



Introducción del pensamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la educación básica en México

Lilia P. Aké
Universidad de Colima
México
liliapatricia_ake@ucol.mx

Marcos L. Mojica
Universidad de Colima
México
mojicajm@gmail.com

Briseida Ramos
Universidad de Colima
México
brisramo@ucol.mx

Resumen

Debido a su importancia y al difícil acceso conceptual que tienen la mayoría de los estudiantes sobre el álgebra, diversas investigaciones en educación matemática se han centrado en la introducción de aspectos del pensamiento algebraico en la educación primaria. Esta introducción implica cambiar la manera de concebir el álgebra como tal, para poder incluirla en este nivel educativo con la finalidad de estimular el desarrollo de dicho pensamiento en los niños. En el contexto mexicano la introducción del pensamiento algebraico ha cobrado interés en los últimos años; sin embargo, las consideraciones de su introducción tanto en el currículo de primaria como en el currículo de la formación de maestros aún no están claramente definidas.

Palabras clave: pensamiento algebraico temprano, formación de maestros, educación primaria.

Introducción

La inclusión del pensamiento algebraico en la Educación Primaria obedece a diversos trabajos de investigación (Cai & Knuth, 2011; Carpenter, Franke & Levi, 2003; Kaput, 2000) que sugieren que desde la enseñanza primaria se pueden y deben desarrollar rasgos del

pensamiento algebraico. Por su parte, la National Council of Teachers of Mathematics en diversas directrices curriculares (NCTM, 2000; NTCM, 2006) propone introducir ideas y modos de pensar propias del álgebra desde los primeros grados de la educación primaria. Estas propuestas surgen ante la necesidad de soslayar las dificultades que presentan los estudiantes al momento de transitar de la aritmética al álgebra, así como también de eliminar su tardía y abrupta introducción en la escuela secundaria (Carpenter et al., 2003; Kaput, 1998).

La finalidad de iniciar con el pensamiento algebraico, desde los primeros niveles de la educación primaria, es que los estudiantes profundicen en el entendimiento de las matemáticas elementales para fomentar en ellos habilidades de generalización, expresión y justificación sistemática de generalizaciones matemáticas (Kaput & Blanton, 2001), así como también proporcionar las oportunidades para comenzar con sus propias representaciones intuitivas y poco a poco adoptar las representaciones convencionales como herramientas para representar y para entender las relaciones matemáticas en álgebra (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008).

En el contexto mexicano, esta tendencia de comenzar temprano con el álgebra, ha cobrado interés en los últimos años y se ha manifestado en las nuevas reformas que impactan los planes y programas tanto del currículo de primaria como el currículo de la formación de maestros para este nivel educativo. En los siguientes apartados hacemos referencia a estos elementos, no sin antes abordar previamente las características del pensamiento algebraico según diversas investigaciones del área.

Características del pensamiento algebraico

Cuando se habla de introducir el pensamiento algebraico en la educación primaria, no es que se pretenda dar un curso de álgebra a los niños de este nivel educativo, más bien, la finalidad que se persigue es la de “capacitar a los estudiantes mediante el fomento de un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad” (Lins & Kaput, 2004, p.58). En este punto se precisa mencionar que el desarrollo del pensamiento algebraico en la edad temprana de los niños, toma una postura diferente respecto a las dificultades del álgebra, sustentando que éstas son debidas a la manera en que las matemáticas elementales son introducidas en la escuela primaria (Carraher & Schliemann, 2007).

La introducción del pensamiento algebraico en la escuela elemental es una propuesta novedosa para la interpretación y aplicación de los temas ya existentes en la matemática elemental, que pretende hacer explícito su carácter algebraico. Esto es posible debido a que el álgebra reside implícitamente dentro del currículo de la matemática en primaria en problemas de palabras; en tópicos como la adición, sustracción, multiplicación, división, razón, proporción, número racional, medición; y en los sistemas de representación como gráficas, tablas, notación y exploración de estructuras (Carraher & Schliemann, 2007).

