Conocimiento matemático especializado de los números racionales- un caso de una profesora chilena

Diana **Zakaryan**
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
diana.zakaryan@ucv.cl
C. Miguel **Ribeiro**
Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações, CIEO, Universidade do Algarve (Portugal); UNESP – Rio Claro (Brasil)
cmribeiro@ualg.pt
Priscilla **Valenzuela**
Colegio San Ignacio
Chile
p_valenzuela_v@hotmail.cl

Resumen

Esta comunicación presenta algunos resultados preliminares de un proyecto que se sustenta, por un lado, en los resultados poco satisfactorios en el conocimiento disciplinar (matemático) de los profesores de matemáticas chilenos en evaluaciones docentes nacionales e internacionales y, por otro, en el rendimiento deficiente de los alumnos en las distintas pruebas de matemática. Así, considerando la importancia del papel del profesor y de su conocimiento en y para el aprendizaje de los alumnos enfocamos nuestra atención en el conocimiento matemático especializado del profesor. Los resultados de la investigación indican la necesidad de una formación de profesores que apunte a desarrollar el conocimiento especializado del profesor y, luego, aproximar la formación de profesores con la práctica docente. En ese sentido son necesarios más estudios que se enfoquen en estos aspectos de comprehender el contenido del conocimiento del profesor y permitan conceptualizar tareas que faciliten relacionar teoría y práctica y desarrollar ese conocimiento.

Palabras clave: conocimiento matemático especializado, modelo MTSK, números racionales, profesores de educación básica, formación de profesores.

Introducción

Consultando los currículos de distintos países (e.g., Chile, Brasil, México, Italia) podemos constatar que en los últimos años, las políticas educativas de la mayoría de los países reafirman la importancia del papel del profesor y la influencia de su desempeño y formación inicial en los logros de los sistemas educativos. Este reconocimiento (y llamada de importancia) del profesor y de su conocimiento ha llevado a la realización de distintos proyectos de investigación internacionales (complementando los que ya se estaban realizando a nivel nacional y local) enfocados en obtener, por un lado, algunos datos sistematizados del conocimiento del profesor, y por otro lado, otros abordajes se enfocan en la búsqueda de un entendimiento más amplio de las relaciones (correlaciones o no) entre ese conocimiento y el desempeño en la práctica. La revisión de los documentos acerca de la evaluación docente en Chile, revela resultados poco satisfactorios de sus egresados tanto en pruebas nacionales INICIA[1] (MINEDUC, 2013), como internacionales TEDS-M[2] (Tatto et al, 2008). Por otra parte, es notorio el déficit del rendimiento de los alumnos chilenos en pruebas nacionales SIMCE[3] (Agencia de Calidad de la Educación [ACE], 2013) e internacionales PISA (OCDE, 2014), particularmente en el área de las matemáticas. Así, y siguiendo las recomendaciones de los organismos internacionales (e.g., UNESCO, OCDE) para mejorar dichos indicadores (Delors, 1994), existe la necesidad de fortalecer programas de formación inicial y continua, donde la especificidad de la actuación docente sea uno de los aspectos (el aspecto) centrales – que tiene implicaciones tanto en las dimensiones del conocimiento matemático cómo didáctico, bien cómo un control del rendimiento del docente.

La mejora de la práctica de los profesores, y de las aprendizajes y resultados de los alumnos, pasa también por una mejora en el conocimiento del profesor, ya que este conocimiento es el factor que más influye en los aprendizajes y resultados de los alumnos (e.g., Nye, Konstantopoulos, & Hedges, 2004; Ma, 2010). En ese sentido, tomando en consideración la diversidad de perspectivas posibles al conocimiento del profesor, y teniendo cómo punto de partida la necesidad de fortalecer ese conocimiento relacionándolo con las situaciones de la práctica, consideramos el conocimiento del profesor desde la perspectiva del *Mathematics Teachers Specialised Knowledge* – MTSK[4] (e.g., Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013). Según la problemática mencionada, emerge la necesidad de obtener una comprensión más amplia y profunda sobre las situaciones matemáticas críticas en la práctica y sobre los motivos que las tornan críticas para que sea posible posteriormente, elaborar programas de formación que se enfoquen donde son, efectivamente, necesarios (e.g., Ribeiro & Carrillo, 2011a). Entre esas situaciones matemáticamente críticas, los racionales, son uno de los contenidos identificados desde hace tiempo. Ya Kieren (1976) se refería a las dificultades de los alumnos en el dominio de los racionales, en particular en las fracciones. Y desde entonces hasta nuestros días, la mayoría de los trabajos se han enfocado en los alumnos y en sus resoluciones, justificaciones o su comprensión sobre algunos aspectos de los racionales, dejando al profesor y

