



Desarrollo del *pensamiento teórico*: objetivación del límite de una función en grado once

Claudia Patricia Quintero **Quintero**

Estudiante de Doctorado. Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.

Colombia

clauquinte22@yahoo.com

Diana Victoria Jaramillo **Quiceno**

Coordinadora grupo "Matemática, Educación y Sociedad"-MES. Facultad de Educación, Universidad de Antioquia

Colombia

diana.jaramillo@udea.edu.co

Resumen

Presentamos un avance del proyecto de tesis de doctorado que estamos realizando en el marco del Doctorado en Educación, Línea de Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). Este estudio tiene como propósito analizar el desarrollo del pensamiento teórico, en estudiantes de grado once, en su proceso de objetivación del límite de una función. La perspectiva histórico-cultural de la educación sirve de fundamentación teórica en esta investigación, en especial la *Teoría de la Actividad*. El camino metodológico seguido es de orden cualitativo, desde un paradigma crítico-dialéctico, y una investigación participante. El trabajo de campo está siendo realizado en una institución escolar pública de la ciudad de Medellín.

Palabras clave: perspectiva histórico-cultural de la educación matemática, lógica dialéctica, *Teoría de la Actividad*, *Actividades Orientadoras de Enseñanza*; aprendizaje del cálculo.

Planteamiento del problema

La definición axiomática de límite ha llegado a las aulas con el propósito de fundamentar la matemática escolar en el nivel medio, conllevando a la organización de los contenidos bajo la

influencia de la estructura formal del Análisis Matemático, como lo anotan Molfino y Buendía (2010). Tal fundamentación rigurosa ha propendido por un dominio algorítmico de límite, mas no por una objetivación del mismo que, además, posibilite el desarrollo del *pensamiento teórico* en los estudiantes. Este hecho, se transforma en una problemática que se hace evidente en las dificultades a las que nos enfrentamos los maestros para la enseñanza de dicho concepto matemático y, especialmente, a las que se enfrentan los estudiantes para el aprendizaje del mismo.

En esa dirección, concordamos con Cantoral (1995) cuando plantea que una de las causas de la problemática del aprendizaje de conceptos del Cálculo en la escuela radica, en primer lugar, en que antes de enfrentarse a éstos, los estudiantes aprenden una matemática elemental asequible a ellos y, luego, abruptamente, se encuentran ante una matemática avanzada que exige un alto nivel de abstracción. En segundo lugar, dice este autor, otra de las dificultades es el contenido mismo del Cálculo propuesto en el currículo. Es decir, el Cálculo escolar contiene ideas nuevas —para los estudiantes— como el cambio y la variación, variación instantánea, procesos infinitos y límites. Ideas, esas, que exigen de unas herramientas matemáticas de un nivel superior.

Al respecto, Cantoral y Farfán (2003) exponen que la inclusión de saberes bajo la rigurosidad matemática al sistema curricular escolar conduce a una serie de problemas en cuanto a sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Problemas que requieren de la implementación de estrategias diferentes a las usadas comunmente, que propicien el aprendizaje de los conceptos fundamentales del Cálculo.

Concordamos con Blázquez, Ortega, Gatica, y Benegas (2006) cuando plantean que el concepto de límite surgió históricamente desde las matemáticas mismas y no desde la didáctica. Además, estos autores, refiriéndose a la evolución de este concepto, dicen:

“Se distingue la necesidad de explicitarlo y formalizarlo, que se utiliza de manera implícita desde la época griega, y no llega a su forma actual hasta el siglo XIX, en parte para validar algunos resultados obtenidos y en parte para demostrar otros más generales” (p. 193).

Así, consideramos que el formalismo del Cálculo, consolidado por necesidades concretas en períodos históricos concretos, ha crecido con el avance de las matemáticas, pero al mismo tiempo ha interpuesto una considerable distancia entre objetos matemáticos —como el límite de una función, por ejemplo— y su aprendizaje por parte de los estudiantes del ciclo de enseñanza media. Hecho del que pensamos, son responsables, en cierta medida, la mayoría de los maestros al llevarlo de manera intempestiva a las aulas de clase.

En esa línea, la lectura de estos autores nos ha posibilitado continuar reflexionando sobre la pertinencia o no de la enseñanza del concepto de límite en el contexto escolar de la educación media en el ámbito educativo colombiano. Así, pensamos que la incorporación de saberes matemáticos como el de límite al currículo propuesto para la escuela conlleva a una serie de problemas teóricos y prácticos que precisan ser discutidos desde otras apuestas epistemológicas, gnoseológicas, metodológicas y, es claro, ontológicas. Apuestas direccionadas hacia una enseñanza que posibilite un aprendizaje con significado y con sentido para los estudiantes, de tal forma que, a su vez, posibilite el desarrollo de su *pensamiento* (en el sentido propuesto por Davidov (1988) y Kopnin (1978), y que será discutido más adelante). En esa dirección, concordamos con Davidov (1988) cuando expresa:

“La escuela debe enseñar a los alumnos a *pensar*, es decir, a desarrollar activamente en ellos los fundamentos del pensamiento contemporáneo, para lo cual es necesario organizar una enseñanza que impulse el desarrollo (llamémosla “desarrollante”)” (p.3).