Sin embargo, hacer explícito el carácter algebraico de la matemática escolar en primaria, implica una reconceptualización del álgebra para poder entender su desarrollo en estos primeros niveles educativos. Al respecto, varios expertos en didáctica del álgebra ofrecen características del pensamiento algebraico que nos dan una idea de la complejidad de este tipo de pensamiento. Al respecto mencionamos algunos ejemplos:

Bednarz, Kieran y Lee (1996) distinguen diferentes concepciones referentes al álgebra: (a) El álgebra como expresión de la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, (b) el álgebra como una herramienta para la

resolución de problemas, (c) como la modelización de fenómenos físicos, usando variedad de representaciones, y (d) el álgebra como el estudio de las funciones. Por otra parte, Kaput (1998, 2000) señala que el álgebra debe presentar, (a) la generalización de patrones y relaciones (particularmente la generalización de la aritmética y del razonamiento cualitativo), (b) el estudio de funciones y relaciones, (c) el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones, (d) un conjunto de lenguajes de modelización y control de fenómenos, y (e) la manipulación sintácticamente guiada de formalismos.

Otra propuesta es la de Lins y Kaput (2004) quienes establecen que las características claves del pensamiento algebraico son: (a) Involucra actos de generalización deliberada y expresiones de generalidad, e (b) involucra un razonamiento basado en las formas de generalizaciones sintácticamente-estructuradas, incluyendo acciones sintácticas y semánticamente guiadas. Kieran (2004) menciona que el razonamiento algebraico en los grados elementales involucra el desarrollo de formas de pensamiento en actividades para las que el álgebra simbólico-literal puede ser utilizada como herramienta, pero que no son exclusivos ya que se puede estar involucrado en el álgebra sin usar ningún símbolo literal en absoluto.

Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005) señalan asimismo que el pensamiento algebraico implica también: (a) Desarrollar un pensamiento relacional, es decir, apreciar relaciones numéricas entre los términos de una expresión y entre distintas expresiones o ecuaciones, (b) transformar expresiones matemáticas, sin restringirse al cálculo de una respuesta concreta, (c) desarrollar un conocimiento sobre conjuntos de objetos matemáticos (números o variables), de operaciones entre ellos, de propiedades de estos objetos y sus operaciones (ej., asociativa, conmutativa, distributiva), y de las propiedades de relaciones cuantitativas (ej., transitividad e igualdad).

Estas perspectivas que apoyan la acción de algebrizar el currículo (Kaput, 2000) de la escuela elemental, ofrecen orientaciones para la selección y diseño de tareas que promuevan el desarrollo del pensamiento algebraico en los niños de la escuela primaria. Sin embargo, esta acción requiere de su consideración tanto en el currículo de primaria como en la formación de maestros para que su implementación tenga los progresos esperados. A continuación, desarrollamos un panorama general sobre la algebrización del currículo de primaria en el contexto mexicano.

El pensamiento algebraico en el currículo de la educación primaria en México

La educación en México ha sufrido a lo largo de la historia diferentes reformas educativas. La primera de la que se tiene constancia fue el plan de estudios de 1958. Posterior a ésta se realizó en 1972 una reforma que consideraba como parte fundamental de la enseñanza de las matemáticas los aspectos formales de esta disciplina y sus fundamentos. En 1980 fue ejecutada una reforma parcial en la que se matizó algunos aspectos de la reforma anterior. Posteriormente, la reforma de 1993 se adhirió a una corriente mundial, que prioriza, bajo un enfoque constructivista, la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas por parte del alumno (Alatorre, De Bengoechea, López, Mendiola, & Saíz, 1999).

Recientemente la educación básica (preescolar, primaria y secundaria), sufrió una nueva reforma: La Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB). Ésta fue iniciada desde el 2004 con preescolar, en 2006 con secundaria y en el 2009 con primaria, tuvo el propósito de favorecer el desarrollo de competencias en los alumnos que cursan la Educación Básica en México, mediante la integración de los niveles preescolar, primaria y secundaria como un trayecto

formativo en el que haya consistencia entre los conocimientos específicos, las habilidades y las competencias (Secretaría de Educación Pública, 2008). Bajo estas consideraciones, la educación básica se organizó en cuatro periodos escolares de tres grados cada uno como se aprecia en la Tabla 1.