[1] La evaluación Inicia es un sistema creado por el Ministerio de Educación de Chile, con el propósito de verificar la calidad de la Formación Inicial Docente. (http://www.evaluacioninicia.cl)
[2] Teacher Education and Development Study in Mathematics (http://www.iea.nl/teds-m.html)
[3] Sistema de Evaluación de la Agencia de Calidad de la Educación de Chile. (http://www.agenciaeducacion.cl/simce)
[4] Optamos por utilizar la nomenclatura en inglés de modo a que no nos quedemos con problemas de traducción entre los distintos elementos del grupo y también de forma a homogeneizar las discusiones.

su papel en los aprendizajes (y resultados) de los alumnos fuera del foco de atención (e.g., Pinto & Ribeiro, 2013a).

Con la intención de poder contribuir de forma activa y participativa a la mejora de los aprendizajes y resultados de los alumnos, hemos empezado un proyecto más amplio, del cual en el presente artículo presentamos solo una parte donde pretendemos aportar datos para su discusión y reflexión basadas en episodios de clase que permitirían profundizar y avanzar en las posibles propuestas a efectuar posteriormente con el fin de mejorar la formación de los profesores (otra fase del presente proyecto). Así, en este documento abordamos la siguiente cuestión: *¿qué conocimiento matemático – en el sentido del MTSK -evidencia en el aula un profesor de educación básica, mientras imparte el contenido de los números racionales*?

La opción por enfocarse en la práctica docente mientras el profesor imparte el contenido de los números racionales, como hemos mencionado anteriormente, se relaciona con el hecho de que varias investigaciones se refieren a éste como un contenido difícil para los alumnos, y que esa dificultad se relaciona también con las dificultades de los profesores a la hora de abordarlo ((e.g., Behr, Harel, Post, & Lesh, 1993; Gairín, 2001; Fandiño, 2009; Pinto & Ribeiro, 2013a, 2013b; Streefland, 1991; 1997) – de ahí que se ha considerado un contenido potenciador de ocurrencia de situaciones matemáticas críticas, y, por tanto, un contexto rico en oportunidades de aprender sobre el conocimiento del profesor. Esta dificultad en la enseñanza de los racionales en educación básica sigue siendo foco de varios estudios (pero son necesarios otros más, en concreto en Chile) que atribuyen esas dificultades al hecho de que los profesores (entre los estudiados) tienen conocimientos fragmentados de y sobre este contenido (e.g., Ma, 2010; Pinto & Ribeiro, 2013a). Sin embargo, poco se sabe al respecto de los profesores de básica chilenos, siendo ésta otra de las justificaciones de la importancia del trabajo que se presenta.

Marco de referencia

La necesidad de caracterizar el conocimiento necesario para enseñar matemáticas ha llevado a la elaboración de distintos modelos del conocimiento del profesor (e.g., Ball, Thames, & Phelps, 2008; Bromme, 1994; Carrillo et al., 2013; Rowland, Huckstep, & Thwaites, 2005; Shulman, 1986). Dentro de los diferentes aspectos diferenciados en el conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de la matemática, nos interesan especialmente aquellos más intrínsecamente ligados a la matemática y su enseñanza y aprendizaje, correspondiendo ésta a una de las justificaciones para optar por el MTSK. Esta conceptualización se encuentra en desarrollo (como parte del trabajo desarrollado por el grupo de investigación de la Universidad de Huelva – España) y este trabajo pretende contribuir también con algunos datos que permitan profundizar en el contenido de los distintos subdominios de esta conceptualización (véase descripción más abajo).

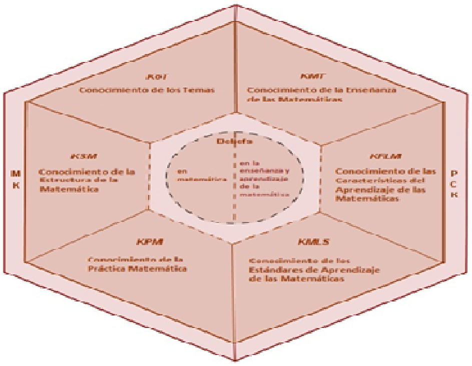

Figura 1. Subdominios del MTSK (Carrillo et al. 2013).