Para Davidov (1988), una enseñanza desarrollante es aquella que forma en los estudiantes un *pensamiento teórico*. Esto es, un pensamiento que posibilite comprender y dominar el proceso de origen y desarrollo de las cosas por medio del análisis de las condiciones en que se producen las mismas. Dicho *pensamiento* tiene formas específicas de generalización y abstracción tales, que posibilitan a los estudiantes la formación de conceptos.

Al encontrarnos con planteamientos como el de Davidov (1988), podríamos aducir que no son nuevos y que es eso lo que los maestros planean para llevarlo a cabo en las aulas de clase. Sin embargo, nos surgen algunas inquietudes problematizadoras: ¿realmente los maestros posibilitan el desarrollo de este tipo de *pensamiento* en los estudiantes? Además, ¿es ese el interés del sistema escolar? En ese sentido, trabajos como los de Cantoral (1995) y Blázquez et al. (2006), más nuestra experiencia como maestras, que debemos enseñar estos temas, nos llevan a afirmar que no todo proceso de escolarización conlleva al *desarrollo intelectual* del sujeto y, es más, en algunas ocasiones, puede suceder lo contrario.

Por su parte, Davidov (1988) afirma que en la escuela se practica una enseñanza que no propende por el *pensamiento teórico*. Contrariamente, la escuela fomenta en los estudiantes un *pensamiento empírico*; un tipo de *pensamiento* que dificulta el acercamiento teórico de los estudiantes al conocimiento. De esta manera, para Davidov (1988), la enseñanza escolar influye poco en el desarrollo de las capacidades intelectuales de los estudiantes.

Así, desde nuestra práctica pedagógica, como maestras de matemáticas escolares, nos preguntamos también por el tipo de *pensamiento* que estamos fomentando en los estudiantes, y, por la manera en que estamos llevando al aula los objetos matemáticos. Nos preguntamos si estaremos posibilitando el desarrollo de su capacidad intelectual, de forma tal que les posibilite a esos estudiantes adquirir teóricamente —en el sentido de Davidov (1988)— los conocimientos matemáticos propuestos en el currículo escolar. En particular, nos hacemos esta indagación sobre el concepto de límite de una función, dada la importancia que se le da a la enseñanza de este concepto en el grado once —en el ámbito colombiano— y dada la dificultad de su aprendizaje por parte de los estudiantes.

De acuerdo con lo expuesto, la pregunta orientadora de esta investigación es: ¿cómo se desarrolla el *pensamiento teórico* en el proceso de objetivación del concepto de límite de una función, en estudiantes de grado once?

Marco teórico

Nuestras comprensiones teóricas en este estudio, desde los aspectos epistemológicos, gnoseológicos, metodológicos y ontológicos están inmersas en la perspectiva histórico-cultural de la educación, y, en especial, de la educación matemática. En esa dirección, explicitaremos a continuación algunas de estas comprensiones sobre conceptos como: *pensamiento empírico*, *pensamiento teórico*, objetivación y límite.

Pensamiento empírico: acercamiento fragmentado a la realidad objetiva

De acuerdo con Davidov (1988), la actividad práctica humana, entre otras cosas, desarrolla la actividad mental y, con ella, la capacidad del ser humano de expresar mediante diversos

sistemas semióticos el objeto o fenómeno –idealizado¹– que analiza. Si la idealización de ese objeto (o fenómeno) material es realizada de una forma primaria, esto es, solamente de los aspectos observados sensorialmente y utilizando no diferentes sistemas semióticos, sino la palabra como principal forma de expresión, entonces el proceso mental involucrado es el *pensamiento empírico*. Así, el *pensamiento empírico*, según Davidov (1988 p. 123), es la “(...) *forma transformada y expresada verbalmente de la actividad de los órganos de los sentidos, enlazada con la vida real; es el derivado directo de la actividad objetual-sensorial de las personas*”.

Concordamos con Kopnin (1978) cuando expresa que en el *pensamiento empírico*, el objeto es representado por sus manifestaciones externas, tan solo como resultado de la contemplación hecha por el sujeto. Así, la forma lógica del *pensamiento empírico*, su contenido fundamental, es el juicio de lo observado, generado aisladamente y emitido mediante un solo término, lo cual no posibilita identificar las particularidades esenciales del objeto, la conexión interna de sus aspectos. En esa misma dirección, puede decirse que en el *pensamiento empírico* es característico el uso de la palabra para dar a la interacción perceptual la forma de universalidad abstracta, como apunta Davidov (1988). Universalidad que, basada en la repetitividad, verbaliza lo percibido en forma de juicios; constituyendo así el fundamento de los procesos de generalización y abstracción empíricas.

