# Actividades de modelización para un curso de Álgebra Lineal en una formación de ingenieros

Luis Ramón **Siero** González
Universidad Autónoma de Baja California (UABC)
México
lsiero@uabc.edu.mx
Avenilde **Romo Vázquez**
Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional
México
aromov@ipn.mx

**Resumen**

Esta investigación se desarrolla en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México (CICATA – IPN) y en el Centro de Ingeniería y Tecnología, unidad Valle las Palmas de la Universidad Autónoma de Baja California (CITEC) y tiene por objetivo diseñar actividades de modelización para una formación matemática de ingenieros. El diseño se basa en el análisis de la modelización matemática en cursos de la formación de especialidad, por ejemplo el de materiales compuestos. Se consideran elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y se propone una metodología asociada a esta teoría que permite el análisis de modelos matemáticos en uso como base del diseño de las actividades didácticas.

*Palabras clave:* Modelización matemática, formación de ingenieros, praxeología, didáctica.

## Introducción

La formación matemática de futuros ingenieros ha sido objeto de estudio de diferentes investigaciones en Matemática Educativa (Camarena, 1999; Bissell y Dillon 2000; Bissell 2002; Kent y Noss 2000 y 2001; Romo-Vázquez 2009; Macias 2012; Soto 2012; Martínez 2014). Estos trabajos han mostrado que la enseñanza de las matemáticas en formación de ingenieros atiende a

necesidades particulares. Pollak (1988) pone de manifiesto que estas necesidades matemáticas básicas y avanzadas pueden ser abordadas a partir de la modelización matemática, considerando a ésta como base de un nuevo paradigma educativo. De hecho, la modelización matemática ha sido abordada en una diversidad de investigaciones en nuestra disciplina. El estudio ICMI 14 publicado en el año 2007 permite evidenciar diferentes perspectivas teóricas que han sido producidas para estudiarla. En la introducción de este estudio un modelo matemático es definido de la siguiente manera: "Un modelo matemático consiste en un dominio extra-matemático D, de interés, algún dominio matemático M, y un mapeo que va del dominio extra-matemático al matemático" (p.4). Y está representado por la siguiente figura:

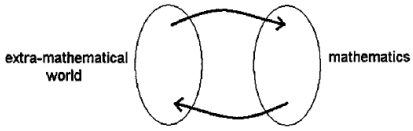


*Figura 1.* Modelo matemático, mapeo del modelo extra-matemático al matemático.

La modelización por su parte es definida como:

> "Objetos, relaciones, fenómenos, suposiciones, cuestiones, etc. En D son identificados y seleccionados como relevantes para el propósito y situación y entonces son mapeados ~ trasladados dentro de objetos, relaciones, fenómenos, suposiciones cuestiones, etc. Perteneciendo a M, discusiones matemáticas, manipulaciones e inferencias son hechas, los resultados son entonces trasladados de regreso a D e interpretados como conclusiones concernientes a este dominio" (Niss, Blum & Galbrahit, 2007, p.4).

Esta idea de modelización, concebida como un ciclo que puede ser repetido varias veces, puede decirse que con algunas variantes aparece en diferentes trabajos. Bissell (2002) presenta por ejemplo dos ciclos de modelización, y los denomina rígido y flexible, sin embargo este autor señala que éstos se basan en una concepción platónica de la modelización, ya que asumen que todo fenómeno o situación es modelizable. Además señala que los ingenieros más que construir modelos, ellos adaptan y refinan modelos "tipos", cuyas soluciones son bien conocidas y que han sido utilizados en otras ocasiones. Esto nos lleva a cuestionarnos, ¿cómo modelan los ingenieros en su formación de especialidad y en la práctica misma? ¿Cuáles son los modelos matemáticos que utilizan? ¿Estos modelos son objeto de enseñanza en su formación matemática?

