La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente

Víctor **Larios** Osorio
Facultad de Ingeniería (Maestría en Didáctica de las Matemáticas)
Universidad Autónoma de Querétaro
México
vil@uaq.mx

Resumen

El aprendizaje de la demostración en los niveles educativos primario y secundario (6 a 18 años) comúnmente ha sido mitificada y relegada a momentos específicos de los currículos, incluso ha sido eliminado. Sin embargo, al ser parte primordial en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, la validación es un aspecto que debe ser considerado en el contexto escolar considerando no sólo aspectos ontológicos y semióticos, sino cognitivos, pragmáticos y socio-culturales. Se presenta una reflexión al respecto y la propuesta de herramientas metodológicas que permiten, de inicio, una evaluación en el progreso del aprendizaje de los alumnos sobre la demostración. Se señalan algunas investigaciones realizadas y resultados obtenidos, para plantear un método para incorporar la construcción continua de la demostración en los contextos escolares. En la parte final se señalan algunos aspectos que aún deben ser investigados para poder abordar adecuadamente este aspecto de las Matemáticas en la escuela básica y media.

Palabras clave: validación matemática, aprendizaje de la demostración, aprendizaje de las Matemáticas, geometría dinámica.

Introducción

La demostración matemática forma parte del conocimiento científico constituido en las Matemáticas. A lo largo de la historia de la humanidad la idea de demostración, como medio de validación de un conocimiento matemático, ha ido cambiando bajo la influencia de los desarrollos filosóficos, matemáticos, técnicos y científicos, por no decir que también de la ontología de los objetos matemáticos y la semiótica involucrada. Es decir, la idea de demostración, los requisitos para aceptar una, el rigor utilizado, no ha sido estática y absoluta.

En este proceso los matemáticos en general, como menciona Nicolas Bourbaki (1972, pág. 25) “la historia del concepto de verdad en matemáticas corresponde, pues, a la historia de la filosofía y no a la de las matemáticas, pero la evolución de este concepto ha tenido una influencia innegable sobre la de las matemáticas, y esto hace que uno podamos dejar de tenerla en cuenta”. Es decir, los matemáticos no están interesados o no necesitan pensar en esto para llevar a cabo su trabajo, pero no quedan exentos de estas influencias por desarrollarse académica y profesionalmente en ambientes sociales específicos. Finalmente, como lo expresaba Wilder “lo que constituye una ‘demostración’ varía de una cultura a otra y de una época a otra” (Perero, 1994, pág. 102). En efecto, la demostración, como medio de validación matemático, no puede ser una referencia absoluta e inamovible en el campo de la Educación Matemática y menos si se consideran aspectos cognitivos, semióticos y socio-culturales que están involucrados en los procesos educativos.

Aún así la validación del conocimiento matemático es una parte epistemológicamente importante de la construcción del mismo, por lo que es necesaria su inclusión en el aprendizaje de las Matemáticas.

En este trabajo se hace una revisión sobre la necesidad de incorporar el aprendizaje de la validación de los conocimientos matemáticos que desarrollan los alumnos de los niveles básico y secundario a través de la producción de justificaciones y demostraciones. También se considera el hecho de que una evaluación de esto debe ser considerada para poder determinar los avances en los aprendizajes de los alumnos, por lo que se proponen algunas herramientas que pueden servir como base para avanzar en esta dirección.

En la parte final de este escrito, y con base en algunos proyectos que se han realizado, se propone una manera de aproximarse al aprendizaje de la demostración desde un punto de vista pragmático y activo, basándose en el hecho de que el proceso de construcción de la demostración (y de las Matemáticas) es cognitivamente continuo.

La necesidad de la validación en el desarrollo del conocimiento

Tradicionalmente en las ciencias experimentales se le enseña a los alumnos que la validación forma parte del “método científico”, pues es el medio en el que el individuo (y la comunidad científica) verifica que lo que se está aprendiendo o desarrollando puede ser tomado como cierto y así avanzar en el conocimiento (personal o colectivo).

De esta manera los individuos experimentan con objetos y luego validan sus observaciones. Siempre considerando un marco de referencia (teórico) y siguiendo ciertas reglas (metodología) que ofrecen cierta garantía de que los resultados validados tendrán, valga la redundancia, validez.

En el caso de las Matemáticas se tienen dos diferencias: La primera es que se ha creado la imagen de que no es una ciencia experimental y la segunda, que ha contribuido para tener la anterior, es la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos. La forma que tiene la demostración matemática es consecuencia de dicha naturaleza:

“La demostración formal nace como una respuesta a una demanda continua de justificación, una demanda que se remonta a Aristóteles y Euclides, a través de Frege y Leibniz. Ha habido siempre una necesidad de justificar nuevos resultados (…), no siempre en el sentido limitado de definir su verdad, sino más bien en la más amplia acepción de suministrar razones para su plausibilidad. La demostración formal ha sido y es una respuesta suficientemente útil a esta preocupación por la justificación.” (Hanna, 1996, pág. 30)

Al considerar esto en el aprendizaje de las Matemáticas, las instituciones mexicanas lo han ido incorporado en sus currículos como parte del desarrollo matemático del estudiante del nivel secundario y orientado hacia la producción de argumentos como parte del proceso. Por ejemplo, en el caso de la Secundaria (nivel Medio Básico, alumnos de 12 a 15 años) oficialmente está planteada como una de las competencias a desarrollarse:

Validar procedimientos y resultados. “Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.” (SEP, 2011, pág. 23)

Además, para la segunda parte del nivel Medio, que es el Bachillerato (nivel Medio Superior, alumnos de 15 a 18 años), la documentación oficial incluye como una de las competencias del alumno la siguiente:

“Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.” (SEP, 2008, pág. 22; SEP, 2009)

En este sentido se nota que la argumentación está vinculada con la validación de procedimientos y resultados, con la explicación y la justificación, todo con una orientación definida hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal. Es por ello que conviene repasar algunas definiciones como la de explicación que proporciona Balacheff (2000, pág. 12):

“En el momento en que la explicación se expresa en un discurso, ésta pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor.”