Tabla 1

Periodos escolares en las que se divide la educación básica

Período escolar	Edad aproximada
Primero: Primer a tercer grado de preescolar	Entre 5 y 6 años
Segundo: Primer a tercer grado de primaria	Entre 8 y 9 años
Tercero: Cuarto a sexto grado de primaria	Entre 11 y 12 años
Cuarto : Primer a tercer grado de secundaria	Entre 14 y 15 años

Cabe señalar que la reforma de 1993 estuvo orientada bajo un enfoque constructivista y la enseñanza de las matemáticas adoptó la resolución de problemas por parte del alumno, como idea fundamental (Secretaría de Educación Pública, 1993). Ahora las nuevas orientaciones basadas en un enfoque por competencias con didáctica constructivista están presentes en la RIEB (Secretaría de Educación Pública, 2011).

En esta nueva Reforma, el currículo de matemáticas de la Educación Primaria, sufre algunas modificaciones respecto a la reforma de 1993. Por ejemplo, los ejes temáticos en los que se dividen los contenidos se reducen de seis a tres como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2

Ejes temáticos correspondientes a las reformas de 1993 y 2009

Reforma 1993	Reforma 2009
Los números, sus relaciones y sus operaciones (1° a 6°)	Sentido numérico y pensamiento algebraico (1° a 6°)
Medición (1° a 6°) Geometría (1° a 6°)	Forma, espacio y medida (1° a 6°)
Tratamiento de la información (1° a 6°) Procesos de cambio (4° a 6°) Predicción y azar (3° a 6°)	Manejo de la información (1° a 6°)
	Actitud hacia el estudio de las matemáticas (1° a 6°)

Como se puede apreciar en la Tabla 2, en la Reforma del 2009 se incluye un eje temático denominado *Sentido numérico y pensamiento algebraico*; con la inclusión de este eje se pretende desarrollar contenidos que favorezcan el manejo del lenguaje matemático, la exploración de propiedades aritméticas y las formas de presentar y efectuar cálculos (Secretaría de Educación Pública, 2009). En este sentido, se alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y el álgebra, tales como la modelización de situaciones mediante el uso del lenguaje aritmético; la exploración de propiedades aritméticas que en la secundaria podrán generalizarse con el álgebra; y la puesta en juego de diferentes formas de representar y efectuar cálculos (Secretaría de Educación Pública, 2011).

Bajo esta perspectiva externa, se advierte que la Reforma del 2009 pone de manifiesto la importancia de desarrollar aspectos del pensamiento algebraico de 1° a 6° de primaria. Sin

embargo, los estándares curriculares para este eje temático no parecen poner de manifiesto dicha relevancia. Este argumento se puede apreciar en la Tabla 3.

Tabla 3

Estándares curriculares del eje sentido numérico y pensamiento algebraico

Estándares curriculares para el segundo período escolar (entre 8 y 9 años)	Estándares curriculares para el tercer período escolar (entre 11 y 12 años)
Lee, escribe y compara números naturales de hasta cuatro cifras	Lee, escribe y compara números naturales, fraccionarios y decimales
Resuelve problemas de reparto en los que el resultado es una fracción de la forma $\frac{m}{2^n}$	Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales
Resuelve problemas que impliquen sumar o restar números naturales, utilizando los algoritmos convencionales.	Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números naturales empleando los algoritmos convencionales.
Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números naturales utilizando procedimientos informales.	Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales

Se aprecia de manera general que en los estándares del currículo mexicano, hay una presencia notable de resolver problemas empleando algoritmos convencionales. Incluso, el desarrollo de los contenidos de 1° a 6° de primaria se guía a partir de 3 temas específicos: números y sistemas de numeración, problemas aditivos y problemas multiplicativos (Secretaría de Educación Pública, 2011). No se hace mención al contenido de patrones, ni al razonamiento proporcional; contenidos a partir de cuales se puede potenciar las ideas de variable y relación funcional, que a su vez conducen a procesos de generalización. Aunque en las consideraciones generales del eje temático, sentido numérico y pensamiento algebraico hace alusión a la exploración de propiedades y procesos de generalización, éstos no son considerados en los estándares curriculares que guían el desarrollo de los contenidos.

