La enseñanza de la multiplicación: Una propuesta a partir de tareas de proporcionalidad directa

Liliana **Quintero** López
Universidade Federal do ABC –UFABC-
Brasil
liliql22@gmail.com
Sara **Mejía** Vasco
Universidad de Antioquia –UDEA-
Colombia
saramejia19@gmail.com
Francisco Brabo **Bezerra**
Universidade Federal do ABC –UFABC-
Brasil
francisco.bezerra@ufabc.edu.br

Resumen

El trabajo que se presenta a continuación corresponde a reflexiones que se adelantan como parte de los estudios de maestría, pero que dan continuidad al trabajo de grado elaborado en pregrado que tiene como título "El aprendizaje de la multiplicación desde tareas de proporcionalidad directa". El objetivo de esta comunicación es compartir con profesores en ejercicio y con futuros profesores, comentarios e reflexiones sobre el desarrollo de dos tareas de proporcionalidad directa que fueron diseñadas y aplicadas para analizar la actividad matemática de los estudiantes de grado quinto con relación al aprendizaje de la multiplicación; este tipo de tareas son importantes porque permiten reconocer y establecer relaciones entre dos espacios de medida y guiar así hacia un pensamiento multiplicativo.

Palabras clave: Multiplicación, actividad, proporcionalidad directa, enseñanza, tarea.

Introducción

El trabajo que se presenta a continuación surgió a partir de las reflexiones hechas como parte del proceso de maestría en la Universidade Federal do ABC (Brasil) pero que tienen su motivación e insumo principal en la investigación "el aprendizaje de la multiplicación a partir de tareas de proporcionalidad directa" que fue elaborada como trabajo de grado para el programa licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad de Antioquia (Colombia); en ella se buscaba comprender de qué manera las tareas de proporcionalidad directa mediaban el aprendizaje de la multiplicación, para esto, fueron propuestas tres tareas que se compartieron en una escuela pública de la ciudad de Medellín (Colombia), en su desarrollo en el aula de clase se analizó la actividad matemática de las estudiantes a la luz de los objetos de conocimiento, las interacciones entre los sujetos y los instrumentos.

A partir de los resultados y conclusiones obtenidas en esta investigación, nace la necesidad de organizar y compartir el trabajo realizado, pensando en ayudar a los profesores, para que tengan como ejemplo y apoyo las formas de acción que surgieron en este proceso, puedan llevarlas a sus aulas y contribuir así con el mejoramiento de su práctica y de la educación matemática en general.

El objetivo de la comunicación es presentar las tareas elaboradas y aplicadas en la investigación ya mencionada, como una propuesta para la enseñanza de la multiplicación a partir de tareas de proporcionalidad directa, el texto se encuentra organizado de la siguiente manera; primero están los aspectos generales de la investigación, luego el marco de referencia, las tareas propuestas y por ultimo las consideraciones finales.

Aspectos generales

La investigación se hizo desde un enfoque cualitativo, donde se adoptaron las ideas de Sandoval (2002), se orientó la investigación hacia el descubrimiento de la realidad y no a la comprobación, a través de la simultaneidad de los procesos que comprenden la realidad. Es decir, en la investigación se apuntó a mostrar cómo a través de las tareas de proporcionalidad directa los estudiantes pueden ver y comprender la multiplicación, de modo diferente a la suma de sumandos iguales.

Bajo esta mirada, el trabajo de investigación se centró en las ideas de Galeano (2007) con relación al estudio cualitativo de caso, este permitió narrar el proceso realizado con las estudiantes del grado quinto, interpretando las interacciones entre ellas, la forma cómo se acercaron al conocimiento y cómo se apropiaron de él.

El interés de la investigación se centró en el aprendizaje de la multiplicación desde la proporcionalidad directa, estableciéndose como elemento fundamental para su enseñanza, tareas desde esta idea matemática; la mirada estaba centrada en analizar cómo la tareas llevadas al aula lograban que las estudiantes comprendieran la multiplicación de una forma diferente a como les había sido enseñada. En el desarrollo de la investigación se observó como las estudiantes centraban su actividad matemática en la utilización constante del algoritmo y la resolución de problemas matemáticos a partir de una única vía de solución, la suma de sumandos iguales. Es decir, buscaban resolver cada tarea por medio de conteos, lo cual mostró un pensamiento basado exclusivamente en la adición, no lograban poner en correspondencia dos familias de cantidades y no había consciencia de las cantidades ni de la variación entre ellas.