Sin embargo, cuando Balacheff hace una distinción entre el significado de “prueba” y de “demostración” deja a ésta última fuera del ámbito del contexto escolar de los niveles primario y secundario al situarla únicamente en el contexto de las Matemáticas como ciencia. No obstante es indispensable considerar que la clase de Matemáticas es un contexto muy particular en el que los estudiantes están construyendo sus saberes de una manera continua, social y guiados por el profesor bajo ciertas directrices sociales e institucionales. Es por ello que los significados que toma la demostración en este espacio y su relación con los otros contextos es lo que ocupa y preocupa a aquellos que buscamos estrategias y respuestas para orientar la actividad didáctica y ante tal preocupación se reconoce la necesidad de asumir una postura respecto al desarrollo de la habilidad argumentativa.

En el contexto escolar más que las demostraciones que prueban que un hecho es verdadero, interesan las demostraciones que explican. En éstas el sujeto hace conjeturas, explora y argumenta, desarrollando conocimiento en un proceso significativo en el que el énfasis no está en el rigor, sino en la comprensión del proceso y del resultado. En este sentido en Larios y Acuña (2009) se hace el planteamiento de que si se quiere enseñar la demostración en la escuela (básica y media), entonces “se requiere afinar una idea adecuada de demostración en el entorno escolar que considere como ejes de funcionamiento el rigor (localmente aplicado) y distinguiendo claramente la necesidad de la obtención del significado matemático también aplicado al proceso en cuestión” (pág. 61).

Para lo anterior se ha estado trabajando en proponer una caracterización de las justificaciones que se pueden considerar en la escuela. Ésta considera los elementos que aparecen en una argumentación que, en el proceso de aprendizaje, evolucionaría a lo largo de la vida escolar de un alumno desde el nivel básico al medio (niveles primario y secundario). Por lo que en la siguiente sección se expondrán elementos más específicos al respecto.

Una aproximación pragmática a la noción de demostración

La demostración matemática, como ya se sabe, pertenece al proceso científico de las Matemáticas. En la escuela de los niveles básico y secundario se incluye la enseñanza de la validación matemática y por ello se requiere poder evaluar los avances de los alumnos en este sentido. Para ello es pertinente pensar en cómo justifican (argumentan) los alumnos para poder determinar, con base en la referencia de la institución matemática (en el sentido de Godino y Batanero, 1994), los avances y las acciones necesarias para que, a través de la enseñanza, los alumnos aprendan a validar en Matemáticas.

En las siguientes secciones proporcionaremos elementos que pueden servir para analizar las justificaciones, como argumentos, que proporcionan los alumnos y así acercarnos a la demostración en la escuela.

El modelo funcional de Toulmin

Stepehn Toulmin propuso una herramienta que puede ser utilizada para analizar la estructura funcional de los argumentos. Con este modelo, conocido como el modelo de Toulmin (2007), el autor buscó resolver el problema de aportar elementos para determinar si un argumento en particular era válido a partir de su estructura y las relaciones entre los elementos que intervienen.

El esquema más sencillo, que de hecho podría corresponder a un argumento basado en el razonamiento deductivo, es el que se compone de tres elementos: los datos (D), las garantías (G) y la conclusión (C). Además se puede añadir el respaldo (R), que correspondería a la parte de la teoría que está considerando el argumento. Esquemáticamente se tendría lo siguiente:

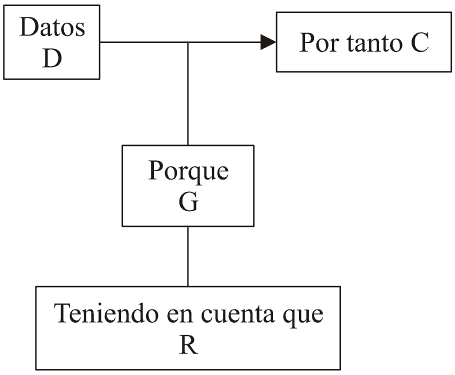

Figura 1. Esquema básico del argumento.

Sin embargo hay que considerar que este tipo de argumentos son los que se esperan para cuando un alumno "aprendió" Matemáticas, es decir, es un matemático o tiene una formación matemática relativamente avanzada. Esto quiere decir que los alumnos al inicio de su vida escolar no argumentan de esta manera, sino que esta es la manera "final" de argumentar en el proceso de aprendizaje matemático.

En este sentido resulta inútil esperar sólo argumentos de este estilo durante la vida escolar del alumno, por lo que se requiere considerar una estructura que incluya más elementos que permitan un análisis y una evaluación que, finalmente, pueda conducir al alumno hacia el esquema “típicamente” matemático.

