Errores y concepciones de los alumnos en álgebra

Nora **Olmedo**
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca
Argentina
noraolmedo5@hotmail.com
Marcela **Galíndez**
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca
Argentina
marcelagalindez@gmail.com
Javier **Peralta**
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca
Argentina
javyperalta@yahoo.com.ar
Miryam **Di Bárbaro**
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca
Argentina
dibarbaro1099@hotmail.com

Resumen

El álgebra es una materia fundamental en el primer año del Profesorado en Matemática, es uno de los conocimientos imprescindibles para la permanencia del alumno en la carrera; por ello, visualizar las debilidades o aspectos a superar de los estudiantes, estudiar los errores que cometen, dificultades que poseen, las causas y motivos que los provocan y las posibles concepciones que subyacen bajo esas dificultades es el objetivos de esta investigación. La metodología utilizada es cualitativa y la recolección de datos se obtuvo de los cuadernos de seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de los docentes y de entrevistas a alumnos y un profesor. Se puede inferir que los errores cometidos por los alumnos en álgebra tienen su origen en la aplicación de procedimientos imperfectos provocados por concepciones inadecuadas. Los estudiantes conviven con procesos intuitivos y formales, entre concepciones procesuales y estructurales con una supremacía de las primeras.

Palabras clave: errores, concepciones, enseñanza, aprendizaje, álgebra.

Planteamiento del problema

En general, los alumnos que terminan la escuela media han adquirido cierta destreza en los procedimientos de cálculo algebraico desligados de las situaciones que los originan o en las cuales pueden llegar a ser usados, esto es, no saben de dónde salieron ni para qué sirven. Sin embargo, son conscientes de que aprendiendo cómo se utilizan en ciertas situaciones rutinarias les permiten satisfacer, en alguna medida, las expectativas de aprobación. Al ingresar al profesorado en Matemática de la FACEN, los docentes universitarios exigen justificaciones, argumentaciones, validaciones, y los alumnos presentan dificultades, comienzan a creer que todo lo aprendido en la secundaria fue inútil, manifiestan desconcierto ante el comportamiento de los objetos algebraicos, sienten un desequilibrio entre lo que saben y cómo se usa eso que saben, pues hay objetos familiares, pero no "funcionan" de la misma manera que en el nivel medio. Por ejemplo, todos los conocimientos adquiridos sobre operaciones con polinomios no les son suficientes para desarrollar estrategias que permitan demostrar afirmaciones generales sobre números. Se enfrentan con “otra matemática”, caracterizada por la presencia de un nuevo elemento transversal y fundamental que es la demostración.

Estas dificultades se manifiestan a través de los errores. El álgebra de primer año es una de las áreas de la Matemática más susceptible de cometer errores, algunos son sistemáticos, que pueden ser por falta de estudio, por carencia de conocimientos previos o por mostrar síntomas de concepciones inadecuadas acerca de los objetos matemáticos o de los procedimientos.

En este sentido, consideramos que es válido el intento por conocer esas concepciones, aquellas que subyacen bajo los errores cometidos, con el fin de revertir actitudes, superar dificultades y modificar imágenes inadecuadas que tienen los alumnos acerca de los conceptos algebraicos. El desafío y la responsabilidad de lograrlo nos corresponden a los profesores, quienes a través de propuestas didácticas acordes podemos proporcionar el acompañamiento necesario para que los alumnos optimicen su comprensión hacia el álgebra.

Clarificar la problemática del aprendizaje del álgebra en primer año de la FACEN, desde el estudio de las concepciones que tienen los alumnos acerca de ella, será relevante para ayudar a los docentes a organizar mejor su enseñanza y para lograr alumnos competentes en el área. Para ello nos planteamos los siguientes **Objetivos:**

- Categorizar los errores que cometen los alumnos de primer año del Profesorado en Matemática de la FACEN en sus producciones escritas según las posibles causas y motivos que pudieran hacer prevalecer los mismos;
- Inferir las concepciones inadecuadas o erróneas que subyacen bajo los errores atendiendo a la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos de pensamiento y de enseñanza y aprendizaje

Antecedentes y Fundamentación Teórica

Entendemos por error cuando un alumno realiza una práctica, acción, argumentación, etc., que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. (Godino, Batanero y Font, 2003, p69). Existen diversas investigaciones referidas al estudio del origen de los errores que comenten los alumnos durante el aprendizaje de la Matemática, con respecto a los cometidos en álgebra, Keiran, Filloy (1989) consideran que se deben a que continúan empleando nociones y enfoques que usaban en aritmética con respecto a los símbolos y letras, Charnay (1990), que los alumnos no saben escuchar y observar las explicaciones del maestro y sólo le interesa saber el algoritmo que permite resolver un ejercicio sin interesarse en entender los conceptos o implicancias en el tema, el equipo de esta investigación ha estudiado previamente que uno de los orígenes está en el uso de estrategias de aprendizaje superficiales, de práctica y memorización con escaso nivel metacognitivo (Olmedo, 2009).