Se reconoce que si bien la enseñanza de la multiplicación desde la idea de suma de sumandos iguales y desde la asimilación del algoritmo es importante para generar en los estudiantes un modelo inicial de significación y para avanzar en su asimilación, no es suficiente para llegar a pensar multiplicativamente. Por esto, se recomienda a los profesores iniciar la enseñanza de la multiplicación desde esta mirada, pero avanzar hacia el desarrollo del pensamiento multiplicativo.

La multiplicación es más que sumar, es más que una asimilación de un algoritmo, pues está permite relacionar dos espacios de medida, permite que el estudiante comprenda que en ella aparece una correspondencia que se establece entre las cantidades, que hay una correlación positiva y lineal y por tanto hay una proporcionalidad directa; elementos que desde la suma es imposible comprender e interiorizar. Es desde estas ideas que nace la propuesta de crear tareas, pensadas desde la idea que expresa Obando (2011) donde asume el conocimiento matemático como una construcción de los sujetos a través de la acción mediada por instrumentos.

Como resultado de la investigación se logró identificar en la actividad matemática de las estudiantes varios elementos importantes que se hicieron evidentes en las observaciones y en los diferentes registros que las estudiantes compartieron. Estos elementos se organizaron en tres categorías emergentes, la primera fue *la importancia de la medida en la actividad matemática de las estudiantes*, la segunda fue denominada de las *relaciones cualitativas a las relaciones cuantitativas* y la tercera, *las tareas de proporcionalidad directa en el aprendizaje de la multiplicación*.

Marco de referencia

La enseñanza de la multiplicación ha sido un tema de gran discusión y apropiación entre diversos investigadores que se han centrado de una u otra manera en discutir sobre su enseñanza en la actualidad y en proponer maneras para que los profesores guíen sus estudiantes a una mejor comprensión y aplicación.

En los últimos años se han realizado varias investigaciones centradas en la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación; la profesora Ana Ruth Stare (São Paulo, 2010) en su trabajo de doctorado “A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino” expresa, entre muchas de sus ideas que:

Para muchos profesores, la enseñanza de la multiplicación (también de las demás operaciones) pretende básicamente el dominio del algoritmo convencional y su posterior aplicación para resolver problemas. De esa forma, se espera que los alumnos dominen las tablas de multiplicar (hasta el 10) al comienzo de la enseñanza fundamental, este dominio pasa a ser tratado como un pre-requisito para la utilización del algoritmo de la multiplicación y de la división. (Stare, 2010, p.67)

También aparecen en este escenario la tesis de maestría de la profesora Olga Botero (2006) “Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación” y la tesis de Monly Torres (2013) “Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional”. La primera trasciende el modelo tradicional de la multiplicación como suma de sumandos iguales aportando elementos conceptuales y metodológicos para la conceptualización de las estructuras multiplicativas a partir de situaciones problema que permitan al estudiante interactuar con la variación simultánea entre cantidades. Y

la segunda analiza las formas de acción de los estudiantes al tratar situaciones problema de tipo multiplicativo en términos del análisis relacional tipo función.

Ambas buscan ampliar el pensamiento multiplicativo y trascender el modelo inicial de multiplicación que es enseñado en la escuela. Resguardan una nueva mirada de la multiplicación en la que se consideran dos espacios de medida, la unidad como cantidad explícita y la correlación entre pares de cantidades.

Reconocen como la escuela aún no ha logrado ir más allá de la enseñanza de la multiplicación como una suma reiterada, donde se asume que el estudiante ha aprendido a multiplicar porque aplica correctamente el algoritmo, tal como lo expresa Torres (2013)

El tratamiento que se le ha dado a la multiplicación en la escuela, en la mayoría de los casos, se ha reducido a su enseñanza como una suma reiterada, al aprendizaje de un algoritmo y a la memorización de las tablas de multiplicar, (Valencia & Gómez, 2010), dejando a un lado el significado de la multiplicación en la resolución de situaciones de tipo multiplicativo y la relación de la multiplicación con otros conceptos matemáticos, como la razón, la proporción y la proporcionalidad. (p.10)

También es importante considerar en este camino las características especiales de la proporcionalidad como la correlación positiva y lineal que limitan las situaciones y las transforman en situaciones de proporcionalidad directa que muestran la correspondencia con un real sentido de la multiplicación y de lo que es pensar multiplicativamente. Además, generar espacios donde a partir de las necesidades e intereses de los estudiantes emerja el conocimiento matemático, a través de tareas donde la actividad de aprendizaje se vea fortalecida por lo que el estudiante conoce del mundo y por las interacciones entre pares.