Consideraremos el siguiente esquema que incluye además modalizadores (M), que permiten matizaciones en el argumento, y condiciones excepcionales (E) que pueden servir para aceptar o rechazar las conclusiones dependiendo de la situación. Así que esquemáticamente lo siguiente:

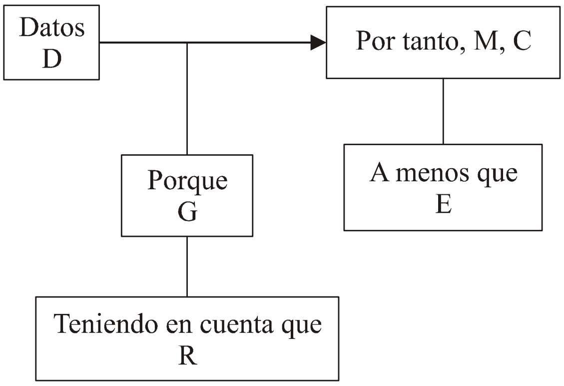

Figura 2. Esquema ampliado del argumento.

Decíamos un par de párrafos arriba que la estructura de la figura 1 correspondería al razonamiento deductivo, pero hay que aclarar que mientras todo argumento basado en el razonamiento deductivo idealmente tendría esa estructura, no todo argumento con dicha estructura correspondería a un razonamiento de este tipo. Esto es porque el tipo de garantía, para esa estructura, y los modalizadores y las excepciones, para la estructura de la figura 2, proporcionarán información sobre el tipo de argumento que se está presentando y que, a continuación, ahondaremos.

Esquemas de argumentación o de demostración

Cuando un alumno proporciona argumentos para sustentar o validar lo que propone (una propiedad, una observación, una respuesta a un problema o ejercicio) lo que está buscando es, principalmente, cumplir con dos aspectos que mencionan Harel y Sowder (Harel, 2007; Harel y Sowder, 1998): el *convencimiento* (o determinación), entendido como el proceso individual para remover las propias dudas acerca de la verdad de una aserción (convencerse a uno mismo); y la *persuasión*, como el proceso de remover las dudas de otros acerca de la verdad de una aserción (convencer a los demás). Con esta consideración estudiaron las maneras en que los individuos validaban sus afirmaciones e introdujeron la idea de esquema de demostración individual llamado esquema de prueba y que definieron como “todo lo que significa convencimiento y persuasión para esa persona”. Los esquemas los agruparon en tres grandes categorías que, a su vez, pueden contener subcategorías (ver la figura 3):

- **Esquemas de pruebas por convicción externa:** Son aquellos que se presentan cuando las afirmaciones se apoyan en elementos ajenos al sujeto y se organizan en tres subcategorías:
  - **Esquemas de prueba autoritarios:** Se sustentan en una autoridad, como el profesor o el libro de texto.
  - **Esquemas de prueba ritual:** Se basan estrictamente en la apariencia del argumento. El

ritual de la presentación hecha por la autoridad (el profesor, un libro, un experto) es en este tipo de esquemas lo que convence a alguien y le sirve para despejar sus dudas.

- **Esquemas de prueba simbólicos no referenciales:** Se apoyan en manipulaciones simbólicas donde los símbolos o las manipulaciones no poseen un sistema coherente de referentes a los ojos del estudiante.

- **Esquemas de prueba empíricos:** En los cuales las conjeturas se aceptan o rechazan en virtud de experiencias sensoriales. De acuerdo al énfasis que aparezca en las mismas, pueden ser:
  - **Esquemas de prueba inductivos:** Basado en la evidencia de ejemplos, de mediciones directas, sustitución de números específicos en expresiones algebraicas, etc.
  - **Esquemas de prueba perceptuales:** Sustentado en percepciones visuales.
- **Esquemas de prueba deductivos:** Que están constituidos a su vez por dos subcategorías:
  - **Esquemas de prueba transformacionales:** Éstos tienen tres características esenciales: la de poseer generalidad (cuando la meta que se persigue es justificar mediante un argumento que resulte válido para todos los casos y no se aceptan excepciones), pensamiento operacional (que se manifiesta cuando un individuo concibe metas o submetas intentando anticipar resultados durante el proceso de la demostración), e inferencia lógica (cuando el individuo comprende que la justificación en matemáticas debe estar basada en última instancia sobre reglas lógicas de inferencia). La transformación de imágenes ocurre por medio de las deducciones lógicas, a diferencia de las relaciones observadas inductiva o perceptualmente, consideradas como estáticas. Las operaciones de trasformación se realizan o pueden realizarse de manera intencionada y prever sus efectos.
  - **Esquemas de prueba axiomáticos:** Los cuales poseen las tres características anteriores pero también incluyen el atributo de que el individuo comprende que cualquier proceso de demostración debe empezar desde términos ya definidos y aceptados (axiomas), y las entidades a las cuales se aplican son parte de la realidad matemática de uno (Harel, 2007). Si los axiomas responden a la pura intuición de la persona entonces se trata de un esquema intuitivo axiomático, pero cuando se piensa en las conjeturas como representaciones generales en diferentes modelos que comparten una estructura matemática común se reconoce un esquema axiomático estructural.