En cuanto a la generalización empírica, ésta puede entenderse, según Davidov (1998), como el movimiento que muestra las características comunes de un objeto o fenómeno en relación a la clase de objetos de la que hace parte. Aquí lo general consiste en hallar ese algo que se repite; es lo invariante de las propiedades del objeto en análisis, lo cual se constituye en lo esencial, en el concepto mismo. De acuerdo con Davidov (1988), la generalización se encuentra estrechamente relacionada con el proceso de abstracción, ya que para identificar una cualidad común de un objeto, se requiere hacer una separación de otras de sus cualidades. Esto permite al estudiante, según dicho autor, “*convertir la cualidad general en un objeto independiente y especial de las siguientes acciones —la cualidad general se designa con alguna palabra—*” (p.102). Así, en esta perspectiva, lo general se considera sólo como lo igual o semejante en el grupo de objetos o fenómeno abordado; interpretando por lo tanto, lo esencial como el rasgo distintivo de la clase de objetos, como lo que permite formar el concepto. Este tipo de consideraciones coincide, según Davidov (1988), con la interpretación de la lógica formal, la cual conlleva los procesos de generalización y abstracción en la vía del *pensamiento empírico*.

De esta forma, el *pensamiento empírico* origina, en los estudiantes, la formación de conceptos resultantes de la experiencia sensorial, mas, no de la esencia del objeto en movimiento, como es la particularidad principal de los conceptos científicos. Esta idea es concordante con Moura (2010), cuando plantea que para entender un fenómeno, este debe ser tomado en su movimiento, en su historicidad, en su complejidad, ya que no puede ser comprendido en su inmediatez ni en su apariencia. No se puede conocer la realidad mediante el contacto directo con el fenómeno; “*el contacto posibilita solamente una representación caótica del todo*” (Marx, 1989, referenciado por Moura, 2010, p.37). Así, comprender un fenómeno desde el *pensamiento empírico* es conocer sólo una de las dimensiones de la realidad; es

¹Retomamos el concepto de idealización desde Marx, referenciado por Davidov (1988, p. 118), en su definición textual: “...*Lo ideal no es, por el contrario, más que lo material traducido y transpuesto a la cabeza del hombre*”.

conocerla de una forma fragmentada y superficial.

Pensamiento teórico: comprensión dialéctica de la realidad objetiva

Davidov (1988) expone que, contrariamente al *pensamiento empírico*, el *pensamiento teórico* posibilita al sujeto comprender la esencia del objeto estudiado mediante la elaboración de los datos observados dialécticamente. Esto es, hallar las conexiones internas de las propiedades de los objetos analizados, sus contradicciones y singularidades, como parte de un todo integrado. De esta forma, como lo expresa el mismo autor, en el *pensamiento teórico*, el concepto surge como un modo de *actividad psíquica* del sujeto que le posibilita la reproducción del objeto idealizado, develando su esencia.

En esa misma línea, parafraseando a Davidov (1988), puede decirse que el *pensamiento teórico* elabora los datos de la contemplación y los representa en forma de conceptos, expresados mediante diferentes sistemas semióticos, mediante procesos de deducción y análisis de las relaciones existentes entre las cosas al interior de un sistema, identificando, además, la relación parte-todo entre ellas. El concepto, aquí, actúa tanto como forma de reflejo del objeto, como medio de su estructuración; es decir, como una “*acción mental especial*” (Davidov, 1988, p. 126). Así, en este tipo de *pensamiento*, el concepto, cuyo carácter es histórico-social, es objetivado por el individuo.

Moura (2010), apoyándose en el materialismo histórico-cultural, plantea que el *pensamiento teórico* se desarrolla mediante la lógica dialéctica, la cual posibilita traspasar la mera identificación de los rasgos aparentes del objeto de la contemplación y su determinación como concepto por medio de la palabra. En la misma línea, este autor plantea que la tarea del *pensamiento teórico* es revelar el movimiento, la esencia del fenómeno, por medio del proceso de la ascensión de lo abstracto a lo concreto. Esto es, el proceso en que el *pensamiento* aborda lo abstracto para luego reproducirlo como algo concreto; como un todo desarrollado que representa la unidad de lo diverso (Davidov, 1988). Así, lo concreto y lo abstracto, de acuerdo a este último autor, son momentos del análisis del objeto, por medio de la actividad del *pensamiento*. Cabe aclarar que dicho análisis comienza por lo inmediatamente obtenido, en forma de abstracción, de caos, para luego ser concretizado. Sin embargo, como lo expresa el mismo Davidov (1988), las abstracciones deben ser tales que develen las conexiones internas del fenómeno estudiado, sus contradicciones. Por lo tanto, el proceso de la ascensión de lo abstracto a lo concreto, como lo enuncia Moura (2010), debe revelar las contradicciones presentes en la abstracción inicial para así elaborar la concretud del objeto; la cual permite integrar lo singular y lo particular, la parte y el todo, del objeto analizado en movimiento.

Concordando con Davidov (1988) y Moura (2010), es nuestra apuesta en esta investigación plantear la necesidad de transformar las prácticas de enseñanza en otras que generen, a su vez, una transformación del *pensamiento* de los estudiantes. Un *pensamiento*, del estudiante, que trasgreda la generalización empírica (producto del simple establecimiento de relaciones mediante la sola percepción) hasta desarrollar un *pensamiento* que posibilite un análisis dialéctico del objeto o fenómeno a ser aprendido; esto es, hacia el desarrollo de un *pensamiento teórico*.