## El CITEC una formación de ingenieros en México

Estas preguntas pueden ser abordadas al considerar el CITEC, debido a que en esta institución la enseñanza de las matemáticas ocupan un lugar muy importante, durante los primeros dos años de la carrera se cursan 7 asignaturas de matemáticas, como son Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Ecuaciones diferenciales, etc. Al entrevistar a profesores de estas asignaturas se evidenció que los profesores conocen poco de las necesidades matemáticas de las asignaturas de especialidad. Por ejemplo el coordinador de la carrera reconoció que el tema de caracterización de materiales compuestos resultaba muy complejo para los estudiantes. El profesor que imparte las materias de materiales compuestos (MC, en adelante) y de Diseño de Estructuras de Aeronaves (DEA) señaló que los alumnos no recuerdan cómo hacer operaciones básicas con matrices.

Este tipo de operaciones son esenciales para obtener las deformaciones de los materiales compuestos, o los esfuerzos que soporta cada elemento, dependiendo de los datos que se tengan. Uno de los contra tiempos en las materias es que se tiene que volver a explicar cómo multiplicar dos matrices. Esto sacrifica tiempo de clase, recordando álgebra matricial en lugar de trabajar en los temas propios de la materia, como es el caso de los alumnos del tronco común de ingeniería del CITEC. (Discurso del profesor A).

Además señaló que los temas de álgebra lineal debían explicarse nuevamente, utilizando programas computacionales como Matlab, Maple, Matemática, etc. Este discurso del profesor motivó que en esta investigación nos enfocaremos en analizar la asignatura de DEA con el objetivo de reconocer las matemáticas que están presentes, sus adaptaciones y/o usos y la manera en que éstas podrían abordarse desde un curso de álgebra lineal.

## Instituciones presentes en la formación de ingenieros

Esta investigación considera elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Chevallard en 1999 y desarrollada por otros investigadores durante los últimos años. Esta teoría propone un modelo epistemológico para el estudio de la actividad humana en su dimensión institucional. La institución puede definirse como:

> "Las instituciones, es decir, organizaciones sociales estables, enmarcan las actividades humanas y simultáneamente las hacen posibles por los recursos que estas instituciones ponen a disposición de sus sujetos. Estos recursos materiales e intelectuales han sido producidos por comunidades, a lo largo de procesos de enfrentamiento a situaciones problemáticas, para resolverlas con regularidad y eficacia" (Castela & Romo, 2011, p.85).

En este trabajo nos interesa reconocer las instituciones involucradas en la formación de ingenieros y las relaciones que existen entre ellas en torno a la modelización matemática. En Romo –Vázquez (2009) se reconocen tres tipos de instituciones que participan en una formación de ingenieros: de producción *P*, de enseñanza *E* y prácticas *Ip*. Las instituciones de producción son las disciplinas, matemáticas *P*(M) y disciplinas intermediarias *P*(DI), en éstas se producen y validan praxeologías. Las instituciones de enseñanza tienen por objetivo transmitir y difundir las praxeologías entre aprendices, por ejemplo la enseñanza de las matemáticas *E*(M) y la enseñanza de las disciplinas intermediarias *E*(DI). Las instituciones prácticas *Ip* acogen y norman las actividades prácticas, por lo que las praxeologías son utilizadas. Las actividades prácticas que tienen lugar en la formación, como el desarrollo de proyectos o innovaciones *Ap* se consideran una institución práctica, ya que éstas se acercan en cierta medida a la práctica profesional. La producción, enseñanza (difusión) y el uso de praxeologías puede tener lugar en toda institución, la distinción hecha de las instituciones tiene que ver con la actividad y vocación predominante en éstas. Dentro de una formación de ingenieros las relaciones que pueden aparecer entre estas instituciones puede ser de diferentes tipos. Por ejemplo, una formación de ingenieros muy teórica podrá tener una cercanía a *P*(M) y a *P*(DI) mientras que una formación muy práctica estará más cerca de *Ip*. Las praxeologías matemáticas producidas en *P*(M) y utilizadas en *Ap* pueden circular entre las diferentes instituciones de la siguiente manera: 1)De *P*(M) a *P*(DI) y luego a *E*(DI) y finalmente a Ap. 2) De *P*(M) a *E*(M) y luego a Ap. 3) De *P*(M) a *E*(M) a *E*(DI) y a *Ap*. Estos recorridos se esquematizan de la siguiente manera:

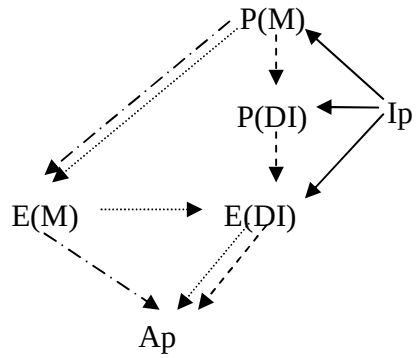


*Figura 2*. Modelo Praxeológico extendido, recorridos praxeológicos entre instituciones.