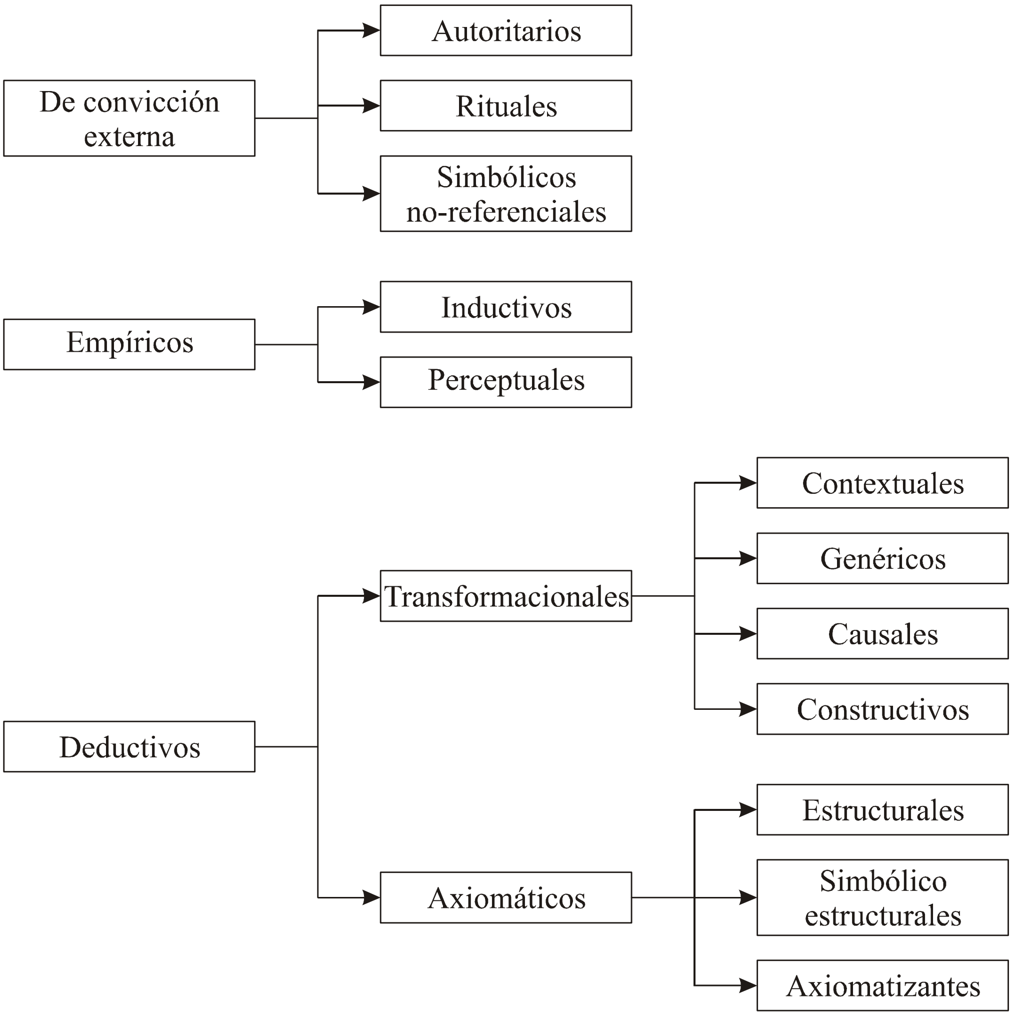

Figura 3. Esquemas de demostración propuestos por Harel y Sowder.

Ahora bien, lo que interesa en este trabajo es más bien la argumentación, como vía para el aprendizaje de la demostración como se le reconoce comúnmente, y en ese sentido la propuesta anterior ha sido tomada por Flores y sus colegas (Flores, 2007; Flores, Gómez y Flores, 2010) para aplicarla al estudio de los argumentos producidos por profesores de bachillerato cuando justificaron soluciones de problemas geométricos. Ellos observaron que existen similitudes en las maneras de argumentar de los profesores de bachillerato en México y de los estudiantes en los que basaron su estudio Harel y Sowder, pero le han llamado más bien «esquemas de argumentación» porque los entienden como "el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema" (Flores, 2007, pág. 71) ya que no están ligados necesariamente a la demostración de teoremas, sino también a la validación de resultados de problemas. Considerando lo anterior han propuesto una categorización jerárquica de esquemas de argumentación como sigue (ver la figura 4):

- "**Autoritarios.** Las argumentaciones se apoyan en las afirmaciones hechas por alguna autoridad. puede ser un libro de texto, el instructor del curso u otro compañero.
- "**Simbólicos,** (sic) El estudiante utiliza un lenguaje matemático y símbolos de una manera

superflua y poco consistente, sin llegar realmente a las conclusiones a las que quiere llegar. En este tipo de esquemas pueden mencionar conceptos poco claros o inventados.

- "**De recuento fáctico o simplemente fácticos.** (sic) en los que el profesor [el individuo] hace un recuento de lo que hizo a manera de explicación o justificación de algún resultado. El estudiante expone una serie de pasos a manera de algoritmo.
- "**Empíricos.** El estudiante se apoya en hechos físicos o en un dibujo. En este caso, el dibujo o el hecho físico constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para el argumento.
- "**Analíticos.** El estudiante sigue una cadena deductiva, sin que por ello llegue forzosamente a una conclusión válida. Las proposiciones de este tipo de esquema se pueden estructurar en oraciones «si..., entonces...».” (Flores, Gómez y Flores, 2010, pág. 28)

Autoritarios → Simbólicos → Fácticos → Empíricos → Analíticos

Figura 4. Esquemas de argumentación propuestos por Flores y sus colegas.