Guy Brousseau (1986) expresa:

> "*El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que ahora se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido"*.

Esto es, los errores provienen de concepciones que fueron útiles en su momento pero al aplicarlo en otros contextos resultan inapropiadas. Más tarde, Brousseau, Davis y Werner (1986) confirman que los errores muestran, en algunos casos, un patrón consistente: los alumnos tienen concepciones inadecuadas ("misconceptions") sobre los objetos matemáticos que, a veces, los conducen a usar procedimientos equivocados, incluso llegan a utilizar, en algunos casos, métodos propios. De igual modo, otros investigadores consideran a las concepciones de los alumnos como origen de los errores, entre ellos, Panizza, Sadovsky y Sessa (1996) quienes expresan que, en parte, las dificultades provienen del discurso escolar cuando el docente no fomenta una concepción que permita al estudiante comprender qué es y cómo se relaciona este concepto con otras áreas, sino en una basada en la memorización de reglas.

Son varios los significados que se le han dado al término concepción en la didáctica de las matemáticas. Cornu (1991) denomina *concepción espontánea* al conjunto de ideas, imágenes, intuiciones que el estudiante tiene sobre el uso de un término, influenciados por las creencias acerca del mismo en la vida diaria. Esas concepciones espontáneas que el estudiante evoca cuando construye un objeto matemático constituyen lo que Tall y Vinner (1981) denominan *imagen o esquema conceptual.* Los "concept image" son las estructuras cognitivas que un individuo asocia a un concepto. En este sentido, cuando se explica un concepto, los alumnos desarrollan un proceso cognitivo con el que conciben un esquema conceptual. Para ello se basan en un conjunto de imágenes mentales (formas simbólicas, diagramas o gráficas) que asocian al concepto. Pero el conjunto de objetos matemáticos, que un alumno considera ejemplos adecuados para formar esa imagen, puede que no se haya elegido correctamente y descuide matices importantes. Esto da lugar a esquemas conceptuales incompletos e inadecuados, que propician la aparición de errores de concepto. De aquí la importancia de conocer las concepciones de los estudiantes y de los docentes acerca del álgebra y de los objetos algebraicos.

A lo largo de la historia se han podido distinguir diferentes concepciones acerca del álgebra, las cuales, no son disjuntas, existen numerosas relaciones entre ellas, tan es así que en la práctica educativa no pueden ser separadas radicalmente debido a que una situación o contexto a menudo provoca actividades algebraicas correspondientes a diferentes visiones del álgebra (Drijvers y Hendrikus, 2003).

Bell (1988) y Vergnaud (1989), Bednarz, Kieran y Lee (1996) insisten en que sólo un equilibrio entre las diferentes concepciones del álgebra y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, pueden permitir a los alumnos comprender en profundidad la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico. Kaput, Carraher y Blanton (2008) valoran la multidimensionalidad del álgebra y argumentan que las concepciones cerradas resulta un obstáculo para la comprensión de la misma.

Molina, M (2012) en su investigación distingue cinco concepciones del álgebra, que describimos brevemente a continuación:

- El Álgebra como Aritmética generalizada y estudio de patrones: Se la concibe como fundamento para la generalización, donde el simbolismo algebraico es fundamental para capturar, revelar y describir los patrones y estructuras, utilizando las letras con el significado de números generalizados.
- El álgebra como estudio de relaciones entre variables: Concibe el álgebra como el estudio de funciones y gráficos (Vergnaud, 1997), centrado en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real. En este caso, las letras representan variables con el significado de cantidades cambiantes.
- El álgebra como herramienta para la Resolución de problemas: Se refiere en especial a aquellos problemas que pueden ser formulados en términos de ecuaciones e inecuaciones, que pueden provenir o no de las matemáticas. En caso, las letras tienen el significado de incógnitas y parámetros. Esta concepción del álgebra es la más próxima a sus orígenes como herramienta para resolver problemas (Kieran, 2007).
- El álgebra como estudio de Estructuras: En esta concepción las letras se utilizan en expresiones algebraicas como un objeto arbitrario en una estructura, no siendo necesaria su vinculación a números o cantidades como referentes (Usiskin, 1988). El álgebra se entiende aquí como el estudio de estructuras por medio de las propiedades que se le atribuyen a las operaciones con números reales y polinomios. Tiene una estrecha conexión con la concepción del álgebra como aritmética generalizada.
- El álgebra como Lenguaje algebraico: Se concibe el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, como un sistema de representación. El álgebra dispone de un lenguaje propio estandarizado con un conjunto de símbolos, signos y reglas para su uso. Es un lenguaje compacto e inequívoco aplicable a otras áreas. Se utiliza para representar ideas algebraicas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen (Arcavi, 1994).

Concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra

Históricamente el álgebra surgió de la aritmética ante la necesidad de sistematizar y describir propiedades generales y procedimientos generales para resolver clases de problemas (Banerjee, 2011; Lins y Kaput, 2004). Este hecho histórico justifica el aprendizaje del álgebra bajo la concepción de aritmética generalizada, y además porque alude al carácter inductivo del mismo. Las expresiones algebraicas se introducen como generalizaciones de las operaciones con cantidades y rápidamente se pasa a considerarlas como objetos matemáticos en los cuales se llevan a cabo operaciones estructurales como la reducción de términos semejantes, la factorización, u operar de igual modo en ambos miembros de una ecuación (Kieran, 1992). La introducción del álgebra va enfocada al aspecto sintáctico, asumiéndose que las dificultades de los estudiantes son debidas a la complejidad de su sintaxis (Booth, 1989). Variados estudios muestran que bajo este modelo de enseñanza la transición de la aritmética al álgebra no es directa. En la primera, las expresiones simbólicas (numéricas) son interpretadas como procesos, en cambio, en la segunda han de interpretarse como procesos y como objetos. Sfard (1987), afirma que las nociones matemáticas, pueden ser interpretadas por los estudiantes con dos tipos de concepciones: la ***operacional:*** como procesos y la ***estructural:*** como objetos abstractos**.** A su vez, este autor menciona que:

> "*en el proceso de formación de un concepto, la concepción operacional, con frecuencia, es la primera que se desarrolla. Fuera de ella, la concepción estructural la iría envolviendo gradualmente. … ciertas partes de la matemática las podemos observar con cierto grado de jerarquización, lo que es concebido de una forma puramente operacional en un nivel, se podría concebir estructuralmente en un nivel más alto*".

La concepción operacional, a pesar de ser difícil de describir, se refiere a concebir los conceptos como procesos, como algoritmos, secuencia de operaciones, acciones a nivel físico o mental. En el caso de las ecuaciones no se enfatiza en la estructura algebraica, sino que recurre a otros métodos, propios de la aritmética o de la geometría básica. La concepción operacional, implica una interpretación de un proceso como una entidad potencial, es decir, una entidad dinámica, secuencial y detallada.

La concepción estructural, hace referencia a la capacidad de "ver" mentalmente a los objetos matemáticos, que son organizaciones mentales abstractas, como objetos reales, con características y funciones definidas. Las concepciones estructurales reciben el apoyo de las imágenes mentales para que el estudiante pueda construir ideas abstractas tangibles y las considera casi como entidades físicas a través de la visualización. Esta concepción es propia del álgebra pues se define por medio de reglas, propiedades y procedimientos propios de ella y trabaja con los entes abstractos como si fueran físicos.

Se evidencia una brecha entre las concepciones estructurales y operacionales, sin embargo, ellas son complementarias pues son dos visiones de un mismo concepto matemático y son inseparables debido a que cada concepto alberga elementos operacionales y estructurales. Es preciso señalar que el rol del enfoque estructural es más avanzado que el operacional, ya que el primero genera comprensión y el segundo genera resultados que se evidencia en la resolución de problemas; por lo tanto, es evidente la importancia de estudiar y desarrollar en los alumnos los dos enfoques.