La actividad de modelización matemática se analizará por tanto en el marco de instituciones que participan en la formación del ingeniero, como se detallará más adelante, reconociendo las restricciones que condicionan así como los recursos que posibilitan dicha actividad. Para ellos se utilizará la noción de praxeología, la cual se divide en cuatro componentes, considerados en 2 bloques como se muestra a continuación:

Tabla 1

*Definición del modelo praxeológico*

| **Bloque Técnico – Práctico** | **Bloque Tecnológico - Teórico** |
|---|---|
| T Tipo de tareas | $\theta$ Tecnologías |
| $\boldsymbol{\tau}$ Técnicas | Θ Teorías |

*Fuente:* Chevellard (1999).

En el bloque técnico - práctico tenemos:

- Tipos de tareas (T), lo que se hace.
- Técnicas ($\tau$), la manera en que se realizan o resuelven las tareas.

En el bloque Tecnológico - Teórico

- Tecnología ($\theta$), es lo que explica, produce, valida y justifica la técnica.
- Teoría Θ, es el discurso que a su vez explica, produce, valida y justifica la tecnología $\theta$.

La praxeología $[T, \tau, \theta, \Theta]$, se reconoce como la mínima unidad de análisis de la actividad.

## Metodología

Las asignaturas de Materiales Compuestos (MC), y Diseño de Estructuras de Aeronaves (DEA) son las que se revelaron en las entrevistas con los profesores, como asignaturas cuyo análisis puede ayudar a comprender el rol que juegan las matemáticas en su enseñanza. Dichas asignatura son parte de las formaciones en Ingeniería Aeroespacial e Ingeniería Mecánica que se imparten en el CITEC. Considerando el esquema de las instituciones que participan en la formación de ingenieros podríamos esquematizar las instituciones que consideramos en esta investigación de la siguiente manera:

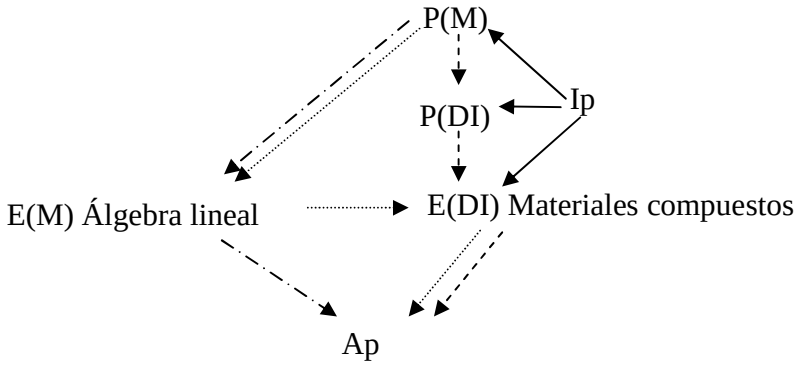


*Figura 3*. Modelo Praxeológico extendido, recorridos praxeológicos del modelo extendido entre instituciones en un estudio de caso CITEC.

Para el análisis de las *E*(DI), Materiales Compuestos y Diseño de Estructuras de Aeronaves se estudiaron libros de texto, sugeridos por los profesores que enseñan dichas asignaturas.

Para materiales compuestos (MC):

- Askeland D. y Phulé P., (2004), "Ciencia e Ingeniería de los Materiales", Cengage.
- Barbero, J. (2011) "Introduction to Composite Materials Design", CRC Press, 167-213.

Y para Diseño de estructuras de aeronaves la siguiente referencia: Logan D.L. (2004), A First Course in the Finite Element Method", Thomson.