Objetivación: proceso de encontrar (se) en la cultura

Desde la perspectiva gnoseológica y ontológica que asumimos, el sujeto es considerado como un ser histórico, social y cultural. Es en el proceso de “ser con los otros” (Radford, 2004) que un sujeto puede constituirse como individuo. Pero, su misma forma de interactuar, de

relacionarse con otros sujetos y con las cosas que le rodean está directamente influenciada por la cultura de la que hace parte activa. Es ella entonces —la cultura— la que posibilita que el sujeto interprete su entorno de cierta forma y, por ende, su manera de pensar y de actuar. Es en la cultura que el sujeto encuentra un conocimiento —construido en un devenir histórico por medio de la actividad humana— y lo *actualiza* (Radford, 2013) como parte de su proceso de aprendizaje, de su objetivación.

Comprendemos la teoría de la objetivación como es asumida por Radford (2008). Es decir, como una teoría de enseñanza y, ante todo, de aprendizaje inscrita en la perspectiva histórico-cultural, en la cual conceptos como *pensamiento*, por ejemplo, trasgreden epistemologías idealistas. En esa línea, el *pensamiento*, para Radford (2008), es una forma de reflexión mediatizada que hace un individuo de su realidad. Reflexión que es mediada por los artefactos (objetos, instrumentos, signos, entre otros) presentes en la cultura a la cual pertenece dicho individuo. Pero esos artefactos, según este autor, son más que apoyos para el *pensamiento*, son partes constitutivas de la actividad de pensar. Así, entender el *pensamiento* como reflexión, desde Radford (2008), es entenderlo como un movimiento entre cierta realidad —constituida en un devenir histórico— y un sujeto que la modifica de acuerdo a su forma particular de interpretar el mundo, de acuerdo a su cosmogonía.

Objetivación, según Radford (2004), es una palabra cuya etimología se refiere a acciones que ponen algo enfrente nuestro; que posibilitan hacer visible lo invisible; “*volver aparente lo potencial*” (p. 18). Entiendo aquí, que ver lo que en cierto momento se nos hace invisible puede darse mediante un proceso de intersubjetividad. Es decir, se nos hace visible lo invisible a través de la interacción con *el otro* —con todo lo que no soy *yo* (Bajtín, 2009) —y que me forma como ser, a la vez que puedo hacer una reflexión de la realidad. Un *yo* que, en término bajtinianos, es un *yo* esencialmente social pues se constituye a partir de las voces de los *otros*. Son precisamente esos *otros* los que nos motivan a ver lo que antes estaba oculto en la cultura, los que nos permiten aprender. En esa línea, Radford (2008) plantea que el aprendizaje es un acto en el que damos sentido a los objetos existentes en la cultura, cuando nos relacionamos abiertamente con ellos y con quienes interactuamos. Es hallar un “*algo*” (Radford, 2008, p. 225) en la cultura de forma tal que en ese proceso de búsqueda “*el individuo que busca, se encuentra*”, es decir, que a la vez que encuentra ese algo, pasa a constituirse como sujeto (ibídem). Así, de acuerdo con este autor, el proceso por el cual el sujeto encuentra creativamente *algo* en la cultura, es la objetivación. Así, el aprendizaje involucra procesos sociales en los que el sujeto adquiere, progresivamente, por medio de la actividad, conciencia sobre ciertas formas “codificadas de pensamiento y de acción” (Radford, 2013, p.13), existentes en la cultura. En esta dirección, comprendemos la objetivación como un proceso social donde el aprendizaje surge desde las unidades dialécticas individuo/colectivo, individuo/cultura. En palabras de Radford (2008):

“Tal como se entiende aquí, la objetivación es más que la conexión de los dos polos clásicos epistemológicos, sujeto y objeto: es de hecho un proceso transformador y creativo entre estos dos polos, donde, en el curso del aprendizaje, el sujeto objetiva el conocimiento cultural y, al hacerlo, se encuentra objetivado en un movimiento reflexivo que puede ser nombrado *subjetivación*. La elaboración del sujeto, la creación de una subjetividad particular (y única) es, por lo tanto, un proceso de subjetivación que es posible por la actividad en la cual la objetivación se lleva a cabo, y por la naturaleza *re-flexiva* del pensamiento [...]”. (Radford,

2008, p.225.)²

Desde lo anterior, vemos el carácter dialéctico del proceso de aprendizaje, desde la teoría de la objetivación asumida por Radford (2008). Dialéctico, dado que se refiere a un movimiento entre dos polos (el sujeto y el objeto cultural), inicialmente en contradicción para luego superar ésta y, así, tornarse unidad en un nuevo nivel. De tal forma que en este nuevo nivel el sujeto se ha transformado ya por la acción del objeto que ha hallado en la cultura, a la vez que lo transforma a él según su forma particular de entender la realidad. Y en esta unidad dialéctica, sujeto/objeto, el primero elabora conocimiento y, por lo tanto, se constituye en un sujeto diferente al del momento inicial.