La conceptualización del MTSK (Figura 1), se compone en dos grandes dominios. A la izquierda tenemos los tres subdominios del Conocimiento Matemático (*Mathematical Knowledge* – MK) y a la derecha los tres del Conocimiento Didáctico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK). Hay que enfatizar que las creencias del profesor asumen un papel central en toda su práctica, y luego son una componente central de su conocimiento (e.g., Ribeiro & Carrillo, 2011a). Dado que nuestro foco de interés en este artículo se centra, esencialmente en lo que se refiere al conocimiento del contenido matemático (ya que se asume que este sustenta el desarrollo del PCK (Ma, 2010), enfocamos nuestra atención esencialmente en los tres subdominios de este dominio. Así, en el MK tenemos: Conocimiento de los Temas *(Knowledge of Topics – KoT);* Conocimiento de la Estructura Matemática *(Knowledge of the Mathematical Structure – KSM) y* Conocimiento de la Práctica Matemática *(Knowledge of the Mathematical Practice – KPM).*

El KoT se refiere al conocimiento del profesor asociado a los contenidos matemáticos que pretendemos que aprenda el alumno, con un nivel de profundización mayor, relacionado, entre otros, con aspectos fenomenológicos, significados, definiciones y ejemplos, que caractericen aspectos del tema abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en manuales y textos matemáticos, y puede variar de acuerdo al currículo de cada país. Por ejemplo, saber la fenomenología de los números racionales, su definición (u incluso distintas definiciones, dependiendo del punto de partida u del abordaje histórico). En el *KSM*, se incluyen las relaciones que establece el profesor entre distintos contenidos matemáticos, ya sea en un curso específico o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. Se trata de un sistema integrado de conexiones que le permita comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante el tratamiento a través de una visión avanzada. Un ejemplo de este subdominio podrá referirse al conocimiento del profesor de la estructura de los distintos conjuntos numéricos (e.g., naturales, enteros, racionales, reales) y conexiones entre dichos conjuntos ($\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$). Al hablarnos del *KPM,* nos referimos al conocimiento de las formas de conocer, crear o producir en matemáticas, conocimiento de aspectos de la comunicación matemática, del razonamiento y la prueba. Este subdominio se caracteriza por enfocarse en la identificación de prácticas propias del trabajo matemático, ligadas a un tema específico o a la matemática en general. Saber que una manera de proceder en matemáticas es buscar y crear patrones, sería un ejemplo de este subdominio.

Contexto y Método

Lo que se presenta en este documento es parte de un estudio más amplio que se enfoca en caracterizar aspectos del conocimiento especializado del profesor enfocando en las necesidades formativas de los (futuros) profesores de matemáticas teniendo como último fin contribuir a la mejora de la calidad del desempeño profesional en sus aulas escolares. Este estudio se embarca en el paradigma interpretativo y corresponde a un estudio de caso instrumental (Stake, 2007). De ahí que hemos considerado más conveniente optar por un estudio de caso que tiene un valor particular para los investigadores en el ámbito educativo (Cohen & Manion, 2002; Stake, 2007), dado que se caracteriza por su orientación hacia la comprensión profunda de los "cómo" y "por qué" de una entidad bien definida como una persona, un aula, un curso, una institución o un programa educativo (Ponte, 2006).

La informante (Ana) es una profesora del 8° grado de la educación básica chilena (alumnos de 13-14 años), cuenta con siete años de experiencia y ha obtenido el título de Profesora en Matemáticas y Licenciada en Educación. La recogida de la información se ha realizado a través de *observaciones no participante de aula* (Cohen & Manion, 2002) mientras Ana imparte la unidad relacionada con los números racionales, complementadas con grabaciones en video de las siete sesiones de clases que ha dedicado al tema. Ha sido realizada también una entrevista semi-estructurada enfocada en algunos aspectos de un análisis previo de su práctica con el fin de clarificar algunos aspectos de los subdominios del MTSK en relación con el tema tratado – esencialmente a lo que se refiere a los aspectos que no se han observado (directamente) en la práctica en el aula, como por ejemplo, el conocimiento acerca del currículum. Además, dicha entrevista ha tenido como objetivo profundizar en la comprensión de sus modos de proceder y así comprender si es consciente del conocimiento observado (Rojas, Flores, & Carrillo, 2013) y bien para identificar (y validar) aspectos del conocimiento no observado.