Es pertinente considerar la Teoría de la Actividad, pues ésta reconoce la importancia del intercambio cultural y aporta elementos para la comprensión de la dialéctica entre lo social y lo individual; destaca la acción, los instrumentos y la agencia social, reconociendo la heterogeneidad de los procesos psicológicos. Es de aclarar que el concepto de actividad surge desde las ideas de Vygotsky, el cual lo incorporó en su teoría cultural-histórica de las funciones psicológicas superiores; él estudio la conciencia del hombre en la actividad, pensando el sujeto como un agente individual; por su parte Leontiev pensó el sujeto que se relaciona con los Otros y es en esa relación que constituye conocimientos. Éstas miradas de Leontiev transformaron la idea de mediación, pues para él fue necesario incluir nuevos elementos sociales para dar cuenta de los procesos de mediación; también expresaba que "en la sociedad humana, la relación entre el individuo y el objeto no es inmediata sino que está mediada por la experiencia colectiva *y por* la división del trabajo" (Kozulin, 2000, p.43)

Bajo esta mirada, se entiende por actividad el "*conjunto de acciones socialmente dirigidas (orientadas) con el objetivo de alcanzar un fin"* (Leontiev, 1978 citado en Obando, 2011, p.18) es decir, la actividad se establece a partir de acciones organizadas, estructuradas, orientadas para lograr un objetivo. Entendiendo acción como aquello que implica un acto intencional, es una forma de organización de la experiencia e implica una dialéctica entre la realidad y el individuo que la modifica.

Dentro de la actividad se resalta la relación objeto/motivo hacia la cual se orientan las acciones tanto externas como internas, puesto que permite que se oriente y se genere la actividad y a su vez logra que el sujeto reflexione sobre la actividad misma. También se resaltan los

instrumentos que son quienes median las reflexiones externas e internas, en la medida en que comportan los dos lugares, cumplen el papel como instrumento material y posteriormente como instrumento psicológico.

Tareas

Estas tareas muestran un posible camino para llevar a los estudiantes a pensar multiplicativamente. Se reconoce en ellas lo que Davidov en palabras de Montealegre expresa "la principal diferencia entre ésta y otras tareas consiste en que su finalidad y resultado es la transformación del propio sujeto actuante y no la trasformación de las cosas con las que actúa el sujeto" (Montealegre, 2005, p. 41)

Tarea 1: Jugando con Agua

Esta tarea tiene como finalidad llevar a los estudiantes a afianzar el conjunto de los números racionales, haciendo que transiten por otros conjuntos numéricos, es decir, tiene como fin posibilitar espacios en los que los estudiantes trasciendan su pensamiento matemático; que vayan más allá de los números naturales.

Ilustración 1: Vasos

Para el desarrollo de la tarea se propone el uso de cinco vasos desechables de 1, 2, 4 y 16 onzas nombrados con la letra **A, B, C** Y **D**. Se debe proponer a los estudiantes la siguiente situación: en una reunión familiar se estaba repartiendo gaseosa en el vaso **C**, y este se acabó ¿De qué manera se puede seguir repartiendo la misma cantidad de gaseosa usando los otros vasos?

Se recomienda organizar a los estudiantes en equipos de 4 estudiantes, donde cada uno debe consignar y entregar las recomendaciones para seguir repartiendo la gaseosa. (Ver apéndice A).

Tarea 2: Agua Azucarada

En presencia de los estudiantes se deben echar 6 vasos de agua medidos con el vaso **D** y 24 cubos de azúcar en una botella de gaseosa grande. La indicación que se debe dar a los estudiantes es que deben preparar la misma agua azucarada que la preparada por el profesor pero en las botellas que les fueron dadas, que deben ser diferentes para cada equipo de trabajo. Se debe entregar también una tabla de registro donde los estudiantes indicaran cada uno de los ensayos con la cantidad de agua y azúcar utilizada. La pregunta orientadora del trabajo es ¿Cómo lograr

preparar agua azucarada de igual sabor que la presentada por la profesora pero en un recipiente más pequeño?