En esa perspectiva, pensamos que la escuela y, específicamente, los maestros, pueden (re)significar su práctica pedagógica de modo que el estudiante se acerque a los objetos matemáticos desde otro lente. Un acercamiento que le posibilite, a ese estudiante, encontrar en los objetos matemáticos –en ese legado histórico y cultural– un algo que lo movilice y que, a su vez, lo constituya como un sujeto partícipe de la (re)elaboración del conocimiento matemático escolar, en una constante intersubjetividad con sus compañeros de aprendizaje. De esa forma, el conocimiento matemático, posiblemente, se transformaría en un conocimiento con significado y sentido para el estudiante.

Límite: una forma de entender la mutabilidad de las realidades

El concepto de límite se comenzó a gestar en el siglo XVII, en un momento socio-histórico en el que, según Laurentiev y Nikolski (1976), se requería transformar el estudio matemático de las leyes del movimiento, ya que se comprendió que el estado de inmovilidad es inexistente en la naturaleza y que, por lo tanto, el cambio es incesante. Tal comprensión devino de una serie de acontecimientos que se generaban desde dos siglos atrás y que transformaron la visión estática del mundo existente hasta entonces. Así, y como lo plantean estos autores, el final de la edad media estuvo acompañado de importantes exploraciones. Uno de los resultados de estas exploraciones fue el descubrimiento del llamado “Nuevo Mundo”, que permitió la ampliación de las fronteras geográficas y mentales de la época. A finales del siglo XV y comienzos del XVI, Leonardo da Vinci, Rafael y Miguel Ángel resignificaron el concepto de arte con sus innovadoras creaciones. Ya a mediados del siglo XVI, la cosmogonía de la Europa de entonces se sorprendía ante la caída del sistema solar ptolemaico y el nacimiento de la teoría heliocéntrica de Copérnico. Teoría desarrollada y complementada posteriormente por Kepler y Galilei en el siglo XVII, generando, así, una revolución paradigmática de la astronomía y por lo tanto una expansión del campo visual del momento.

Así, entonces, los diversos desarrollos en campos como la navegación, el arte, la astronomía, la mecánica y la tecnología, condujeron a pensar e interpretar el mundo de una forma diferente e impulsar la ciencia hacia la investigación cuantitativa de algunos fenómenos. De esta manera, surgió entonces la necesidad de estudiar problemas matemáticos nunca antes pensados, como el abordaje de las leyes del movimiento. Como lo plantea Caraça (1984), el movimiento no podía ser comprendido entonces tan sólo como una sucesión de estados particulares; se precisaba de un método que permitiera trascender el abordaje estático del movimiento, ya que se había entendido que todas las cosas de la naturaleza estaban en

² Las citas de Radford (2008), Caraça (1984), Moura (2010) y Kopnin (1978) son traducciones de nuestra autoría.

permanente cambio y, por lo tanto, en continua transformación.

En el contexto antes descrito, en el siglo XVII, surgió el problema del movimiento; el cual consistió, esencialmente, según Caraça (1984), en la imposibilidad de hallar la posición de un móvil en determinado instante en un punto de su trayectoria, pues se entendió que entre dos puntos, por más cercanos que estuviesen, existía infinidad de puntos. Este problema exigió la creación de un nuevo instrumento matemático que posibilitara trabajar tanto con estados determinados como con la infinidad de posibilidades entre dos de ellos. El nuevo instrumento fue el infinitésimo. Este concepto fue entendido como la variable representativa de un conjunto de valores sucesivos tan próximos a cero cuanto se desee (Caraça, 1984). La aplicación del nombrado instrumento, en el estudio de lo que sucede en cierto punto en interdependencia con puntos “*arbitrariamente próximos*” (Caraça, 1984, p. 218), y su posterior desarrollo, posibilitó la creación del concepto de límite.

Diferentes matemáticos en distintos momentos históricos —Newton, D’Alambert, Cauchy y Weierstrass, entre otros— definieron el concepto de límite. Sin embargo, por nuestra apuesta epistemológica retomamos en este trabajo el planteado por Caraça (1984, p. 231), formulado de la siguiente forma:

Se dice que la sucesión numerable a_n tiene por límite el número L , cuando n tiende a infinito, y se escribe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \text{ cuando la diferencia } a_n - L \text{ es infinitésima con } \frac{1}{n}.$$

Así, según Caraça (1984), L es, para la sucesión a_n , el resultado de la interdependencia de sus términos. Es decir, que “*lo que pasa en un punto, sólo puede ser entendido en interdependencia con lo que pasa en puntos vecinos*” (p.233).

Si los fenómenos estudiados pueden ser representados por funciones de variable real, entonces el instrumento es el límite de una función real. Este límite es definido por Caraça (1984, p.295) como sigue:

Consideremos la función $y(x)$, real de variable real definida en cierto intervalo y sea a un punto de ese intervalo.