Esta categorización puede servir para identificar el proceso de los alumnos cuando aprenden a justificar en la clase de Matemáticas (ver la figura 4). Para ello se puede utilizar el modelo de Toulmin previamente mencionado considerando la naturaleza de los datos (D), las garantías (G) y el respaldo (R), así como los modalizadores (M) y las excepciones (E), para así identificar un cierto argumento o justificación en el esquema correspondiente.

Lo anterior lo podemos ejemplificar de las siguiente maneras:

- Si se tiene una justificación que la parte de la garantía (G) está basada en afirmaciones como “el profesor dijo…” o “en el libro dice…” entonces hay indicativos de que dicha justificación corresponde a un esquema autoritario. Incluso pueden omitirse los datos (D) en el argumento porque se ignoran deliberadamente y los elementos M y E pueden omitirse por ser innecesarios.
- En el caso de justificaciones que se ajusten a esquemas simbólicos se podría esperar que la garantía (G) esté basada en el manejo de símbolos de una manera poco clara a partir de los datos (D) existentes. Esto aparecen explícitamente y se utilizan, pero precisamente es la manera en cómo se utilizan, apelando incluso a “propiedades” inventadas, lo que indicaría el tipo de esquema.
- En el caso de los esquemas fácticos (o de recuento fáctico) las garantías proporcionadas hacen referencia directa a las construcciones o algoritmos utilizados. Es posible que el respaldo (R) aparezca de manera explícita, pero tanto ésta como G pertenecen a, como se dijo, algoritmos o pasos realizados. Es como decir que algo “funciona” porque se hizo como se hizo (para que “funcionara”), pero no se proporciona la razón del “funcionamiento”. Tanto los modalizadores (M) como las excepciones (E) pueden estar presentes por las limitantes de los algoritmos, de los procedimientos y de las herramientas utilizadas (calculadoras, papel, computadoras, etcétera).
- Un esquema empírico podría incluir justificaciones en los que los datos (D) son considerados como casos particulares y la garantía (G) utilizada hace referencia tales casos particulares. La aparición de modalizadores y excepciones que hagan referencias a casos

particulares evidenciaría aún más el tipo de esquema utilizado. Algunos tipos de justificaciones podrían considerar el caso de razonamientos abductivos.

- En el caso de que se tuviera una justificación con una estructura como la esquematizada en la figura 1 y tanto la garantía (G) como el respaldo (R) poseyeran la característica de proporcionar propiedades en las que son verificadas hipótesis para la obtención de la conclusión (C), se podría pensar en esquemas analíticos.

Ahora bien, todo lo anterior se ha planteado considerando que los alumnos no inician la escuela (nivel primario y luego secundario) utilizando esquemas del tipo analíticos, sino que están inmersos en un proceso evolutivo. Así que cuando los alumnos están justificando hechos matemáticos lo deben hacer de acuerdo a su desarrollo cognitivo y contexto escolar, siempre considerando que las justificaciones que proporcionen vayan orientadas a la idea matemática que se tiene de referencia. En este sentido valdría la pena entonces acotar el tipo de justificaciones que se podrían considerar como «justificaciones matemáticas» y que abordaremos a continuación.

Una caracterización de la demostración

Como los argumentos que se presentan en el salón de clases de los niveles primaria y secundaria no serían aceptados por la comunidad matemática como “demostraciones”, pero considerando que la misma noción de demostración ha ido cambiando con el tiempo de acuerdo a las prácticas de dicha institución bajo la influencia del desarrollo científico y filosófico de cada una de las épocas (ver González y Larios, 2012; Hanna, 1996; Hanna y Barbeau, 2008; Larios, 2005) y con la finalidad de no continuar fomentando la idea de que los alumnos no pueden demostrar (desmitificarla) para que así se pueda aprender a demostrar (como proceso que involucra la formación del pensamiento), se ha considerado una aproximación pragmática a la noción de la demostración en la escuela.

Esto incluye considerar que hay justificaciones que aparecen en la escuela que no necesariamente cumplen con condiciones adecuadas para encaminarse hacia un pensamiento deductivo o formal, es decir, no todas las justificaciones o argumentos podrían considerarse apropiados. Es por ello que se hace necesario determinar las características de una justificación para que pueda ser considerada una demostración en la escuela (se hace énfasis en la parte “en la escuela”). Esta caracterización propuesta incluye los aspectos semánticos relacionados con el significado que tiene la demostración como medio de validación para eliminar dudas en uno mismo y en los demás (la idea de Harel y Sowder) y aspectos sintácticos relacionados con el lenguaje matemático, tal como los que considera Stylianides (2007) que toma como base para sus análisis la estructura de los sistemas axiomáticos formales.

Así que consideraremos que la demostración matemática en el contexto escolar es una serie de argumentos matemáticos que tiene las siguientes características:

- Hacen referencia a un hecho matemático.
- Tienen como función primaria el de convencerse a sí mismo y a otros para proporcionar una explicación del hecho matemático.
- Las formas de comunicación utilizadas deben ser conocidas por los miembros de la comunidad escolar o, en su defecto, que puedan ser aprendidas por ellos.
- Los enunciados utilizados son aceptados por la comunidad escolar, ya sea explícita o

implícitamente.

- La serie de argumentos está organizada con base en formas de razonamiento válidas o correctas. En particular se puede considerar el razonamiento deductivo que provee argumentos deductivos. (González y Larios, 2012, pág. 33)

Así que con estos antecedentes (características, estructura y tipología) podemos considerar en cómo analizar y fomentar el desarrollo de las demostraciones en la escuela como medios de validación del conocimiento matemático personal de cada uno de los alumnos de los niveles básicos.