Desde esta perspectiva el estudio del álgebra se entiende como una serie de ajustes proceso–objeto que los alumnos deben realizar para poder comprender los aspectos estructurales del álgebra. Progresivamente se va desarrollando la habilidad de ver una cadena de símbolos como un nombre para un número, más adelante se llega a considerar las letras en una fórmula como variables en vez de como incógnitas, y finalmente se perciben las funciones que se esconden tras las fórmulas. Drouhard y Teppo (2004) expresan que ver un proceso como un objeto implica una significativa reestructuración cognitiva y que esta dualidad de los símbolos matemáticos, como proceso y como objeto dificulta la comprensión al estudiante, ya que es posible utilizar cualquiera de estas interpretaciones según lo que sea necesario o conveniente.

Entendemos que aquel que comprende álgebra no es consciente del significado de los símbolos todo el tiempo ni lo olvida todo el tiempo, su capacidad está en considerar el significado correspondiente a cada situación, en "el sentido del símbolo" como dice Arcavi, (1994, 2006). Coincidimos con él cuando expresa que para ser competente en álgebra es necesario alternar de forma flexible y oportuna el uso de acciones desprovistas de significado, como la aplicación automática de reglas y procedimientos, con la aplicación del sentido común y la capacidad para elegir estrategias, reflexionar, conectar ideas, sacar conclusiones o elaborar nuevos significados. Además se requiere capacidad de ver una expresión como un objeto y como un proceso y decidir cuál de ambas formas de ver una expresión es más adecuada en cada momento.

Metodología

El núcleo clave para abordar esta investigación consistió en identificar y caracterizar los errores más frecuentes que cometen alumnos de primer año del profesorado en matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Catamarca e inferir las posibles concepciones encubiertas en esos errores.

Durante las clases del Curso de Ingreso, Introducción a la Matemática y Álgebra se seleccionaron los errores más frecuentes cometidos por los alumnos en la resolución de ejercicios y problemas. Los mismos fueron registrados en los cuadernos de seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de los docentes a cargo de esas cátedras. Posteriormente se entrevistó a dos de los alumnos que habiendo obtenido buenas calificaciones cometieron algunos de esos errores frecuentes. Los datos se completaron durante la entrevista a uno de los docentes.

Con la selección de los errores no se pretendía realizar una interpretación estadística sino analizar las características comunes y no comunes entre ellos y lograr así una categorización de las causas que los provocan. La naturaleza del estudio, que hace hincapié en las respuestas dadas por los estudiantes y el docente acerca de su propia práctica, demandó un análisis cualitativo. Con esta metodología, cada caso de la muestra se trata como empíricamente distinto y no se presupone qué número de casos diferentes puedan formarse con el fin de constituir una totalidad homogénea.

El análisis de las posibles causas que provocan esos errores exigió una categorización de las mismas. La cual devino de las convergencias entre las categorías que surgieron del análisis y de las sugeridas por investigaciones previas (Abrate, Pochulu, y Vargas, 2006). A continuación las describimos brevemente:

- Asociaciones o inferencias incorrectas: Surgen de las dificultades de los alumnos para interpretar durante la comprensión los conceptos. También por la aplicación memorística de propiedades
- Aprendizaje incorrecto o insuficiente de Conceptos previos: Pueden ser debidos a la deficiencia en la construcción de concepto previo o por la ausencia del mismo
- Dificultades del Lenguaje: Debido a la falta de comprensión e interpretación del lenguaje matemático
- Aplicación Inapropiada de un esquema previo: Son causados por la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de solución de una situación aun cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se han modificado. Como ocurre en la aplicación de las propiedades a situaciones nuevas

En esta clasificación se dejan de lado aquellos errores cometidos por el cálculo incorrecto accidental. Los contenidos algebraicos abordados para la selección fueron: Propiedades de las Operaciones en el Conjunto de los Números Reales, Operaciones y Factoreo de Expresiones Algebraicas y Ecuaciones de Primer Grado.

Posteriormente, se interpretó el sentido que los alumnos le infieren a los símbolos y a los objetos algebraicos y se dedujeron los posibles esquemas conceptuales formados con respecto a los significados del signo igual, de las letras, de la relaciones de equivalencia y simetría de la igualdad. Finalmente se pudo inferir las concepciones que tienen los alumnos acerca de los mismos, si son de tipo operacional o estructural.