Todas las clases han sido transcritas, incluyendo en ellas aspectos de las interacciones entre profesora y alumnos (por visualización del video), y a partir de esas transcripciones hemos hecho la modelización de la práctica de la profesora recorriendo a una adaptación del modelo propuesto por Ribeiro, Carrillo, & Monteiro (2012), para modelar la enseñanza. En particular, en este trabajo, esa adaptación nos ha llevado a considerar apenas los subdominios del MK del modelo MTSK (Carrillo et al., 2013). El primero paso para la modelización se refiere a la identificación del objetivo matemático especifico de la profesora en cada momento, lo que hace posible la división de la sesión en episodios fenomenológicamente coherentes [i, j][5], identificando los eventos iniciales y finales (Ilustración 1). En esta fase del proyecto nos centramos en cada uno de esos episodios particulares (y en los que se asocian con objetivos similares), y en estos se hace el análisis del conocimiento del profesor considerando los distintos subdominios del MTSK – procurando contribuir también (siempre) con nuevas informaciones relativas al contenido de cada uno de esos subdominios.

[5] Episodio j de una sesión concreta i.

[i. j] Descripción del episodio (línea de inicio – línea de fin) **Objetivo general:** Identificación del objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor. **Evento desencadenante:** Evento que funciona como causa de inicio del episodio. **Conocimientos (MK):** Identificación de los conocimientos del profesor evidenciados durante ese episodio. Conocimiento de los temas (KoT) Conocimiento de la estructura matemática (KSM) Conocimiento de la práctica matemática (KPM) **Evento de término:** Evento que funciona como causa de término de ese episodio.

Ilustración 1. Representación del instrumento de modelización de la práctica.

Una vez realizada la modelización de las clases (y discutida su coherencia de modo que se pudiera identificar la modelización de la práctica de la profesora al impartir este tema de una forma más general), se ha procedido al análisis de la entrevista, buscando aspectos que permitieran complementar los resultados obtenidos, así como identificar y profundizar en la comprensión de los distintos subdominios del MK que la profesora pone en acción.

Análisis

En este apartado presentamos el análisis de la primera de las siete sesiones de la profesora Ana, dedicada a los racionales. Ana empieza esta sesión comunicando a los alumnos los objetivos generales que pretende alcanzar respecto al dicho contenido y cómo lo va a evaluar (correspondiendo al primero episodio, [1.1]). Tras esa introducción, inicia el segundo episodio [1.2] con la pregunta dirigida a los alumnos: "*¿Qué números conocen ustedes desde que empezaron a venir al colegio?*" Los alumnos comienzan a nombrar los naturales, negativos, fracciones, decimales. Ayudándoles a precisar y poniendo algunos ejemplos de los números nombrados en la pizarra, Ana concluye que todos estos números que estudiaron por partes en diferentes niveles de su escolaridad, son números racionales. Luego presenta la definición de los números racionales (pide a los alumnos que la copien), como aquellos que se pueden escribir como la división de dos números enteros, siendo el denominador distinto de cero, y da varios ejemplos de distintos números (KoT). Mencionando que van a tener algunos ejemplos dice "*entonces nos vamos a quedar con algunos ejemplos, no con todos*", escribiendo en la pizarra "0; 1; -5; -0,5; 0,2; 1/3; 3/4", lo que lleva a problematizar la cuestión del lenguaje utilizado y la corrección y adecuación matemática que deberá existir a lo largo de la escolaridad (en este caso relacionado con la infinitud de los números – KSM).

A continuación, Ana menciona que va a introducir una nueva notación y que el **Q** deriva de "cociente" (**Q**uotient) (KoT), explicando el significado de la palabra racional: *"Racional viene asociada a "Ración", pero de esa ración de repartir, de racionar, no de razonar, no de pensar"*. Esta explicación dada por Ana, es la que se encuentra en las páginas de internet (e.g., Wikipedia: "*El término «racional» alude a una fracción o parte de un todo*"). Sin embargo, si consideramos este tipo de definición, y se queda como el único que se explora con los alumnos, ellos van a construir una visión parcial de la noción de números racionales – a semejanza de lo que ocurre si solo se trabaja las fracciones como parte-todo (e.g., Lamon, 2007; Pinto & Ribeiro, 2013a). Así según otras fuentes "matemáticamente más adecuadas" (e.g., Bourbaki, 1998), se hace referencia a la traducción de la palabra alemana "quotient" como "ratio" al inglés que tiene significado de *relación o proporción que se establece entre dos cantidades o medidas*.