La construcción continua de la demostración

Ya hemos considerado el hecho de que la validación de los conocimientos matemáticos, tanto para un alumno de primaria o secundaria como para un profesional o investigador matemático, forma parte del proceso de construcción del conocimiento. En este sentido no puede desligársele de manera arbitraria a dicho proceso. Es decir, se ha visto que pierde el sentido que se busca si la dinámica escolar en cuanto a realizar validaciones se restringe sólo a verificar resultados o realizar demostraciones partiendo de afirmaciones ya establecidas por la autoridad en el aula, ya sea el profesor o el libro de texto (ver Boero, Garuti y Mariotti, 1996; Chazan, 1993; Larios, 2005). Resulta conveniente incorporar este proceso de validación a un proceso mayor de construcción del conocimiento.

El ciclo de construcción de demostraciones como proceso de aprendizaje matemático

Es relativamente común que para abordar la producción de justificaciones o demostraciones en los últimos años de los niveles primario y secundario (niveles Medio Básico y Medio Superior en México) se les proporcione a los alumnos afirmaciones ya existentes para después, tras algunos ejemplos, pedirles que proporcione una demostración. Incluso se puede dejar momentos específicos en los cursos en que se haga esto o, incluso, se llega en algunas instituciones a marcar esos momentos en los programas de estudio.

Sin embargo cuando ocurre esta situación como si el demostrar fuese un "momento especial" en Matemáticas se promueve la idea de que la validación del conocimiento matemático es algo ajeno al proceso de construcción del conocimiento. En estos casos no se les pide a los alumnos que formulen conjeturas o elaboren el enunciado que está siendo tomado en cuenta, sino únicamente que reconstruyan el proceso que, previamente, alguien ha realizado. Desafortunadamente, especialmente para el alumno, dicho proceso fue realizado por un individuo (generalmente un matemático) cuyo manejo del conocimiento y de sus habilidades para generar razonamientos deductivos ya han sido desarrolladas, además de que para el enunciado en particular que se está "demostrando" tuvo un conocimiento y una interacción previa, además de que es muy probable que haya asociado a dicha demostración significados surgidos de la interacción teórica entre las hipótesis y la tesis. Esta situación acarrea innumerables conflictos para el alumno y genera obstáculos para su aprendizaje, dado que estos recursos no le son igualmente accesibles.

En parte las dificultades que enfrentan los alumnos se relacionan con el hecho de que ellos deben *re-construir* la complejidad cognitiva de un proceso en el cual se enlazan funcionalmente actos de pensamiento de diversas naturalezas que los llevan a actividades parciales que son difíciles de *re-unir* en una sola (Larios, 2005). Es por ello que una vía alterna en la Educación Matemática, y en particular en la enseñanza de la demostración, es considerar la producción de justificaciones que para que tengan las características mencionadas en la sección anterior, éstas sean producto de exploraciones o de observaciones. Esto es porque se ha visto que cuando los alumnos exploran situaciones, plantean conjeturas y luego construyen las demostraciones correspondientes aparece una unidad cognitiva en el proceso. A esta noción Boero, Garuti y Mariotti (1996) denominaron la *Unidad Cognitiva de Teoremas*. Con ello se propone que la construcción de la demostración involucra un proceso continuo, en términos cognitivos, en el que se pasa por varias etapas de una manera no necesariamente lineal (como en el caso del proceso de construcción de las Matemáticas como ciencia y que realizan los matemáticos profesionales). Estas etapas se pueden enlistar de la siguiente manera:

1. Exploración de una situación dada que puede ser propuesta por el profesor o generada a partir de situaciones previas.
2. Producción de una conjetura o planteamiento de una propiedad tras la observación llevada a cabo.
3. Exploración orientada a la búsqueda de justificaciones de las conjeturas o propiedades planteadas u observadas.
4. Producción de la demostración que valida o justifica, mediante el encadenamiento de argumentos, las conjeturas o las propiedades planteadas u observadas.

En trabajos previos se ha aprovechado esta idea para que los alumnos del nivel medio (Básico y Superior, 14-17 años) observen situaciones, resuelvan problemas, propongan propiedades geométricas y produzcan justificaciones (Arellano y Larios, en evaluación; González, 2010; González y Larios, 2012; Larios, 2005).

Para situaciones de este tipo se aprovechó el software de Geometría Dinámica (SGD) como instrumento de mediación semiótica entre el individuo y el conocimiento geométrico. En este sentido el software permitió diseñar ambientes que permitieran, precisamente, la exploración y la observación de situaciones para la búsqueda de regularidades y condiciones geométricas. Este software, por la capacidad dinámica que le otorga la operación de «arrastre», permite este tipo de actividades pues es un medio en el que el alumno del nivel medio, que no tiene un desarrollo cognitivo de una persona que ha trabajado con objetos matemáticos de manera asidua (como el matemático profesional), puede manipular representaciones de objetos matemáticos como si fuesen objetos más bien concretos y susceptibles a ser parte de experimentación.

Es importante mencionar que este tipo de herramientas digitales pueden incidir en los significados que se construyen acerca de los objetos matemáticos. En el caso particular de los geométricos se ha reportado en la literatura diversos fenómenos relacionados que deben ser tomados en cuenta por los profesores y que pueden estar vinculados a las representaciones gráficas (Larios y González, 2010), con la escritura de las demostraciones (Leung, 2009), con la necesidad o el sentido de justificar –o la falta de éstos– al confundir los casos particulares con las demostraciones (Chazan, 1993), entre otros que vale la pena explorar e investigar.