Por cuestiones de espacio, no se incluyen el análisis de los programas de estudio que se desarrollan de 1° a 6° grados, análisis que podría determinar el grado de presencia de contenidos matemáticos con carácter algebraico. Los libros de texto también pueden proporcionar información relevante respecto a los contenidos que podrían potenciar formas de pensamiento algebraico, si es que existen.

El pensamiento algebraico en la formación de maestros en México

Diversas investigaciones informan que los niños ciertamente pueden resolver tareas que tradicionalmente se han considerado propias del álgebra (Carpenter et al., 2003). Esto conlleva a que los maestros necesitan estar capacitados para crear oportunidades para introducir el carácter algebraico de la matemática elemental (Carragher & Schliemann, 2007). Sin embargo, este requerimiento pone a consideración la formación de los maestros de primaria como ingrediente principal para que el desarrollo del pensamiento algebraico se lleve cabo en las aulas.

La formación de los maestros de Educación Primaria en México está a cargo de las Escuelas Normales, tiene una duración de 4 años y está organizado en 8 semestres. En su plan de estudios se contempla una asignatura obligatoria, relativa al álgebra, titulada *Álgebra: su*

enseñanza y aprendizaje que se cursa en el segundo semestre de la licenciatura. Esta asignatura aborda tres temas específicos: acercamiento a los conceptos de función y ecuación, análisis de los comportamientos de funciones lineales, cuadráticas y racionales, y procedimientos para operar con expresiones algebraicas y resolver ecuaciones (Secretaría de Educación Pública, 2012). Los contenidos específicos de estos tres temas se desarrollan en la Tabla 4, en la cual se aplicaron determinados criterios respecto a la enseñanza del álgebra.

Tabla 4
Contenidos de la asignatura Álgebra: su enseñanza y aprendizaje

	Temas		
		Acercamiento a los conceptos de función y ecuación	Análisis de los comportamientos de funciones lineales, cuadráticas y racionales
Unidades de aprendizaje	Uso de un sistema algebraico computarizado para estudiar el comportamiento de patrones numéricos	Acercamiento intuitivo al concepto de función.	Procedimientos para la solución de ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$ con coeficientes enteros o fracciones, positivos o negativos.
	Usos y significados de las literales en el álgebra	Noción de función inversa	Transformaciones de expresiones algebraicas aplicando reglas formales.
	Primeras reglas para la transformación de expresiones algebraicas	Funciones lineales.	Métodos de solución para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita con apoyo de un sistema algebraico computarizado para entender su comportamiento gráfico y algebraico.
	Modelación numérica y simbólica.	Funciones cuadráticas.	Métodos gráficos y algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas.
	Funciones lineales y cuadráticas y su representación en el plano cartesiano	Familia de funciones	Modelación y resolución de problemas algebraicos usando representaciones matemáticas: gráficas, tablas, etc.
	Análisis de propuestas didácticas para la transición de la aritmética al álgebra	Funciones racionales	

Llama la atención el primer tema específico, en su último punto: Análisis de las propuestas didácticas para la transición de la aritmética al álgebra. En esta unidad de aprendizaje el futuro docente estudiará y analizará las investigaciones y propuestas relacionadas con la enseñanza del álgebra distinguiendo: La transición de la aritmética al álgebra, iniciación al estudio del álgebra, diferentes usos de las literales en álgebra, el proceso de generalización, el pensamiento algebraico y lenguaje algebraico, y finalmente, los antecedentes para el estudio del álgebra en la

educación primaria. A partir de esta información el maestro en formación diseñará secuencias didácticas para el desarrollo del pensamiento algebraico en la Educación Primaria (Secretaría de Educación Pública, 2012).