Para el desarrollo de ésta, se recomienda el trabajo en equipos de 4 personas, a cada equipo se le debe entregar una botella plástica de diferente capacidad (150, 200, 250,300, 350, 400 y 620 ml) vasos de 16, 4, 2 y 1 onzas, que servirán para medir la cantidad de agua necesitada; además se debe repartir una cantidad indeterminada de cubos de azúcar, es decir, cada equipo utilizara la cantidad de azúcar que crea conveniente. (Ver apéndice B)

Consideraciones finales

Orientar la enseñanza de la multiplicación usando tareas pensadas desde la idea de la proporcionalidad directa, le permite al profesor el uso de la multiplicación con un significado completo, es decir, donde logra contextualizar y dar sentido a los números presentes en cada situación presentada.

En el trabajo se pudo ver como los estudiantes pueden resolver las tareas como situaciones de proporcionalidad directa, y en ese proceso establecen relaciones entre dos espacios de medida, y dan cuenta de un pensamiento multiplicativo. Desde Torres (2013) pensar multiplicativamente implica que: se identifiquen dos sistemas de cantidades, se establezcan las relaciones entre las cantidades de los dos sistemas de cantidades, y se identifiquen las razones y proporciones que permiten correlacionar las cantidades entre los dos sistemas. Es por esto que se presenta como una propuesta posible para que los profesores la repliquen.

Referencias y bibliografía

Ballestero Alfaro, E. (2007). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos . *Cuadernos en Educación Matemática*, 125-137.

Botero Hernandez , O. (2006). *Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la varición.* Tesis de grado de Maestría. Universidad de Antioquia, Medellín.

Daniels, H. (2003). *Vygotsky y la pedagogia.* España: Paidós.

Galeano Marín , M. E. (2007). *Estrategias de investigación social cualitativa (El giro en la mirada).* Medellín : La carreta Editores.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicologicos.* (G. Sanchéz Barberán, Trad.) Barcelona: Paidós.

Montealegre, R. (2005). La actividad humana en la psicologia historico cultural. *Avances en psicologia latinoamerica*, 33-42.

Obando Zapata , G. (2012). *Filosofía, matemáticas y Educación: Por un enfoque Histórico-cultural en Educación matemática.* Manuscrito en preparación .

Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. C. (s.f.). *Razón, Proporción, proporcionalidad: Configuraciones Epistémicas para la educación Básica.* Manuscrito sometido para publicación .

Posada Balvin, F., & otros . (2006). *Módulo 2: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico.* Medellin: Artes y Letras Ltda.

Posada Balvin, F., & otros. (2006). *Módulo 3: Pensamiento Métrico y sistema de medidas.* Medellin: Artes y Letras Ltda.

Sandoval Casilimas , C. A. (2002). *Investigación cualitativa.* Bogotá : ARFO.

Stare Pravo , A. R. (2010). *A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino.* Tesis de grado de Doctorado. Universidade de São Paulo, São Paulo.

Torres Jaramillo, M. C. (2013). *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en terminos del análisis relacional.* Tesis de grado de Maestría. Universidad de Antioquia, Medellín.

Vergel Causado , R. (s.f.). Perspectiva Sociocultural del aprendizaje de la multiplicación. *Memorias XIV Encuentro de geometría y II de Aritmetica*, 494.

Apéndice A

Planeación jugando con agua

Objetivo:

Favorecer el estudio de las fracciones como una relación cuantitativa resultado de un proceso de comparación en un espacio de medida: la capacidad de los vasos, a través de la medición de volúmenes.

Descripción de la actividad:

Para iniciar la clase se debe empezar contándoles a los estudiantes los materiales que se van a utilizar en la clase, tales como: cinco vasos desechables de 1onza, 2 onzas, 4 onzas, 8 onzas, y 16 onzas, el líquido o sólido medido y la guía. Así mismo, se debe explicar la actividad a desarrollar la cual se hará en equipos de cuatro integrantes.

Para iniciar se debe proponer a los estudiantes la siguiente situación:

En una reunión familiar se está repartiendo gaseosas usando el vaso **C** y se acaban. Se desea seguir repartiendo la misma cantidad de gaseosa a cada uno de los invitados, usando vasos de otros tamaños. ¿De qué manera se puede seguir repartiendo la misma cantidad de gaseosa usando los otros vasos?

En esta primera parte se espera que los estudiantes hagan comparaciones entre los volúmenes de los vasos, y por tanto enfaticen en las relaciones “n veces…” y “n-ésima parte de…” como dos relaciones inversas que se pueden utilizar la una para definir la otra.