El tercer episodio se asocia con el aviso de la profesora respecto a que en adelante jugarán el dominó de números racionales, y a la explanación por la profesora de algunas relaciones (equivalencias) entre los números que van a necesitar para poder jugar el juego. En el cuarto episodio Ana enuncia tres formas de representar el conjunto de números racionales:

155	Profesora	(Escribe en la pizarra: Q = {a/b, a ε Z, b ε Z, b $\neq$ 0})
156		Entonces simbólicamente ahí está el conjunto de los números
157		racionales. Todos los elementos que se pueden escribir de esa forma,
158		donde cada uno de ellos sean enteros, pero el que está como
159		denominador jamás puede ser 0.
…		…
168	Profesora:	El segundo: (Escribe) Usando conjuntos, y este es el que uno
169		siempre ve en internet, o a veces ve en los libros. Que primero
170		están los naturales, luego están los números enteros, y hacen otro
171		dibujito, y luego tenemos los racionales. Por lo tanto, los números
172		que son racionales consideran a los enteros y a los naturales, están
173		contenidos uno dentro del otro.
…		…
181		… Ya, y el último es la recta numérica.

Figura 2. Extracto del episodio [1.4].

En este episodio, al mostrar a los alumnos tres formas "distintas" de representar el conjunto de números racionales se pueden observar componentes de su KoT, bien como de su KSM. El hecho de empezar por la presentación simbólica de **Q** y terminar con la referencia a la recta numérica es un conocimiento que se encuentra en el KoT, pero el hecho de hacer conexiones con otros conjuntos (**N** $\subset$ **Z** $\subset$ **Q)** se puede considerar parte de su KSM.

Efectuando la modelización de la práctica para este episodio (también para que se entienda mejor la metodología empleada), obtenemos:

[1.4] Representaciones de los números racionales (142-184)
Objetivo general: Introducir representaciones de los números racionales.
Evento desencadenante: Enuncia tres representaciones de los números racionales.
Conocimientos en acción:
KoT
Conocer diferentes representaciones del Q (simbólica, figural, gráfica) (155-181).
Saber la notación de los números racionales (155).
KSM
Conocer la estructura de los conjuntos numéricos (169-173).
Evento de Término: Termina el comentario.

Ilustración 2. Modelización del cuarto episodio de la primera sesión [1.4].

De este modo, en el cuarto episodio de la primera sesión [1.4] se identifica el *conocimiento de los temas* (KoT) de la profesora relacionado con la notación simbólica de los números racionales, con la representación del conjunto de los racionales como ampliación de los números naturales y enteros, y mediante la recta numérica (155-181). Por otra parte, Ana revela también aspectos de su *conocimiento de la estructura matemática* (KSM) cuando hace notar a los alumnos la estructura de los números racionales (169-173).

En el siguiente episodio asociado al objetivo de explorar la densidad de los números racionales, Ana dibuja el segmento [0,1] y empieza a ubicar en él los números que le van diciendo los alumnos, cuando son solicitados para "hacer un zoom", cada vez reduciendo el intervalo entre dos números. Esta solicitación revela un KMP asociado a la exploración de la idea de densidad de los números racionales en la recta numérica, conocimiento que, a su vez, se asocia a un KoT (obviamente ya que este sustenta los demás) sobre esta temática. Termina la exploración solicitando que los alumnos escriban en su cuaderno lo que denomina "*una característica esencial del conjunto*", y lo formula: *"El conjunto de los racionales se dice que es denso, ya que entre dos números racionales hay infinitos racionales".*

A continuación Ana explica a los alumnos cual es el proceso para pasar de un número en representación fraccionaria a decimal, dando ejemplos cuyas representaciones envuelven decimales finitos, infinitos periódicos y semiperiódicos, dando la definición de qué es un decimal periódico y semiperiódico – KoT ("*decimal semiperiódico es aquel que tiene un anteperiodo y luego un periodo"*) terminando con la conclusión (que los alumnos tienen que copiar en su cuaderno), a forma de regla, sobre cómo transformar un número en representación de fracción a decimal: "*Se divide el numerador con el denominador para transformar una fracción a decimal"*. Con el fin de consolidar lo que han trabajado en la clase Ana escribe algunos ejercicios en la pizarra y los alumnos, trabajando unos minutos en sus sitios, salen a la pizarra para resolverlos (trasformar fracciones a decimales y clasificarlos).

