq e estas não geravam o resultado gráfico esperado, a partir do registro gráfico buscava adequar as relações algébricas, e assim sucessivamente. Com base nessa análise, podemos dizer que, sob a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, o aluno B estava convertendo esses dois registros, o que é essencial para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Outra ilusão de ótica escolhida foi a *Scintillating Grid Illusion*, na qual os círculos entre os quadrados pretos parecem piscar (Figura 12). Na verdade, são todos círculos brancos.

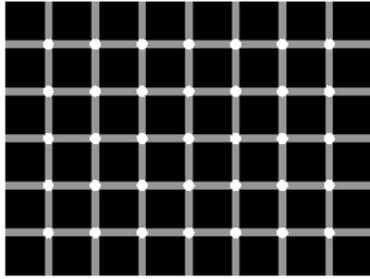
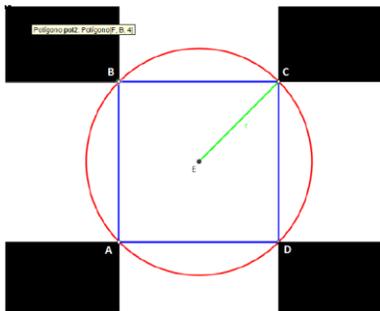


Figura 12. Ilusão de ótica escolhida.

Fonte: Produção dos alunos.

Seis alunos optaram em realizar essa construção. Todos conseguiram generalizar a suas versões em apenas duas relações algébricas do GrafEq. No relato do aluno C, observamos uma interessante descrição do processo para determinar qual seria o raio dos círculos.

De modo a não existir sobreposição de figuras, o raio do círculo deve ter dimensão igual à semidiagonal do quadrado ABCD, composto pelos quatro vértices dos quadrados adjacentes, conforme figura abaixo.



Sendo d a diagonal do quadrado e diâmetro do círculo e l o lado do quadrado temos:

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

Como $l=0,3$, então $d = 0,3\sqrt{2}$.

Sendo o quadrado ABCD de lado $0,3$, sua diagonal mede $0,3\sqrt{2}$, e sua semidiagonal, portanto, $0,15\sqrt{2}$.

Assim, verificamos no relatório do aluno C, que ao se defrontar com o desafio de determinar qual deveria ser a medida dos raios dos círculos, este necessitou converter as características do registro gráfico para o registro algébrico. Em seguida, realiza o necessário tratamento ao registro algébrico. Nesse sentido, podemos afirmar que a atividade proporcionou as duas formas de transformações de registros de representação semiótica: a conversão e o tratamento.

Vale ressaltar que muitos dos alunos utilizaram recursos adicionais para localizar as figuras geométricas no plano cartesiano como, por exemplo, inserir a imagem original da ilusão na

janela gráfica do software GeoGebra. Dessa forma, a versão da ilusão produzida pelos alunos foi mais fidedigna em relação à original.

Considerações Finais

Este artigo apresentou uma proposta de trabalho com o software GrafEq, que explora a construção de imagens de ilusão de ótica para desenvolver a compreensão das relações matemáticas e seus efeitos gráficos. Para o desenvolvimento desta proposta, optamos por trabalhar com a utilização de parâmetros, com o objetivo de estimular a habilidade de generalizar situações que apresentam um padrão que se repete, explorando as potencialidades que o GrafEq oferece. O trabalho com parâmetros exige dos alunos uma compreensão mais global das relações matemáticas e seus coeficientes, uma vez que os alunos precisam trabalhar, simultaneamente, com os registros algébrico e gráfico e controlar estes parâmetros no registro algébrico para obter o efeito gráfico desejado no registro gráfico.

A partir das análises das produções dos alunos e dos relatórios entregues, percebemos que esta atividade proporcionou aos alunos um momento de mobilização para a compreensão das relações matemáticas utilizadas. Os alunos empenharam-se na realização da atividade, evidenciaram as estratégias utilizadas, os momentos de frustração com tentativas que não levaram aos resultados esperados e a necessidade de superar as dificuldades a partir da compreensão e controle da situação.

Esta experiência evidencia que o software GrafEq constitui-se como um recurso com potencial semiótico que pode mobilizar os alunos para a aprendizagem de equações e inequações matemáticas.

Referências Bibliográficas

- Arroio, A & Giordan, M. (2006) O vídeo educativo: aspectos da organização do ensino. *Química Nova na Escola*, 24, p.8-11. Disponível em <http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc24/eqm1.pdf>.
- Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, (pp. 103-131). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Halberstadt, F.F. & Fioreze, L.A. (2014). A aprendizagem da geometria analítica do ensino médio e suas representações semióticas no GrafEq: algumas considerações iniciais. *Anais da V Jornada Nacional de Educação Matemática (V JEM)*, Passo Fundo, RS, Brasil.
- Leivas, J. C. P. (2013). Visualização ou Ilusão Ótica: O que dizem os mestrandos? *Revista de Educação, Ciências e Matemática* v.3 n.2 mai/ago 2013.
- Moran, J. (1995). O Vídeo na Sala de Aula. *Comunicação e Educação*, (2),p. 27-35. São Paulo.
- Notare, M.R.& Gravina, M. A. (2013). A Formação Continuada de Professores de Matemática e a Inserção de Mídias Digitais na Escola. *Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM)*, São Carlos, SP, Brasil.
- Tahan, Malba. (1973). *As maravilhas da Matemática*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Bloch Editores.