Se dice que $y(x)$ tiene por límite el número L cuando x tiende hacia a , o que $y(x)$ tiende hacia L cuando x tiende hacia a y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a} y(x) = L, \text{ cuando la diferencia } y(x) - L \text{ es infinitésimo con } x - a.$$

Es claro que decir que $y(x) - L$ es infinitésima con $x - a$, es lo mismo que decir que $y(x)$ es vecino de L cuando x es vecino de a .

Así, de acuerdo con Caraça (1984), el límite de la función en un punto no depende del valor exacto de la función en ese punto, sino del conjunto de los valores de la función en la vecindad de ese punto, es decir, es el resultado de su interdependencia.

Según Laurentiev y Nikolski (1976), de igual forma que el concepto de infinitésimo, la idea de límite conlleva a un método —el método de los límites— para estudiar distintos fenómenos

relacionados con el cambio y el movimiento. De acuerdo a estos autores, para hallar el valor de cierta magnitud hacemos una serie de aproximaciones, cada una de ellas más pequeña que la inmediatamente anterior. Así, como lo expresan los mismos autores, “*por este método, que es en esencia profundamente dialéctico, obtenemos una constante fija como resultado de un proceso o movimiento*” (Laurentiev y Nikolski, 1976, p.95). Comprendemos el método dialéctico ahí referido, en el sentido dado por Kopnin (1978). Esto es, como la aplicación por parte del sujeto de unas reglas de acción estandarizadas acorde a las necesidades surgidas en la relación con el objeto de estudio. Dicho de otra manera, la dialéctica como un método de conocimiento de los fenómenos de la realidad objetiva; una realidad de la que hace parte el mismo sujeto que está en permanente cambio, y que, por tanto, no puede estudiarse desde la lógica formal. Así, entender el concepto de límite bajo la óptica dialéctica —método dialéctico— es entender un modo de aproximarse a la esencia de un objeto o fenómeno en constante movimiento y cambio.

La idea de límite fue producto de una construcción social, en un devenir histórico, en la que generaciones durante varios siglos estudiaron problemas, inicialmente del movimiento mecánico que, según Laurentiev y Nikolski (1976), no podían resolverse por métodos simples de la aritmética, el álgebra y la geometría elemental. Se requería de una forma diferente de entender la mutabilidad de la realidad y, para ello, se requería de la creación de un instrumento matemático nuevo —de un método— no antes considerado, que posibilitara estudiar, como la expresa Caraça (1984), el estado de un fenómeno de cualquier naturaleza en interdependencia con sus estados vecinos. El instrumento matemático que posibilitó cuantificar la infinidad de posibilidades de la interrelación de dichos estados fue el concepto de límite.

Objetivo

Analizar el desarrollo del *pensamiento teórico*, en estudiantes de grado once, en su proceso de objetivación del límite de una función.

Metodología

El estudio se está realizando desde del paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico. Nos inscribimos en el paradigma cualitativo dado el interés, a partir de nuestra asunción epistemológica, de interpretar y comunicar una realidad particular de un sujeto. Realidad que está formada por factores socio-políticos y económicos, a través de un devenir histórico. Es este sujeto —el estudiante— en el contexto escolar, el que, como sujetos investigadores, desde nuestra realidad particular, estudiaremos por medio de una participación activa en el aula. Trataremos de superar las descripciones e interpretaciones generales de fenómenos presentes en el proceso de enseñanza y en el proceso de aprendizaje del conocimiento matemático, particularmente en cuanto a la aproximación teórica al concepto de límite de una función, del sujeto investigado en su contexto natural.

A la luz del enfoque crítico-dialéctico, nos basaremos, en primer lugar, en el concepto de dialéctica asumido por Kopnin (1978). Es decir, la dialéctica como un método de conocimiento de la esencia de los fenómenos de la realidad, fenómenos —naturales y sociales— que están en permanente interrelación, movimiento y cambio. Así, basarnos en el concepto de dialéctica, significa acercarnos al entendimiento de los aspectos constituyentes de la realidad del sujeto que vamos a estudiar. Un sujeto que es un ser social, histórico y creador de su propia realidad en interrelación con los otros.

En segundo lugar, concebiremos la relación sujeto/objeto de conocimiento, según los

planteamientos de Sánchez (1998). Esto es, una relación desde supuestos gnoseológicos y ontológicos, entendida no como bipolar sino como unidad, al comprender la dialéctica existente entre ambos –sujeto/objeto– como partícipes activos del conocimiento. En esta línea, analizaremos la relación tejida dialécticamente entre el sujeto estudiante y el desarrollo de su *pensamiento teórico* en el proceso de objetivación del concepto límite de una función. De ese modo, podemos decir que, en tercer lugar, y en concordancia con lo anterior, basaremos nuestros análisis en el carácter transformador del paradigma crítico-dialéctico.