Posteriormente se debe hacer una socialización con todo el grupo donde además de indagarles sobre cómo les pareció la actividad se les escuche las soluciones que cada grupo le dio a la situación. También se deben hacer preguntas auxiliares tales como:

- Si quiero servirme la misma cantidad gaseosa que contiene el vaso **B**, utilizando el vaso **A** ¿Cuántos vasos **A** necesito?
- Si un señor desea gaseosa en el vaso **C** utilizando el vaso **D** ¿Qué cantidad de gaseosa del vaso **D** se le debe dar?

Se pueden hacer más preguntas de este tipo con la finalidad de completar en el tablero la siguiente tabla de registro

Medir / Con	**A**	**B**	**C**	**D**
A				
B				
C				
D				

Luego de lo anterior se debe proponer a los estudiantes la siguiente situación

Luciana decide hacer un postre para el cumpleaños de su mamá y encuentra la siguiente receta:

a) 2 vasos **D** de harina
b) 2 vasos **C** de azúcar

c) 8 vasos **B** de jugo de limón
d) 10 vasos **A** de agua.

- Ahora escribe nuevamente la receta del postre pero midiendo los ingredientes con el vaso **B**.
- Escribe nuevamente la receta del postre pero midiendo los ingredientes con el vaso **D.**

Como último momento se propone un espacio de conceptualización donde se busque aclarar y formalizar las ideas matemáticas encontradas en la realización de la actividad.

Apéndice B

Planeación agua azucarada

Objetivo del maestro:

Observar cómo los estudiantes asumen el problema del agua azucarada, qué preguntas se hacen y cómo logran diferenciar las magnitudes que cambian y aquella que permanece igual.

Analizar la forma cómo los estudiantes manejan las dos cantidades que varían para conseguir un agua azucarada de igual concentración a la presentada por las profesoras.

Objetivo de la clase:

Iniciar en el camino de situaciones que involucran la proporcionalidad directa para el aprendizaje de la multiplicación.

Tarea

¿Cómo lograr preparar agua azucarada de igual sabor que la presentada por la profesora pero en un recipiente más pequeño?

Momentos de la clase

Primer momento

Se les debe explicar a los estudiantes que la actividad a realizar consiste en preparar agua azucarada de igual sabor que la presentada por la profesora pero en un recipiente más pequeño. Sólo se debe dar como datos importantes la cantidad de vasos de agua y de cubos de azúcar con la que fue preparada.

Para la realización de dicha actividad se puede pedir a los estudiantes que se organicen en grupos de 4 personas, a cada equipo se les entrega una botella plástica que será distinta para cada equipo, un vaso de 16 onzas, un vaso de 4 onzas, un vaso de 2 onzas y uno de 1 onza, los cuales servirán para medir la cantidad de agua que las niñas pondrán en sus botellas. Además se les dará cierta cantidad de cubos de azúcar.

Es de aclarar que los estudiantes deberán llevar un registro de los ensayos que hacen en busca de su agua azucarada, a través de la siguiente tabla:

Ensayo	Cantidad de agua	Cantidad de azúcar
Ensayo 1		
Ensayo 2		
Ensayo 3		
Ensayo 4		

Después de los 4 ensayos deberán decidir cuál es el ensayo que más se aproximó o que logro el mismo sabor del agua azucarada.

Segundo momento

Se puede hacer una socialización para conocer los resultados que obtuvieron los grupos de trabajo, y aprovechar el momento para ver si los estudiantes lograron diferenciar las magnitudes presentes en el problema y cómo manipularon las cantidades que allí aparecen.

Tercer momento

Presentar una situación hipotética donde ya no tomarán el agua y el azúcar, pero que podrán pensar desde la experiencia anterior a través de una guía de trabajo (ver anexo 1).

Cuarto momento

En un tercer encuentro socializar las respuestas que cada grupo dio a las preguntas planteadas en la guía, se propondrá llenar las siguientes tablas, para que las estudiantes teniendo la información organizada, puedan pensar en una regla general que les permita calcular la cantidad de agua y azúcar que se necesitan para preparar cualquier cantidad de recipientes.

N° de recipientes A	N° de vasos de agua	N° de cucharadas de azúcar
2		
4		
10		
20		

N° de recipientes B	N° de vasos de agua	N° de cucharadas de azúcar
2		
4		
10		
20		