Por último, se concluye la clase con un trabajo individual de los alumnos, en el cual deben responder dos preguntas (¿Qué es un número racional? ¿Por qué el conjunto se dice denso?) en su cuaderno y entregarlo a la profesora (estos dos momentos se corresponden a dos episodios distintos ya que se asocian a dos objetivos distintos – Ribeiro et al., 2012).

Resultados y discusión

A partir del análisis de todas las siete sesiones (a semejanza de lo que se ha presentado anteriormente para la primera sesión) podemos sintetizar el *conocimiento matemático* (MK) de Ana que se evidencia (en términos absolutos, pero muy informativos) mientras enseña el contenido de los números racionales – Tabla 1.

Tabla 1

Síntesis de conocimiento matemático observado

Episodio/ Subdominios de MK	[1.2]	[1.4]	[1.5]	[1.6]	[2.2]	[2.3]	[2.5]	[2.6]	[3.2]	[4.1]	[4.2]	[7.2]	[7.3]
KoT	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
KSM	x	x										x	
KPM			x		x								

Como se puede apreciar en la Tabla 1, el *conocimiento matemático especializado* de Ana se manifiesta, esencialmente, a través del subdominio KoT. Cabe destacar que, aunque eso no se refleje en la tabla anterior (ya que solamente identifica la presencia, y no, el determinado subdominio), en algunas situaciones, el contenido de los subdominios se asocia a situaciones matemáticamente criticas (Ribeiro & Carrillo, 2011a) y que deberán ser foco de atención, de análisis y discusión más detallada de modo que se pueda contribuir a la mejora de la práctica y de la formación. En este conjunto de siete clases dedicadas a los racionales, Ana revela aspectos del KoT relacionado con: (i) las definiciones (de los números racionales, naturales y enteros); diferentes tipos de representaciones (simbólica, figural, gráfica – recta numérica); (ii) las propiedades de los números racionales (cuerpo conmutativo con las propiedades de adición y multiplicación, definido como cociente de los **Z**, **Q** denso en **R**, relaciones de equivalencia y orden de **Q**, existencia de neutros e inversos, etc.); (iii) ejemplos de números racionales en sus diferentes notaciones (decimal, fracción, entero); (iv) las definiciones de distintas clases de números (decimal finito, infinito periódico y semiperiódico); (v) navegación entre distintas formas de representación (transformar decimales a fracción y viceversa); (vi) conocer distintos métodos de comparación de cantidades (ampliación, simplificación, m.c.m); (vii) las propiedades de las cuatro operaciones básicas envolviendo racionales (suma, resta, multiplicación y división); (viii) las reglas de la divisibilidad, la definición de una fracción irreducible y de los racionales equivalentes.

Esta diversidad y multiplicidad de los aspectos del contenido matemático que cumple el profesor es una de las características que hace difícil la discusión (y acuerdo) sobre cuál se corresponderá a un conocimiento ideal del profesor de matemáticas, y cuál será el contenido de tal conocimiento. Por otra parte, de forma complementaria, para abordar los distintos contenidos, poseer un KoT (rico y amplio), aunque es necesario, no es suficiente, ya que la actividad docente demanda más que, entre otras, conocer los mismos contenidos de alumnos con un nivel de profundización mayor, ejemplos y definiciones, conocer y entender los contenidos de la matemática escolar así como comprender sus propiedades y significados de manera fundamentada (Pinto & Ribeiro, 2013a, 2013b). De ahí que (obviamente) durante la práctica se observan otros subdominios del conocimiento del profesor (lo que, en sí, justifica y es justificación para la conceptualización del MTSK) tal como es, en este caso particular de la primera clase relacionada con los racionales, la evidencia de un KSM (en dos ocasiones) hace referencia a la inclusión de conjuntos ($\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$), y a la infinitud de los números, manifestando un conocimiento de existencia de relaciones internas entre los distintos conjuntos numéricos. En cuanto al KPM, este se manifiesta cuando Ana invita a los alumnos que busquen un determinado patrón: “*Hay que hacer bien una regla para que esto salga bien. Se trata de encontrar algún patrón. Tiene ese decimal, le da esa fracción; tiene ese, le da esa fracción…*”. Aspectos del KPM se revelan también en una situación asociada a la realización de una demostración informal de la existencia de infinitos números entre dos números racionales – recorriendo a las semisumas, empezando por la semisuma de 0 y 1.