De la misma manera se realizó un trabajo colaborativo con los profesores responsables de los cursos, entrevistas, resolución conjunta de ejercicios y descripción de las elecciones didácticas efectuadas para su enseñanza. Para complementar este trabajo se realizaron observaciones de clase con el objetivo de apreciar la propuesta didáctica en funcionamiento, la actividad de los estudiantes, sus dificultades y/o cuestionamientos.

## Análisis de la caracterización de materiales compuestos

En Askeland y Phulé (2004), los materiales compuestos se definen como la mezcla de dos o más materiales de los cuales conocemos las propiedades físicas, químicas y geométricas, el resultado de esta mezcla es un material compuesto logrando obtener diversas combinaciones no usuales de rigidez, peso, resistencia a corrosión y resistencia a temperaturas altas. De estos compuestos no se conocen las características y no se pueden inferir de los datos que conocemos de cada material que lo forma, por lo que dicho material compuesto debe de ser caracterizado. Para la caracterización del material, es necesario conocer las propiedades geométricas, químicas y físicas del elemento, las cuales están relacionadas de la siguiente manera:

$\sigma = (E)\varepsilon$, esto es; Esfuerzos = Módulo de Elasticidad * Deformaciones

Si conocemos el módulo de elasticidad y las deformaciones, el producto de estas dos matrices nos da como resultado los esfuerzos del material, relación que nos permite conocer sus características y de esta manera poder inferir sobre las ventajas o desventajas de construir piezas de aviones, carros, estructuras de edificios con características específicas y decidir cuáles materiales son más adecuados para el trabajo que se está solicitando, tomando en cuenta el espesor de la pieza, la forma y los esfuerzos externos a los que puede estar expuesta (Barbero, 2011).

## Análisis del desplazamiento de resortes

Este tema se aborda en la materia de diseño de estructuras de aeronaves la cual está asociada a la materia de álgebra lineal ya que existe un modelo matricial inmerso en los temas propios de la materia como son, solución de sistemas de resortes y solución de sistemas de barras, los cuales en el campo laboral se utilizan cuando se quiere hacer un tren de aterrizaje para un avión y es donde los alumnos egresados tienen que aplicar el modelo aprendido en la clase de DEA. Es por ello que se realizó un análisis para identificar las praxeologías matemáticas en juego, el cual se presenta a continuación.

Se analizará el capítulo 2 del libro de Logan cuyo título es: *A First Course in the Finite Element Method* y fue publicado en 2004. En dicho capítulo, la unidad inicia presentando una introducción general del método de rigidez y desplazamiento así como los temas se abordarán con más profundidad en capítulos posteriores.

En la sección 2.1 se presenta una definición formal de la "Definición de la Matriz de Rigidez", la cual se presenta a continuación:

> "For an element, a stiffness matrix $\hat{k}$ is a matrix such that $\hat{f} = \hat{k}d$, where $\hat{k}$ relates local-coordinate $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ nodal displacements $\hat{d}$ to local forces $f$ of a single element."

Inmediatamente después muestra una gráfica de un sistema de resorte donde explica el significado de cada variable y de la notación $\widehat{\ }$, la cual define como un símbolo que hace referencia a un sistema local de coordenadas del sistema de resorte presentado en la Figura 4.

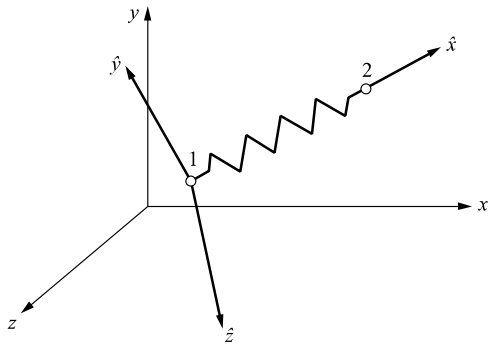


*Figura 4.* Modelo de un resorte en el espacio, sistemas de coordenadas, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ local y $(x, y, z)$ global.

> For a continuous medium or structure comprising a series of elements, a stiffness matrix $K$ relates global-coordinate $(x, y, z)$ nodal displacements $d$ to global forces $F$ of the whole medium or structure. (Lowercase letters such as x, y, and z with out the ^ symbol denote global-coordinate variables).