Análisis y discusión de los resultados

Se citan algunos ejemplos de los errores categorizados según la causa que los provoca y explicamos para cada caso las concepciones que subyacen bajo errores:

- Errores por Asociaciones o inferencias incorrectas

1) $(-a)^0 = -1$ Se infiere de $a^0 = 1$ para $a > 0$

2) $y = \log x \rightarrow \frac{y}{log} = x$ Se infiere de aplicar el pasaje de factores en una ecuación a una expresión funcional

3) En $\frac{2}{x} + 3 = 11$ Un alumno expresa: "*como la incógnita figura en el denominador de la fracción pasa al otro miembro con la operación contraria, o sea multiplicando al número que teníamos en el segundo miembro…*" y resuelve: $2 + 3 = 11x \rightarrow \frac{5}{11} = x$.

Se asocian las reglas de transposición de términos con la de factores o divisores.

4) $\frac{3}{0} = 3$ *obien* $\frac{0}{3} = 3$; Se infiere de $3.0 = 0$

5) $log(a + b) = \log a + \log b$

$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2} + \sqrt{4} = x + 2$

Asocian por analogía con la propiedad distributiva de la multiplicación

El procedimiento empleado en este tipo de errores consiste en la aplicación incorrecta de reglas y propiedades justificadas en esquemas similares y las utilizan por asociación o analogía, o bien, porque infieren que son válidas en contextos parecidos o relacionados. El alumno "inventa". No interpretan el significado de *equivalencia del signo igual, la relación de simetría entre los miembros de la igualdad.*

- Errores causados por el aprendizaje incorrecto o insuficiente de conceptos previos

1) $-x^2 = (-x)^2$;

2) $0x = x$

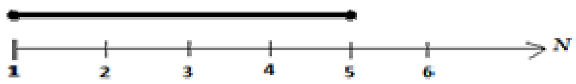
3) $x(x-2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x = 2x^3$; $2 + a = 2a$

4) En la resolución de ecuaciones como la descripta en el párrafo anterior

5) $\frac{\cancel{2x}-10}{\cancel{2x}-125} = \frac{10}{125}$

El procedimiento empleado es la aplicación de reglas o propiedades sin verificar su validez, muestra deficiencias en el manejo de conceptos y procedimientos. Los alumnos resuelven con métodos propios de la aritmética, no tienen claro los significados del signo menos (como signo de un número, como símbolo de la resta), del uso de los paréntesis y de las propiedades de simplificación y cancelación; no admite que el resultado de operaciones con expresiones algebraicas no arroje un único término. Poseen una concepción del signo igual como *operador,* como símbolo de obtener “algo, un resultado”. La concatenación en aritmética significa suma, por ejemplo $2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$; mientras que en el álgebra significa multiplicación $2a = 2 \cdot a$ *No interpretan el sentido de los símbolos.*

- Errores debido a las dificultades del Lenguaje
  1) $A = \{n \in \mathbb{N}/n \leq 5\}$ *se expresa gráficamente como:*

  2) $[-2,2] = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
  3) Los alumnos expresan que el conjunto solución de $y = 2x - 1$ es el conjunto de los números reales

Se deben a que realizan traducciones incorrectas de un lenguaje simbólico a otro distinto. En estos ejemplos se evidencia la dificultad de los alumnos para comprender los diferentes significados que tienen los paréntesis, corchetes y llaves en álgebra ya que en aritmética sólo se utilizaban para destacar la jerarquía de las operaciones. Los errores pueden ser ocasionados por la continuidad de nociones y enfoques del trabajo aritmético en algebraicos.

- Aplicación Inapropiada de un esquema previo
  1) La expresión $\frac{1}{3}(h+1)(4h+3) = \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}(4h+3)$
  2) $a_h = 7(h+1)+3$ *entonces* $a_{h+1} = 7(h+1+1)+3$

     $a_{h+1} = 7h+2+3$

     $a_{h+1} = 7h+5$
  3) $\frac{\cancel{2x}-10}{\cancel{2x}-125} = \frac{10}{125}$
  4) $x^2 + 3 = 5y$

     $x^2 + 3{:}5 = y$
  5) $\log_3(x.y)^2 = 2.\log_3 x + \log_3 y$

Se observa la persistencia de un esquema previo erróneo que se transfiere a situaciones de aprendizaje nuevas, lo cual dificulta el reconocimiento de una estructura dentro de otra.