Ahora bien, regresando al ciclo recién mencionado hay que decir que este proceso permite partir de una situación y así el alumno realiza exploraciones, planteamientos y valida el conocimiento, de manera individual y grupal. Como se mencionó un poco más arriba, este proceso no necesariamente resulta en un “ciclo” de las etapas mencionadas, sino que puede requerir más de una exploración, pero idealmente se obtendrá una validación del conocimiento matemático observado o conjeturado. Este resultado obtenido (no la validación, sino el conocimiento matemático) o bien algún otro obtenido durante el proceso realizado podría servir como punto de inicio para nuevas exploraciones y así continuar con otros ciclos que lleven a exploraciones, descubrimientos y demostraciones en el salón de clase.

En términos educativos, además, se puede esperar que los alumnos comiencen proporcionando validaciones que tienen características de los esquemas de argumentación autoritarios o simbólicos, pero mediante un diseño y un seguimiento adecuados por parte del profesor podría pensarse que este proceso cíclico de exploraciones y sistematizaciones llevaría a un espiral que, de una manera simplificada, aparece en la siguiente figura:

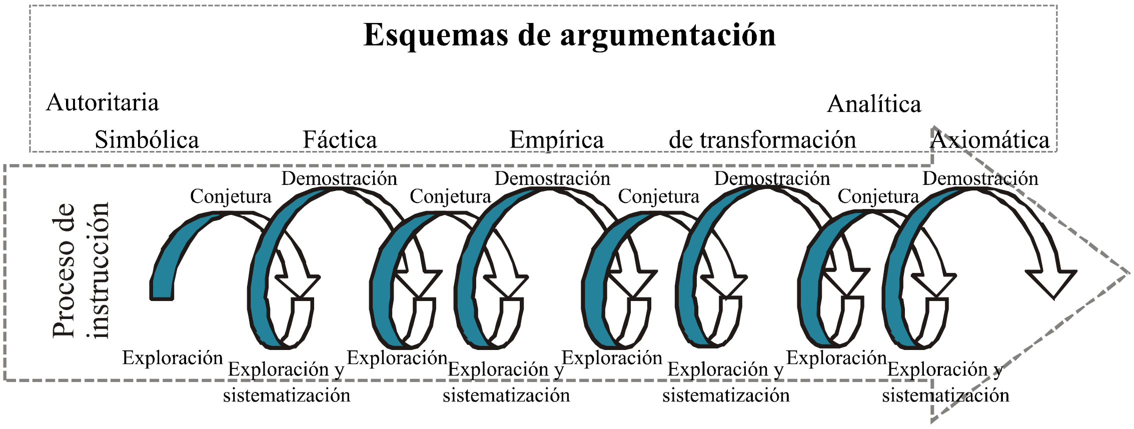

Figura 5. Propuesta del proceso de la construcción continua de la demostración (CCD).

La necesidad de una evaluación

Existe una necesidad institucional por la evaluación que se presentó en la segunda sección de este trabajo donde se hacen referencias a documentos oficiales mexicanos para los niveles Medio Básico y Medio Superior que corresponden a la educación secundaria en otros países.

Pero en términos académicos esa necesidad de evaluación en el proceso educativo es real y más significativa. En efecto, es ahí donde se necesita evaluar el proceso de aprendizaje para determinar la situación en la que se "encuentra" el alumno (o el grupo de alumno) y así permitir al docente proponer acciones o actividades tendientes al logro del aprendizaje de los alumnos.

Es importante mencionar que este tipo de evaluación no está necesariamente vinculada con la calificación o acreditación, sino con el análisis de las condiciones cognitivas y desarrollo de los alumnos. Este requerimiento académico nos lleva a buscar herramientas útiles y adecuadas para llevarla a cabo dicha evaluación. Se propone que los elementos que se han planteado en la tercer sección de este trabajo pueden ser herramientas útiles para analizar los elementos de las demostraciones que proponen los alumnos durante su proceso de aprendizaje:

- La caracterización propuesta permite determinar si un argumento proporcionado por un alumno puede ser considerado como una posible demostración (siempre en el contexto escolar).
- Con el modelo de Toulmin es posible identificar los elementos que aparecen en el argumento proporcionado por el alumno, para así determinar si está completo, es decir, si aparecen todos los elementos necesarios como la garantía (G), la conclusión (C), los datos (D), etcétera. En este sentido vale la pena mencionar que, por ejemplo, se ha observado en diversos trabajos que los alumnos no proporcionan argumentos con todos estos elementos

necesarios de una manera “natural”, sino que se requiere la intervención explícita del profesor o del grupo social (ver Arellano y Larios, en evaluación; Toro, 2014).

Además, con este modelo se puede determinar si en el argumento a evaluar aparecen elementos que pueden resultar superfluos como son lo modalizadores (M) o las excepciones (E). Además, al identificar las garantías y el respaldo (R) se puede identificar el tipo de éstas y así considerar el tercer elemento.

- A partir principalmente de las garantías y el respaldo de un argumento se puede identificar el tipo de esquema de argumentación que le corresponde y así determinar en qué punto se encuentra el alumno en el proceso de aprendizaje de la demostración.