En esta sección sólo muestra la definición de matriz de rigidez para sistemas de resorte en general, para preparar al lector a los conceptos que se utilizarán en los siguientes subtemas.

La sección 2.2 trata el tema de la deducción de la matriz de rigidez para un sistema de un resorte. Inicia utilizando la convención de equilibrio directo para obtener la matriz de rigidez para un sistema unidimensional de resortes, el cual obedece la ley de Hooke, establece que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada $F$ y se representa por la ecuación $F = KU$ donde *F*: Vector de fuerzas, *K*: Matriz de rigidez o constante del resorte, *U*: Vector de desplazamiento y sólo resiste fuerzas en la

dirección del resorte, como muestra la Figura 5 y en el texto explica que significa cada uno de los elementos presentados, los números 1 y 2 son llamados nodos, $\hat{f}_{1x}.\hat{f}_{2x}$, representan las fuerzas asociadas a los nodos en la dirección axial, $\hat{d}_{1x}$, $\hat{d}_{2x}$, son los desplazamientos locales de los nodos, también se les puede identificar como los grados de libertad de cada nodo y la constante $k$ es la llamada constante del resorte o también conocida como la rigidez del resorte.

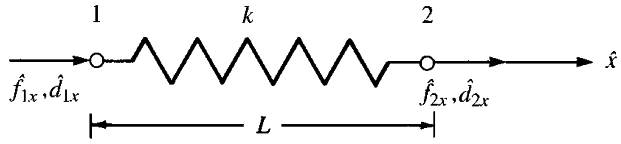


*Figura 5.* Sistema de resorte con dos nodos, elemento lineal del resorte con desplazamiento positivo de los nodos y con convención de fuerzas.

Después menciona que la constante del resorte se volverá a utilizar en los diferentes capítulos del libro pero con diferente significado, por ejemplo en el capítulo 3 la constante de rigidez se aplicará en barras definiéndola como $k = \frac{AE}{L}$, donde $A$ representa la sección transversal de la barra, $E$ es el módulo de elasticidad y $L$ es la longitud de la barra. En el capítulo 5 la constante de rigidez para una barra con sección transversal prismática con torsión se define como $k = \frac{JG}{L}$, donde $J$ representa el momento polar de inercia, $G$ es el módulo de rigidez del material y $L$ sigue representando la longitud de la barra. En los capítulos 13 y 14 hablan de conductividad de calor y de fluidos en materiales porosos, respectivamente en los cuales también se utiliza la constante $k$ y muestra que la constante de rigidez se puede aplicar en problemas no estructurales como transferencia de calor y fluidos como en problemas estructurales como son los sistemas de resortes y sistemas de barras. Hace especial énfasis en la utilidad de la constante de rigidez en los diferentes problemas aplicando la correcta ley constitutiva como la ley de Hooke para problemas estructurales, la ley de Fourier para problemas de transferencia de calor y la ley de Darcy para fluidos y un principio de conservación como son el equilibrio de los nodos y la conservación de energía.

Una vez que explicó el uso de la constante de rigidez muestra la relación entre las fuerzas de los nodos que son $\hat{f}_{1x}, \hat{f}_{2x}$ con los desplazamientos de los nodos que están dados por $\hat{d}_{1x}$, $\hat{d}_{2x}$ y menciona que dicha relación es la matriz de rigidez dada por:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

No explica de dónde se obtiene esta relación pero ha justificado el uso de la ley de Hooke desde el principio de la unidad, la cual se define como $F = -k\delta$, lo que nos lleva a inferir que efectivamente aplicando la ley de Hooke para sistemas de resortes se obtiene como resultado esta relación.

En seguida presenta el método de elemento finito el cual se explica en la sección 1.4 del libro y se utiliza para la construcción de la matriz de rigidez para un sistema de resortes y para su solución, lo que nos conducirá a poder resolver problemas ingenieriles.

El método lo divide en 7 pasos:

Paso 1: **Seleccionar el tipo de elemento**, en esta primera etapa el autor explica los tipos de elementos que se pueden seleccionar, los cuales se muestran a continuación en la Figura 6.