De las entrevistas a los alumnos destacamos:

Antes de ingresar a la facultad desconocían la existencia de ecuaciones sin solución o las que tienen infinitas soluciones: “*recién ahora sé que hay ecuaciones que no tienen solución o que tienen infinitas soluciones, por ejemplo, los ejercicios que a mí me daban en el secundario cuando aparecía una ecuación así que se me anulaba la variable me decían que estaba mal planteada o nos decían está mal y directamente la cambiaban y nos daban otras. Decían: ah!*

Está mal, ya la corrijo y cambiaban un número o nos daban otras…”. Esto provoca una concepción de ecuación limitada a la búsqueda de un número que es el resultado del ejercicio. Conciben a la raíz de una ecuación como el número que se desconoce, dicen: “*es el o los valores de la incógnita que verifican la ecuación*”. Con esta afirmación se detecta que pueden ser uno o varios valores de la raíz, también conciben que “*si la ecuación es de primer grado tiene una sola raíz*”. Esta concepción puede ser una de las causas que provocan la dificultad para aceptar que para una ecuación lineal con dos incógnitas (por ejemplo: $y = 2x + 1$) existen infinitos valores que la verifican, luego también consideran que como son infinitos son todos los reales.

Reconocen como iguales y no como equivalentes a ecuaciones del tipo: $x + 4 = 7$ y $x = 7 - 4$, esto es, la concepción de ecuaciones equivalentes es que son las mismas escritas de otra manera. Decir que la igualdad se mantiene significa que la nueva ecuación es la misma y no una equivalente. Diversas investigaciones afirman que estas expresiones son aprendidas por los alumnos, del discurso del docente (Pouchulu, 2003), en realidad debería decir que se mantiene el mismo conjunto solución.

Entrevista al Docente:

En afán de explicar cuáles son los errores que cometen sus alumnos y el motivo que los provocan, el docente entrevistado expresa:

“Los estudiantes no están acostumbrados a reflexionar sobre el error cometido, deja a cargo del docente su corrección, no se realiza preguntas acerca de la solución encontrada, no revisa lo realizado”. Valoración que guarda relación con la apreciación realizada por Rico (1995) cuando argumenta que los alumnos no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan.

“La mayor cantidad de errores que cometen los alumnos de primer año se deben a la aplicación incorrecta de propiedades, las cuales se deben a la carencia de conceptos previos o deficiencia en el aprendizaje de los mismos. Por ejemplo, la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y resta es excesivamente aplicada en la escuela secundaria, ello impulsa a los estudiantes a aplicarla de igual modo en la potenciación y radicación, pues distribuyen el exponente a cada término, a pesar de la cantidad de veces que se les advierte”. Se podría deducir que la cantidad considerable de ejercicios repetitivos conduce a asociaciones incorrectas que luego se transforman en errores sistemáticos.

Otro aspecto es la imposibilidad de los alumnos para interpretar o traducir una expresión simbólica en otra, o gráfica o en el lenguaje coloquial. Coinciden con lo expresado por Arcavi (1995): “no *interpretan las expresiones, no pueden explicar lo que leen a través de los símbolos mientras los manipulan; en consecuencia no pueden traducirlo”.*

“Los alumnos creen que xx es igual a contar las x que aparecen, esto es $2x$, sin tener en cuenta la multiplicación que relaciona a las x; o también si algo es igual a 0 muchas veces dicen que no tiene valor o que no existe valor”

También les cuesta interpretar las diferencias entre una ecuación que termina en $0x = x$ y $0x = 0$ Tienen muy acentuada la concepción de que x o cualquier letra representa la existencia de un número fijo desconocido.

Ante la pregunta acerca de las estrategias metodológicas que utilizan para que el alumno comprenda el significado de equivalencia del signo igual o de la propiedad simétrica de la igualdad. Expresa que lo hace mediante ejemplos concretos, "*verifican con números si se cumple por ejemplo la propiedad distributiva o la uniforme*". Es decir se recurre a ejemplos o contraejemplos con números, recurre a la aritmética.

Expresa que cuando los alumnos ingresan desconocen el significado de expresiones equivalentes. Pero luego, "*en el tema ecuaciones, damos los conceptos y ejemplos de igualdad, ecuaciones e identidades y a través de la resolución de ecuaciones se explica qué son ecuaciones equivalentes, pero cuando resuelven no tienen en cuenta si el valor obtenido verifica o no a la ecuación dada*". Se deduce que el concepto de expresiones equivalentes queda sobreentendido, que los ejemplos y la resolución muchas ecuaciones son suficientes para comprender este concepto. Nos preguntamos: ¿si es así, por qué se siguen cometiendo errores? ¿la utilización de ejemplos y contraejemplos son suficientes para que el alumno asimile el concepto de equivalencia?