Cabe mencionar dos aspectos relevantes. El primero tiene que ver con los tiempos destinados para el análisis de propuestas didácticas para la transición. En un semestre resulta complicado desarrollar tanto el contenido matemático respecto al álgebra como el análisis de las propuestas de enseñanza. El segundo aspecto es el relacionado a la temporalidad del análisis de las propuestas de enseñanza, ¿por qué se deja como la parte final del curso? Cuando bien se pueden tratar a la par, tanto la enseñanza del contenido algebraico como el análisis de las propuestas de enseñanza.

Conclusiones

El punto de ruptura entre la aritmética y el álgebra es reconocido indudablemente como problemático. Respecto a esto, es relevante mencionar que la necesidad de reconceptualizar la naturaleza de álgebra y el razonamiento algebraico que contemple su introducción en la escuela elemental, hacen que la preocupación sea cada vez mayor especialmente en lo que respecta a esta separación artificial, en donde el conocimiento de la estructura matemática es esencial para el éxito de la transición (Warren, 2003). Al respecto, las diversas propuestas para introducir aspectos del pensamiento algebraico en primaria han llevado a que la definición de su naturaleza, en los primeros niveles educativos, aún no esté por completo esclarecida (Carraher & Schliemann, 2007). Sin embargo, estas innovaciones proporcionan información para comenzar con el desarrollo del pensamiento algebraico en los niños.

Por otra parte, con la reconceptualización del álgebra, los maestros de primaria están en la ruta crítica para esta reforma longitudinal, pues todavía tienen poca experiencia con las ricas y conectadas actividades para generalizar y formalizar (Kaput & Blanton, 2001). Aunque este cambio impone grandes exigencias a los alumnos y a los maestros, como catalisis de crecimiento conceptual, vale la pena el esfuerzo (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008).

Particularmente se advierte que en el contexto mexicano aún se precisa definir en los estándares curriculares las formas de desarrollo del pensamiento algebraico y conectar éstos con el desarrollo de contenidos en los programas de estudio y libros de texto, así como también con la formación de maestros.

Referencias y bibliografía

- Alatorre, S., De Bengoechea, N., López, L., Mendiola, E., & Saiz, M. (1999). *Propósitos y contenidos actuales de la enseñanza de las matemáticas en México en el nivel primaria*. Documento de Investigación, UPN y SMM, D.F. México.
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early Algebrization: A global dialogue from multiple perspectives*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carpenter T., Levi L., Franke M. L., & Zeringue J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, 37, 53-59.

- Carraher, D. W. & Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. En J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235–272). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kaput, J. (1998). Teaching and Learning a New Algebra. En E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Kaput, J.J. (2000). *Transforming algebra from a engine of inequity for an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA). Dartmouth, MA.
- Kaput, J., & Blanton, M. L. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming Task Structure. En H. Chick, K. Stacey, J. Vicent., & J. Vicent (Eds), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 1, pp. 344-350). Melbourne: University of Melbourne.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151.
- Lins, R., & Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (pp. 47-70). Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: Author.
- Secretaría de Educación Pública. (27 de Agosto de 1993). Acuerdo Número 181, por el que se establece el plan y los programas de estudio para la educación primaria. *Diario Oficial de la Federación*. México, D.F.
- Secretaría de Educación Pública. (2008). Educación Básica. Primaria. Plan de Estudios 2009. (Primera ed.). D.F, México.
- Secretaría de Educación Pública (2009). Reforma Integral de la Educación Básica. Dirección general de educación básica. Disponible en: http://portal2.edomex.gob.mx/de_elemental/programas/rieb/index.htm
- Secretaría de Educación Pública (2011). Plan de estudios de Educación Básica. Dirección general de educación básica. Disponible en: <http://issuu.com/dgeb/docs/planedu2011?e=3503076/2622744>
- Secretaría de Educación Pública (2012). Plan de estudios de la Licenciatura en educación primaria. Dirección general de educación básica. Disponible en: http://www.dgespe.sep.gob.mx/reforma_curricular/planes/lepri/malla_curricular
- Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 15(2), 122-137.