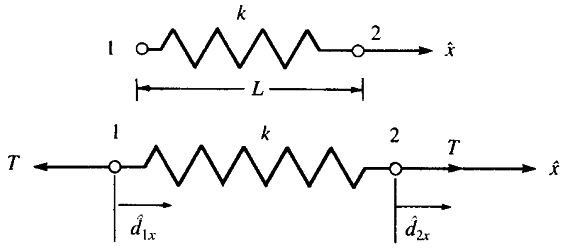


*Figura 6.* Esquema de un sistema de resorte con dos nodos, resorte lineal sujeto a fuerzas de tracción.

Paso 2: **Seleccionar la ecuación de desplazamiento**, en la segunda etapa el autor explica que, se debe de seleccionar una función que represente la deformación del resorte cuando se le aplica una fuerza, porque a veces es muy difícil obtener una solución exacta, por lo que se asume una función de forma o la distribución de desplazamiento dentro del elemento, usando una función apropiada. Comenta que la función más común o de mayor uso son los polinomios, después explica y justifica paso a paso cuales son estas distribuciones de desplazamiento o funciones de forma y lo hace para un resorte de dos nodos como se muestra en la Figura 7.

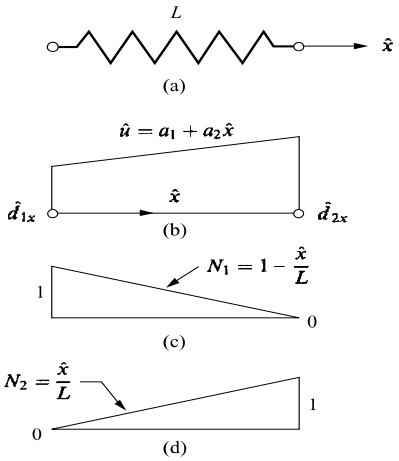


*Figura 7.* (a) Grafico de un elemento de resorte (b) Función de desplazamiento y función de forma $\hat{u}$ (c) $N_1$ (d) $N_2$ sobre dominio del elemento.

Obteniendo los al final la función de forma donde los $N_i$ expresa la forma de la propuesta distribución de desplazamiento.

$$N_1 = 1 - \frac{\hat{x}}{L} \text{ y } N_2 = \frac{\hat{x}}{L} \qquad (2)$$

donde $N_1, N_2$ representan la distribución de desplazamiento en un cierto dominio, los $N_i$ se les llama función de forma y expresan la forma de la propuesta distribución de desplazamiento. Este es un método alterno al de la ley de Hooke para obtener la matriz de rigidez.

Paso 3: **Definir la deformación/Desplazamiento y estrés/ Deformación**,

Para un sistema de resortes de dos como se muestra en la Figura 8.

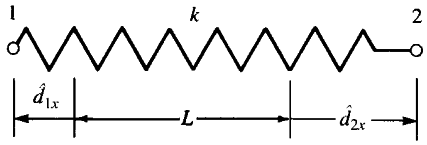


*Figura 8.*Esquema de un sistema de resortede dos nodos, deformación del resorte.

En esta sección el autor explica la deformación del resorte la cual se representa por $\delta = \hat{u}(L) - \hat{u}(0) = \hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x}$ (3)

donde

$\delta$ es la deformación del resorte, es decir la elongación total del resorte.

$\hat{d}_{1x}$ es el negativo porque la dirección de la deformación se hace en la dirección de negativa del eje $\hat{x}$.

$\hat{d}_{2x}$ es el positiva porque la dirección de la deformación se hace en la dirección de Positiva del eje $\hat{x}$.

El autor define a la fuerza de tracción como

$T = k\delta$ (4)

sustituyendo el valor de $\delta$obtenemos

$T = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$ (5)

en este apartado el autor define la fuerza de tracción como el producto de la constante del resorte $k$ por la deformación del resorte $\delta$, lo que deja listo para la obtención de la matriz de rigidez , la cual se explica en la siguiente sección.

Paso 4: **Deducir la matiz de rigidez y sus ecuaciones**.