Con respecto a las ecuaciones manifiesta que tienen dificultad para comprender el método de resolución de ecuaciones por cambio de variable, no concibe que expresiones con varios términos puedan ser expresados como uno solo, no conciben que la estructura superficial es la misma; por ejemplo:

$4(2x+1)+2(2x+1)-5=4$ es la misma estructura de $4z+2z-5=4$

Manifiesta que, en general, no nota dificultad para comprender lo que Keiran llama la *falta de cierre*, cuando el resultado de una ecuación es, por ejemplo, una suma de términos no semejantes, tampoco para operar con polinomios; pero tienen dificultades en la aplicación de los casos de factoreo a pesar que la mayoría de estos se explican a partir de la simetría de las igualdades: Factor común es la operación recíproca a la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma; el trinomio cuadrado perfecto lo es del cuadrado de un binomio, etc. No conciben la simetría de la igualdad. Esta es otra manifestación de no reconocer la equivalencia.

Finalmente expresa que los alumnos del profesorado en matemática, al finalizar el primer cuatrimestre, adquieren cierta habilidad operatoria y dominio en el uso de las notaciones algebraicas, pero su confianza en sus formas de resolver mecánicas e intuitivas, sin prestar atención a la justificación del método empleado lo induce a cometer errores. El docente es el encargado de advertir a través de preguntas, el estudiante piensa en ese momento y corrige. Manifiesta mucha dependencia del docente. Esto produce avances y retrocesos en el aprendizaje del álgebra

Conclusiones

Lo investigado nos permite expresar que:

Los errores que cometen los alumnos se deben en su mayoría a que los conceptos previos son insuficientes entonces realizan asociaciones o inferencias incorrectas. Como desconocen o "desatienden" las propiedades de las operaciones, tanto con números reales como con polinomios, los alumnos "inventan" sus propias reglas y las trasfieren a nuevas situaciones. Por ejemplo: confunden los significados del signo menos (como signo o símbolo de la resta), el uso de los paréntesis (para jerarquizar operaciones o para denominar un par ordenado), la simplificación con la cancelación. Otros errores provienen de la utilización del signo igual como

Operador cuando resuelven ecuaciones, sin tener en cuenta el significado de equivalencia, y en consecuencia descuida la relación de simetría entre los miembros de la igualdad. Se podría expresar que consideran a los objetos matemáticos, como lo son las operaciones, ecuaciones y las letras, de manera aritmetizada.

Estas formas de resolver no propician la comprensión del álgebra como estructura. Coincidimos con los conceptos brindados por Pouchulu (2005) acerca de que la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado y totalmente identificable y el empleo de métodos y estrategias inventadas, no formales pero originales, para la realización de algunas de las situaciones propuestas, son síntomas de concepciones inadecuadas.

La complejidad del lenguaje algebraico, que hace que un mismo objeto tenga una variedad de significados, también provoca confusiones que demoran el aprendizaje, la comprensión y la concepción del álgebra como estructura.

Se puede inferir que los alumnos de primer año se encuentran en una etapa de transformación en la cual conviven con procesos intuitivos y formales, entre concepciones procesuales y estructurales con una supremacía de las primeras. Se enfrentan con la realidad que aprender y comprender álgebra no significa operar de la misma manera que lo hacían en la aritmética cambiando los números por letras, sino que en esta etapa deben interpretar los símbolos, no sólo desde lo procedimental sino desde la interpretación de su significado y del sentido que ese significado tiene en cada expresión algebraica. Se exige de ellos mayor responsabilidad pues muestran una actitud dependiente del profesor, sin la capacidad suficiente para corregir y superar sus propios errores.

Los profesores evidencian que los alumnos tienen serias dificultades con el lenguaje, tanto el natural como el matemático. No interpretan las expresiones algebraicas, esto es una complicación para responder, estimar, conjeturar, que son las acciones que ayudan a desarrollar el razonamiento y la generalización. Los docentes en su intento por lograr que los alumnos alcancen una concepción del álgebra como estructura y como lenguaje, donde cada objeto algebraico es parte de una estructura, también se encuentran en una etapa de reestructuración de las estrategias de enseñanza. Evidencian que la repetición de ejercicios, la aplicación de reglas algorítmicas y definiciones, la utilización de ejemplos y contraejemplos, no son suficiente para que los alumnos comprendan los conceptos y sean hábiles en los procedimientos algebraicos.