Producción conjunta de registro y datos

Para la producción conjunta de registros y datos partiremos de las *actividades* realizadas por tres estudiantes de grado once de una institución femenina, de carácter oficial, de la ciudad de Medellín. Para dicha producción diseñaremos unas *Actividades Orientadoras de Enseñanza* (Moura, 1998), las cuales propondremos a las estudiantes para desarrollar en el aula de clase, en la que nos desempeñamos como maestras y en la que además actuaremos como observadoras participantes. Dichas *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, planteadas por Moura (2010), se encuentran en el marco de la *teoría de la actividad*. La *actividad* es enunciada por Leontiev (referenciado por Davidov, 1988, p. 28) como:

“Una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino que también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana”.

De esta forma, la *actividad* podría, además, entenderse como las formas de organización al interior de una cultura, orientadas a un fin determinado. Dicha teoría ha sido (re)significada por autores como Moura (1998) en prácticas sociales como la educación y, específicamente, en la *actividad pedagógica*. Esta *actividad pedagógica* está constituida por la *actividad de enseñanza* y la *actividad de aprendizaje*. La *Actividad Orientadora de Enseñanza* es una propuesta de este autor y de su grupo de investigación GEPAPe³, para la organización de la enseñanza y del aprendizaje que, fundamentada en la teoría histórico-cultural, surge como una opción para la actividad pedagógica. Desde la dimensión planteada por dicho autor, la *Actividad Orientadora de Enseñanza* sugiere pensar, planear y desarrollar los encuentros en el aula de clase, de tal manera que se generen interacciones —entre el maestro y el estudiante— que posibiliten (re)significar el conocimiento matemático socialmente construido. Así, consideramos que la *Actividad Orientadora de Enseñanza* es una alternativa para potenciar en el estudiante el desarrollo del *pensamiento teórico*, razón por la cual será el pilar epistemológico y metodológico del trabajo de campo de este proyecto de investigación.

Consideramos importante explicitar que la producción de registros y de datos los realizaremos durante las clases en las que las estudiantes desarrollen las *actividades* propuestas. Así, desde nuestra observación participante asumiremos el papel de “*Quilt maker o Bricoleur*” (Denzin y Lincoln, 2012, p.49) ya que tomaremos partes de la realidad que observaremos, utilizando diferentes herramientas y técnicas, y las uniremos al interpretarlas –desde nuestras subjetividades– para construir un hilvanado con los datos producidos en los diferentes momentos

³ GEPAPe (*Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica*). Es un grupo de investigación de la universidad de Sao Paulo (Brasil) conformado por maestros y estudiantes de maestría y doctorado, que reflexiona sobre la actividad de enseñanza y la actividad de aprendizaje de la matemática, en la perspectiva histórico-cultural.

del trabajo de campo. Un hilvanado que construiremos a través de: videograbaciones de los encuentros en el aula; fotografías que posibiliten evidenciar diferentes episodios; entrevistas semiestructuradas a las alumnas; un diario en el que plasmaremos nuestras reflexiones como investigadoras y otros registros (escritos, orales, audiovisuales) producidos por las estudiantes, y derivados del desarrollo de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*.

Análisis de los datos

El análisis de los datos lo realizaremos mediante el estudio de casos, bajo las consideraciones de Yin (2010) y adoptando una triangulación entre los datos, nuestra mirada como investigadoras y el marco teórico.

Yin (2010) plantea que un estudio de casos “(...) investiga un fenómeno contemporáneo en profundidad y en su contexto de vida real, especialmente cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes”. Así, emplearemos el método de estudio de casos como una herramienta para analizar los datos producidos, porque es nuestro interés interpretar un fenómeno particular en las condiciones naturales en las que se dará la relación entre el sujeto protagonista de la investigación y el objeto de conocimiento matemático, mediados por las particularidades dadas por la cultura que los constituye.

De esta manera, analizaremos el caso de tres estudiantes —que invitaremos a participar en el proyecto y que se tornarán las protagonistas del mismo, elegidas atendiendo a sus intereses hacia el área, hacia el proyecto y hacia el desarrollo de las *actividades* propuestas— en concordancia con Yin (2010) cuando plantea que el caso “debe ser un fenómeno de la vida real, no una abstracción...” (p. 53). Así, el fenómeno u objeto a estudiar será la manera en que se desarrollará —posiblemente— el *pensamiento teórico* de las estudiantes en el proceso de objetivación del concepto de límite, en el contexto escolar al que pertenecen. Para ampliar nuestras comprensiones sobre dicho contexto, consideraremos factores sociales, culturales e históricos (factores constitutivos de ese contexto) como parte de nuestro camino hacia el entendimiento de las particularidades del objeto de estudio, de sus realidades.

Como unidades de análisis tomaremos los enunciados de las estudiantes protagonistas de la investigación en los diferentes momentos del desarrollo de las actividades. Enunciados tanto verbales como no verbales, y enunciados escritos.

Con el fin de hacer un análisis profundo del objeto —o fenómeno— a estudiar, adoptaremos una triangulación entre: los datos producidos y registrados en el trabajo de campo a través del hilvanado explicado en el apartado anterior; los resultados de nuestras observaciones, que irán moviéndose al ritmo de lo hallado en los episodios resultantes de los encuentros en el aula (evidenciados en las unidades de análisis) y, finalmente, —mas, no definitivamente—, entre los fundamentos epistemológicos, gnoseológicos, metodológicos y ontológicos que asumiremos durante todo el proceso investigativo, contruidos a través y desde las bases teóricas abordadas.