En esta cuarta sección el autor explica como obtener la matriz de rigidez, utilizando la convención de las fuerzas de los nodos y equilibrio, que dice

$\hat{f}_{1x} = -T$ y $\hat{f}_{2x} = T$ (6)

Utilizando la ecuación anterior con la ecuación (5), se obtiene que

$T = \hat{f}_{1x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$ (7)

$T = \hat{f}_{2x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$ (8)

Rescribiendo la ecuación anterior

$\hat{f}_{1x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$ (9)

$\hat{f}_{2x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$ (10)

Ahora escribiéndola en su forma matricial obtenemos

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{pmatrix} \quad (11)$$

esta expresión matricial contiene la constante del resorte en dirección axial (es decir a lo largo de la dirección $\hat{x}$). El autor hace especial hincapié en que la matriz de rigidez $k$ es una matriz simétrica, pero no comenta cuál es la ventaja o desventaja de esta propiedad, también hace notar que a esta expresión se le denota por, matriz de rigidez local.

Paso 5: **Ensamblar la ecuación del elemento para obtener la ecuación global e introducir las condiciones de frontera**.

En esta quinta sección el autor comenta que en los subtemas posteriores muestra el proceso de ensamble de la matriz de rigidez global, para un elemento o dos y empleando el método de superposición y en está sección deja ambigua la forma de ensamblaje.

Paso 6: **Resolver para el desplazamiento de los nodos.**

En esta sexta sección el autor explica que la forma de obtener los desplazamientos de los nodos aplicando condiciones de frontera, tales como, condiciones de soporte de los materiales y resolviendo el sistema de ecuaciones $F = Kd$.

Paso 7: **Resolución para las fuerzas internas.**

Finalmente en la sexta sección el autor comenta que para encontrar las fuerzas internas es por sustitución aplicada en cada elemento en ecuaciones similares a la (9), (10).

Los 7 pasos presentados para encontrar la matriz de rigidez se han presentado anteriormente y nos permiten ver que está técnica es una técnica tecnológica. Es decir cada uno de los pasos tiene elementos tecnológicos asociados al contexto que para un aprendiz abren múltiples cuestiones. Podemos notar que la selección de casos, funciones de forma, los casos ideales y la variable k juegan roles importantes en la determinación de la matriz de rigidez. Particularmente esta constante del resorte $\hat{k}$ tiene un significado particular en diferentes tipos de tareas ingenieriles y dentro de esta materia se utiliza a lo largo del semestre en las diferentes unidades que se abordan en el curso como son: sistemas de resortes (capítulo 2), sistema de barras (capítulo 3), sistemas de barras de forma prismática con una sección transversal circular con torsión (capítulo 5). La constante del resorte $\hat{k}$ en este curso se utiliza para la resolución de problemas estructurales los cuales se mencionaron anteriormente, pero también se aplica en problemas no estructurales como sistemas eléctricos, problemas de flujo de fluidos y transferencia de calor, por lo que esta constante del resorte $\hat{k}$ se considera un elemento crucial que debemos analizar con mayor detalle. Además, esta constante aparece en diferentes elementos tecnológicos que permiten utilizarla como, la ley de Hooke, la ley de Darcy y la ley de Ohm. La importancia de la constante del resorte $\hat{k}$ denominada de esta manera en problemas estructurales es que relaciona al área del resorte, área de la barra y la sección transversal prismática circular con el módulo de elasticidad en los sistemas de resorte y de barras y con el módulo de corte del material respectivamente todo esto dividido entre la longitud del resorte o de la barra. Esto nos indica que tiene la misma forma para los diferentes problemas haciendo la misma función en cada uno de ellos, por lo que podemos decir que la constante del resorte $\hat{k}$, no es sólo un número si no que es un parámetro fundamental para la solución de estos problemas.

A partir de la asistencia y un primer análisis del curso pudimos constatar que las clases el método de solución se imparte utilizando la ley de Hooke, pero en el libro de texto lo presenta con la función de forma, por lo que se entrevistó al profesor A y comenta que para el nivel de licenciatura es más fácil verlo de esta manera. El profesor A señala que la función de forma es

otro método alterno de solución el cual se aborda en los cursos de maestría, por lo que es necesario hacer un análisis más fino del curso e investigar las razones de las diferencias en las técnicas. Esto nos permitirá reconocer elementos tecnológicos asociados al curso.