Lograr que los docentes originen en sus alumnos una concepción estructural de las expresiones algebraicas no es sencillo, es necesario preparar propuestas didácticas acordes para que el alumno logre ser capaz de percibir, comparar y relacionar la estructura de diferentes expresiones, o subexpresiones algebraicas y utilizar esta información para la toma de decisiones sobre la manipulación de las mismas. El uso eficiente de técnicas algebraicas requiere desarrollar un sentido de qué tipo de métodos son útiles en cada caso y qué efecto tienen. Es responsabilidad de los docentes e investigadores promover el desarrollo de habilidades de pensamiento propias del álgebra para mejorar rendimiento de los alumnos en esta área y evitar, en consecuencia, la deserción en la carrera.

A los investigadores, este estudio ha permitido lograr habilidad para detectar, analizar e interpretar errores que son producto de concepciones equivocadas o inadecuadas para el aprendizaje del álgebra y aprender que los errores no sólo se producen porque los alumnos no estudian o no les motiva el estudio del álgebra, sino que muchos se deben a la complejidad de los objetos matemáticos, al lenguaje y a las actividades propuestas por los docentes para superarlos.

Quizás no existe una metodología para el tratamiento de los errores en Matemática que sea universalmente aplicable, pero eso no significa que no existan estrategias acordes a cada situación, lo importante es proponer aquellas más o menos adecuadas que propicien una participación activa de los alumnos en su proceso de superación.

Bibliografía y referencias

Abrate, R., Pouchulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo* (1a ed.). Buenos Aires. Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Arcavi, A. (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present and Future. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 145-162.

Banerjee, R. (2011). Is arithmetic useful for the teaching and learning of algebra? *Contemporary education dialogue, 8*(2), 137-159.

Bell, A. (1988). Algebra choices in curriculum design. En A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 147-153). Veszprém, Hungary: Ferenc Genzwein OOK.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for Seeing*. Harmondsworth, Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Serie B. *Trabajos de matemática, FaMAF UNC*. (traducido de Fondaments et méthodes de la didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33-115).

Brousseau, G., Davis, R., & Werner, T. (1986) *Observing Student at Work.* En M. Socas, *Números*, *77*, 5-34

Booth, L. R. (1989). “A question of structure or a reaction to: “the early learning algebra: a structural perspective”. En S. Wagner, & C. Kieran (Eds.), *Research issues in thelearning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 57-59). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Charnay, R. (1990,91): "Del análisis de los errores en matemática a los dispositivos de remediación; algunas pistas..." INRP. *En Grand N, número 48, Francia* (Traducido para el PTFD. MCyE, 1994).

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam: Sense Publishers.

Drijvers, P., & Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter* (Tesis doctoral no publicada). Utrecht University, Utrecht, Países Bajos.

Drouhard, J.-P., & Teppo, A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (227-264). New York, NY: Kluwer.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática para Maestros. Matemática y su Didáctica. Manual para Maestros.* Facultad de Ciencias de la Educación. http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros

Keiran, C., & Filloy, Y. (1989). El Aprendizaje del Álgebra Escolar desde una Perspectiva Psicológica (Traducido por Luis Puig). *Enseñanza de las Ciencias, 7*, 229-240.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Norwell, MA: KluwerAcademic Publishers.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.

Molina, M. (2012). *Proyecto investigador. Plaza de Profesor Titular de Universidad.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Olmedo, N. (2009). Caracterización de las Ecuaciones a partir del Estudio de las Estrategias de Aprendizaje Aplicadas por Alumnos de Primer año de la *FACEyN . Debates, reflexiones e interrogantes en la educación en ciencias*. Universidad Nacional de Catamarca, Argentina.

Panizza M., Sadovsky P., & Sessa C. (1996). Los primeros aprendizajes de las herramientas algebraicas. Cuando las letras entran en la clase de Matemática. *Comunicación realizada a la sección REM* de la reunión anual de la Union Matemática Argentina, Córdoba.

Pouchulu, M. (2005). Análisis y Categorización de los errores en el Aprendizaje de la Matemática en alumnos que ingresan a la Universidad. *Revista Iberoamericana de Educación.* Difusión por internet www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. En M. Socas (2011), *La Enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aplicaciones de la Investigación.*

Sfard, A. (1991). Sobre la naturaleza dual de las concepciones matemáticas. *Educational Studies in Mathematics.* Kluwer Academia Publisher.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1989). Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*, 133-170.