Es importante mencionar que existe otro aspecto a ser considerado y es la intervención de los procesos cognitivos relacionados con el aprendizaje de la demostración. En relación con esto podemos decir que falta trabajo en este sentido para identificar, si es posible, cuáles son tales procesos involucrados y en qué niveles lo están para así poder desarrollar herramientas que permitan una evaluación. En este momento se está iniciando un proyecto en este sentido con alumnos del nivel Medio Básico en Querétaro.

Comentarios finales

En el Plan de Estudios de la Educación Básica (6 a 15 años) de la Secretaría de Educación Pública de México (2011, pág. 49) se establece: “Para avanzar en el desarrollo del pensamiento matemático en la primaria y secundaria, su estudio se orienta a aprender a resolver y formular preguntas en que sea útil la herramienta matemática. Adicionalmente, se enfatiza la necesidad de que los propios alumnos justifiquen la validez de los procedimientos y resultados que encuentren, mediante el uso de este lenguaje.”

Nuevamente es una necesidad institucional, pero establece de inicio que la validación del conocimiento matemático que sea formulada por los alumnos es una parte ineludible del aprendizaje. Ésta es una etapa forma parte del proceso completo en la atribución de significados adecuados sobre las Matemáticas.

La propuesta de trabajar la demostración matemática en los contextos escolares desde una aproximación pragmática y a través de procesos de una construcción continua del conocimiento matemático promueve, desde nuestro punto de vista, la desmitificación de la demostración. Además, planteado así, este proceso de aprender a demostrar se constituye en un proceso de construcción del conocimiento matemático. Es decir, si se plantean situaciones donde los alumnos tienen que explorar e identificar propiedades invariantes, tienen que investigar además sobre los conceptos y los procedimientos que giran en torno a éstos, y tienen que trabajar en colaboración con sus compañeros y con el profesor en la búsqueda de soluciones. En resumen, esto los lleva no sólo a construir una demostración como validación del conocimiento, sino a construir el conocimiento que están validando.

Todavía hay temas por investigar pendientes al respecto pues –por ejemplo– se tienen que revisar los procesos cognitivos involucrados a fin de proponer herramientas apropiadas para su seguimiento en el desarrollo de los alumnos. También se tienen que considerar aspectos como son los contextos institucional y social de los alumnos, así como el uso de instrumentos y representaciones utilizadas en el aprendizaje.

No obstante, consideramos que un trabajo de este tipo puede hacer que el tema del aprendizaje de la demostración se integre al proceso mismo del aprendizaje matemático a lo largo del desarrollo académico del alumno (de una manera longitudinal). Así haría que perdiese sentido el hecho de que la demostración aparezca como un tema ajeno o independiente en los currículos escolares o atribuido a un cierto tipo de temas (como la Geometría), pudiéndose trabajar también de manera transversal en los cursos. En efecto, el aprendizaje de la demostración no queda aislada, sino que aparece como parte del proceso mismo de lo que se llama "aprender Matemáticas".

Reconocimientos

Para la presentación de este trabajo se contó con el apoyo del Fondo para el Fortalecimiento de la Investigación de la Universidad Autónoma de Querétaro (FOFI-UAQ) con registro FIN-201421 y del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Querétaro (Concyteq) a través de su convocatoria de apoyo para realizar actividades de difusión de la ciencia.

Referencias y bibliografía

Arellano Camacho, C., & Larios Osorio, V. (En evaluación). La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas de geometría con lápiz y papel. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime).*

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En Á. Gutiérrez, & L. Puig (Edit.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 121-128). Valencia, España.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid, España: Alianza Universidad.

Chazan, D. (1993). High school geometry stundents' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359-388.

Flores Estrada, C., Gómez Reyes, A., & Flores Samaniego, Á. H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de geometría dinámica. *Acta Scientiae, 12*(2), 22-42.

Flores Samaniego, Á. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Godino, J. D., & Batanero Bernabeu, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

González González, N. (2010). *Conceptualización de propiedades de las figuras geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio* (Tesis de maestría). Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro..

González González, N., & Larios Osorio, V. (2012). *Justificaciones en la geometría dinámica de secundaria.* Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. En L. Puig, & Á. Gutiérrez (Edits.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia, España: Universitat de València.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematics knowledge. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *40*(3), 345-353.

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. En P. Boero (Edit.), *Theorems in school* (pp. 65-78). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Edits.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-282). EEUU: AMS.

Larios Osorio, V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis doctoral). Cinvestav-DME, México.

Larios Osorio, V., & Acuña Soto, C. M. (2009). Geometrical proof in the institutional classroom environment. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. De Villiers (Edits.), *Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 59-63). Taipei, Taiwán: National Taiwan Normal University.

Larios Osorio, V., & González González, N. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, *13*(4), 147-160.

Leung, A. (2009). Written proof in dynamic geometry environment: Inspiration from a student's work. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Edits.), *ICMI Study 19 Conference Proceedings: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 15-20). Taipei, Taiwán: ICMI y NTNU.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas.* México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (21 de octubre de 2008). Acuerdo 444. *Diario Oificial de la Federación*, págs. 18-28 (Primera sección).

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (30 de abril de 2009). Acuerdo 486. *Diario Oficial de la Federación*, págs. 74-77 (Primera sección).

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica.* México, México: Secretaría de Educación Pública.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Toro Uribe, J. A. (2014). *Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo* (Tesis de magíster). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

Toulmin, S. E. (2007). *Los usos de la argumentación.* Barcelona, España: Ediciones Península.