## Conclusión

En el presente trabajo se seleccionó y analizó la clase DEA junto con el libro de texto de la asignatura, para observar qué praxeologías matemáticas y de modelización aparecen en curso impartido a futuros ingenieros que están próximos a egresar. De la misma manera, este análisis permite observar las dificultades que tienen para usar las herramientas que se les proporcionaron al inicio de la carrera. En particular, hemos distinguido que algunas de las praxeologías hacen intervenir elementos del curso de álgebra lineal, noción de linealidad y matrices como modelos, por ejemplo. Al principio del curso se les solicitó a los estudiantes utilizar algún programa computacional para realizar cálculos para asociados a cierto modelo pero pronto se toparon con el problema de que tenían que recordar como se multiplican las matrices. A pesar de que estaban utilizando un programa los alumnos tenían que construir la función que les resolviera el sistema matricial. El análisis de los cursos está en su etapa inicial pero consideramos que ya hemos identificado tipos de tareas como el cálculo de desplazamiento de un resorte que hacen intervenir praxeologías de modelización matemática que pueden estar relacionadas con praxeologías matemáticas del curso de álgebra lineal. Más localmente, el análisis del curso y las entrevistas con el profesor A nos permitirán comparar las praxeologías propuestas en el libro y éstas presentadas en el curso, las razones de estas diferencias así como los diferentes niveles de discursos tecnológicos que las sustentan. Consideramos que la aproximación teórica metodológica nos permite realizar análisis praxeológicos de los cursos de álgebra lineal E(M) y de DEA E(DI) serán la base de un diseño didáctico.

## Referencias y blibliografía

Askeland D., & Phulé P. (2004). *Ciencia e Ingeniería de los Materiales*. Cengage.

Barbero, J. (2011). *Introduction to Composite Materials Design* (pp. 167-213). CRC Press.

Bissell, C. C., & Dillon, C. (2000). Telling tales: models, stories and meanings. *For the Learning of Mathematics, 20*(3), 3-11.

Bissell, C. (2002). Suporting student proyects at a distance through ICT: The UK open University approach. *European Journal of Engineering Education*, *22*(1), 15-21.

Blum, W., Galbraith, L., & Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education ICMI Study Series* (pp. 3-32). New York: Springer,

Camarena, P. (1999). Hacia la integración de conocimiento: matemáticas e ingeniería, *Memorias del 2do. Congreso Internacional de Ingeniería electronica y sistemas*, Mexico.

Chevallard, Y. (1999). La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes. En J. L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la X Ecole d'été de Didactique* (pp. 98-112). Francia: Académie de Caen.

Castela, C., & Romo-Vazquez, A. (2011). Des mathématiques a làutomatique : étude des effets de transposition sur la transformèe de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, *31*(1). 79-130.

Kent P., & Noss R. (2000). The visibility of models: Using technology as a bridge between mathematics and engineering. *International Journal of Mathematical Educatión in Science and Technology, 31*, 1, 61-69.

Kent P., & Noss R. (2001). Finding a role for technology in service mathematics for engineers and scientists. In D. Holton (Ed), *The teaching and learning of mathematics at university level: ICMI study* (pp. 395-404).

Kent, P., & Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2* (pp. 39/1 -39/7). London U.K.

Logan D.L. (2004). *A First Course in the Finite Element Method*. Thomson.

Macias, C. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación de ingenieros* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Martínez, E. (2014). *Diseño de una secuencia basada en optimización para la enseñanza del Cálculo Diferencial en formación de ingenieros* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subject- why? In A. G. Howson et al. (Eds), *Mathematics as a service subject* (pp.28-34). Cambridge: Cambridge University Press (Series: ICMI study).

Romo-Vázquez, A. (2009). *Les mathématiques dans la formation d'ingénieurs*. Paris: Irem de Paris.

Soto, S. (2012). *La modelación matemática y su vinculación con el entorno de la formación matemática de ingenieros* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.