Al analizar la práctica docente muchas cuestiones emergen sobre lo que se hace y/o se podría hacer/haber hecho. En particular, como forma de cuestionar sobre cuál sería el contenido de cada uno de los subdominios, y a qué corresponderá un conocimiento ideal del profesor, nos podemos enfocar tanto en las situaciones matemáticamente críticas o bien, de forma complementaria, en las oportunidades perdidas en situaciones matemáticamente ricas. Esto nos hace cuestionar, y es en esta búsqueda de respuestas que podremos contribuir al avance del campo –en particular, a lo que se refiere al MK del profesor. A modo de ejemplo, al analizar este estudio de caso, nos podríamos cuestionar sobre las explicaciones asociadas a los porqués de los distintos procedimientos que se han llevado a cabo, de manera que los alumnos no encaren los procedimientos matemáticos por si, o consideren la Algebra por la Algebra (e.g., Hielbert & Lefevre, 1986; Charalambous, Jakobsen, & Ribeiro, 2013)- permitiendo que éstos puedan atribuir sentido a lo que hacen y ser consciente por qué lo hacen en cada momento, con una perspectiva de futuro pero conectándolo también con lo que ya han hecho en las etapas anteriores – de forma matemáticamente válida.

Durante el análisis de la práctica de Ana observamos que no se ha provocado en los alumnos la oportunidad de hacer/explorar un cuestionamiento o una explicación del sentido matemático de los procedimientos para los distintos hechos matemáticos que se han explorado en la secuencia de clases. Por ejemplo, cuando transforman los decimales periódicos y semiperiódicos a fracciones, la profesora da un ejemplo ya resuelto y los alumnos tratan de deducir el patrón para el resto de los decimales: *"No le puedo decir, no le puedo decir por qué están estos números, pero son esos, las fracciones asociadas al decimal periódico*" – que se asocia a una exploración de la matemática cómo un producto final y no cómo un proceso, algo que nos hace también reflexionar sobre nuestro propio papel, y lo de la formación, en la mejora de la práctica. El hecho de que los alumnos puedan buscar patrones es una buena actividad a proponer, sin embargo para que esto no se quede solo al nivel de los procedimientos (permitiendo contribuir a un desarrollo de la comprensión y de las diferentes capacidades matemáticas) es esencial promover un entendimiento profundo de los porqués asociados a estos procedimientos, de forma que puedan transponer del nivel de ejercitación a un nivel de comprensión matemática que les permita entender las posibilidades, o no, de transferir a otros casos similares o hacer generalizaciones. Cuando preguntamos a la profesora en la entrevista, si considera importante que sus alumnos hicieran esas transformaciones sin entender la fórmula, Ana contesta con una visión de la matemática como un producto final, basando su enseñanza a esa concepción (conjunto de reglas que sus alumnos tienen que replicar, aunque no las entiendan).

> *"Primero lo decidimos así, sin entender la fórmula, porque en el primero medio el profesor les explica, suponemos que tendrían mayor madurez para entender el porqué. Aunque tampoco entienden, tampoco se logra entender. Hay una cosa matemática ahí que hay que sumar, luego restar, multiplicar por no sé cuánto y uno no sabe por qué, nadie sabe eso".*

Ana revela que aunque sepa realizar la transformación y lo haga con cierta habilidad, su propio conocimiento es procedimental, no es consciente de las razones matemáticas que sustentan esos procedimientos (*uno no sabe por qué, nadie sabe eso*), por tanto lo enseña tal como lo sabe ella, sustentando de esa forma en el conocimiento de su propia práctica. Por otra parte, aun durante la entrevista haya proporcionado una explicación adecuada al porqué de que los números racionales se definen con el denominador distinto de cero, en la práctica con los alumnos no lo ha explorado. Este hecho resalta aún más la importancia de múltiples fuentes de obtención de información (e.g., Rojas et al, 2013) para una comprensión más completa del conocimiento del profesor.

Asimismo, no hemos observado la intención de la profesora de poner los cimientos adecuados para los contenidos que aprenderán los alumnos después, que sería el KSM. De acuerdo con Ma (2010), la inclusión de ideas básicas del tema tratado en la enseñanza prepararía a los alumnos para relacionar el aprendizaje actual con el futuro. Por ejemplo, la pregunta que surge tras la representación de los números racionales en la recta y la discusión sobre su densidad en ella, es *¿si todo número de la recta tiene la representación de un número racional*? Este cuestionamiento podría ser base para el entendimiento de los alumnos de que en la recta se pueden representar muchos más números que los racionales, cuando adelante se introducen los números irracionales y se extiende a los números reales (Markarian, 2004).