Así, inscritas en la investigación cualitativa, a la luz del enfoque crítico-dialéctico y desde el rol de *Quilt Maker*, intentaremos interpretar y comprender, a través de nuestro prisma de investigadoras, la esencia de los elementos constitutivos del proceso en el que, posiblemente, las estudiantes se aproximarán —desde su subjetividad— al concepto de límite de una función y analizaremos el desarrollo de su *pensamiento teórico* imbricado, posiblemente, en el proceso de objetivación.

Consideraciones finales

1. Pensamos que desde las Actividades Orientadoras de Enseñanza, como aspecto teórico-metodológico a ser tenido en cuenta en este estudio, será posible aproximarnos al desarrollo del pensamiento teórico en alumnos de educación media. Un desarrollo de pensamiento de los estudiantes que transgreda la mera aproximación algorítmica de ellos al objeto en cuestión. Superando, tal vez, la brecha entre el objeto matemático y su aprendizaje.
2. Encontramos que el método dialéctico es un método científico que posibilita develar la esencia de los fenómenos de la realidad, fenómenos –naturales y sociales – que están en permanente movimiento y por lo tanto en permanente cambio. Así, basarnos en este método es acercarnos al entendimiento de los aspectos constituyentes de la realidad de los estudiantes, concibiéndolos ante todo, como seres sociales, históricos y creadores de su propia realidad en interrelación con los otros.
3. Consideramos que este estudio podría aportar a la discusión sobre la pertinencia o no de seguir incluyendo el objeto límite en el currículo escolar escuela media del contexto colombiano.

Referencias y bibliografía

- Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México: Publimex.
- Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). *Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad*. Extraído el 11 de Marzo de 2013, de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000200002
- Cantoral R (1995). *Hacia una didáctica del Cálculo basada en la Cognición*. Extraído el 1 de Abril de 2013 de: <http://cimategro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/Hacia%20una%20didactica%20del%20calculo%20basada%20en%20la%20cognicion.pdf>.
- Cantoral R y Farfán R (2003). *Matemática Educativa: Una Visión de su Evolución*. Extraído el 15 de Marzo, de: <http://aprendeonline.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/view/5953/5363>
- Caraça, B de J. (1984). O Método dos Limites. En: *Conceitos Fundamentais da Matemática* (pp. 213-227). Lisboa: Livraria Sá Da Costa Editora.
- Davidov V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Investigación psicológica teórica y experimental*. Moscú: Progreso.
- Denzin, N. y Lincoln, Y. (2012). Introducción General: La Investigación Cualitativa como Disciplina y como Práctica. En: *El Campo de la Investigación Cualitativa: Manual de Investigación Cualitativa* (pp. 43-101). Volumen I. Gedisa: Barcelona.
- Kopnin, P.V. (1978). *A Dialéctica como Lógica y Teoría do Conhecimento*. Río de Janeiro: Civilização Brasileira.
- Laurentiev, M.A y Nikolski, S.M (1976). Límites. En: Aleksandrov A.D et al. *La Matemática: su contenido, métodos y significado* (pp. 108-117). Versión española de Manuel López Rodríguez. Madrid: Alianza Editorial.
- Mattosinho, M. E. (2006). *Mediações Simbólicas na Actividade Pedagógica: Contribuições do Enfoque Histórico-Cultural para o Ensino e Aprendizagem* (Tesis Doctoral). São Paulo: Universidad de São Paulo. Extraído el 14 de Mayo de 2013 de: http://biblioteca.universia.net/html_bura/ficha/params/title/media%C3%A7%C3%B5es-simbolicas-na-atividade-pedagogica/id/53355125.html

- Molfino, V. y Buendía G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Rev. electrón. investig. educ. cienc.* [online] 5(1), 27-41. ISSN 1850-6666. Extraído el 9 de Marzo de 2013 de: http://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S1850-66662010000100003&script=sci_arttext
- Moura, M. O. (1998). A atividade de Ensino como Ação Formadora. In: Castro, Amélia Domingues e Carvalho, Ana Maria Pessoa de (org.) *Ensinar a ensinar* (pp. 143-162). São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda.
- Moura, M. O. (2010 Comp). *A atividade pedagógica na teoria Histórico- Cultural*. Brasília: Liber libro.
- Radford, L (2004). *Semiótica Cultural y Cognición*. Recuperado el 12 de Septiembre de 2010 de: <http://www.martes.laurentian.ca/NR/rdonlyres/808730CD-2FF4-45A3-AB1B-06BAFF87B51B/0/Tuxtla3.pdf>.
- Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In: Radford L, Schubring G, Seeger F (eds) *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Radford, L. (2013). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44. Recuperado el 20 de octubre de 2013, de: <http://www.luisradford.ca/pub/2013%20REDIMAT%20-%203%20key%20concepts%20final%20version.pdf>.
- Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la Investigación Educativa*. Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Yin, R.K. (2010). *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos*. Bookman: Sao Paulo.