Comentarios finales

El modelo MTSK nos ha permitido diferenciar distintos componentes del conocimiento matemático que la profesora manifiesta en su práctica en el aula. Las reflexiones acerca del conocimiento matemático ideal del profesor para el contenido de los números racionales nos lleva a considerar los tres subdominios de forma interconectada. Este estudio de caso nos permite identificar un conjunto de conocimientos (contenido de los distintos subdominios), bien como algunos aspectos en que parece existir la necesidad de un foco más detallado en la formación, de modo a contribuir a la mejora de la práctica lectiva, la comprensión y las capacidades matemáticas de los alumnos. Mientras el KoT es básico, el KSM da sentido a los conceptos involucrados en cuanto a sus relaciones internas y externas, y el KPM en cuanto al sentido matemático de los hechos y procedimientos.

Ahora bien, uno de los desafíos para los formadores de profesores sigue siendo el mejoramiento de la formación de los docentes en el área de la matemática tendiendo a que estos desarrollen conocimientos profundos y vinculados tanto con los contenidos matemáticos avanzados como con los abordados en las clases de matemática en la escuela. Muchas veces se da por hecho que al cursar los contenidos matemáticos durante los estudios en la universidad, los futuros profesores serán capaces de hacer ese complejísimo trabajo de relacionar y desarrollar la comprensión de los conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y de los conceptos elementales a través de una visión avanzada (en el sentido de Carrillo et al., 2013). Esa comprensión significativa de las matemáticas que se caracteriza por la amplitud, profundidad y rigurosidad (Ma, 2010) le permitiría al profesor aprovechar las oportunidades para favorecer un aprendizaje significativo de sus alumnos. De modo que la aproximación y adecuación entre la formación de profesores y la práctica se torne efectiva, nos cumple a nosotros, como formadores de profesores, la responsabilidad de preparar e implementar tareas que permitan desarrollar tal conocimiento (e.g., Ribeiro, Mellone, & Jakobsen, 2013) posibilitando que esas tareas sean un puente entre teoría y práctica.

Referencias y bibliografía

Agencia de Calidad de la Educación. (2013). *Informe Nacional de Resultados Simce 2012*. Santiago de Chile.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). NJ: Lawrence Erlbaum.

Bourbaki, N. (1998). *Éléments de mathématique : Algèbre.* Reprinted as *Elements of Mathematics: Algebra I, Chapters 1-3.* Berlin: Springer-Verlag.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teacher's professional knowledge. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straesser & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Charalambous, C., Jakobsen, A., & Ribeiro, C. M. (2013). *Using a Practice-Based Approach to understand Horizon Content Knowledge.* Paper presented at the EARLI, 15th Biennial conference - Responsible teaching and sustainable learning Munique.

Cohen L., & Manion L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Delors, J. (1994). Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI. *La educación encierra un tesoro.* Santillana Ediciones UNESCO.

Fandiño, M. I. (2009). *Las Fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Gairín, J.M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos, 4,* 137-159.

Hielbert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hielbert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: LAurence Erlbaum Associates.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales.* Santiago de Chile: Academia Chilena de Ciencias.

Markarian, R. (2004). Rompiendo unidades IV. *Correo del Maestro, 99.* Disponible en http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2004/agosto/1anteaula99.htm.

Ministerio de Educación de Chile. (2013). *Evaluación Inicia. Presentación de resultados 2012.* Santiago de Chile.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *26*(3), 237-257.

OCDE. (2014). *PISA 2012 results in focus: what 15-year-olds know and what they can do with that they know*. Paris: OCDE.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013a). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas, 3*(1), 85-105.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013b). Diferentes significados das frações - conhecimento mobilizado por futuros professores dos primeiros anos. In R. Cadima, H. Pinto, H. Menino & I. S. Simões (Eds.), *Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação* (pp. 209-217). Leiria: ESECS.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011a). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 41-48). Ankara, Turkey: PME.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011b). Discussing Maria's MKT and beliefs in the task of teaching. In J. Novotná, & H. Moraová (Eds.), *Proceedings do International Symposium Elementary Maths Teaching (SEMT 11)* (pp. 290-297). Praga, República Checa: Charles University, Faculty of Education.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15*(2), 277-310.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - mathematics learning across the life span (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel, Germany: PME.

Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 4*, 47-64.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed? In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective*. Londres: Psychology Press, Lda Publishers.

Tatto, M.T., Schwille, J., Senk, S.L., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. Amsterdam: IEA.