
Vicente **Carrión** Miranda,
Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV
México
Email: vcarion@cinvestav.mx
Pablo Rafael **Zamudio** Cortés
Facultad de Ciencias UNAM
México
Email: lobo@ciencias.unam.mx

# Reforzamiento del pensamiento algebraico con base en tareas que requieren del pensamiento funcional

## Resumen.

*Resumen*. En el taller se utilizan algunas propiedades de funciones reales de variable real en el tratamiento de relaciones algebraicas, desde el punto de vista de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). Está dirigido a profesores del nivel medio superior y superior. Los participantes trabajan en pequeños grupos. Cada equipo se enfrenta a una situación matemática diferente utilizando un mismo *software* de geometría dinámica. Los participantes tienen ocasión de verificar cómo el uso de herramientas tecnológicas ejerce influencia en el proceso del desarrollo de la actividad y en el manejo de conceptos. El trabajo se desarrolla con medios digitales, *software* algebraico-geométrico, en ventanas gráfica y algebraica.

*Palabras clave: Actividad matemática, Competencia, ETM., Pensamiento algebraico, Pensamiento funcional, Trabajo colaborativo.*

## Introducción

Las actividades se realizan con base en que los saberes del álgebra no son suficientes para los tratamientos que se ponen en juego con funciones (Vivier, L.; 2011); por ejemplo, para examinar propiedades específicas en un tema tan complejo como la tangencia es necesario el llamado pensamiento funcional. Es posible que de los objetos matemáticos el de funciones es el que puede expresarse con más registros de expresión: con lenguaje, describiendo movimientos o evoluciones, con representaciones gráficas, con tablas numéricas y con fórmulas algebraicas. Una actividad antecedente a la que aquí se presenta es un taller con profesores donde presentamos problemas vinculados con lenguaje funcional y características esenciales de una función real de variable real (Carrión & Pluvinage, 2014). Se puede sustentar una mejor comprensión del contenido conceptual de funciones con la coordinación de varios registros de representación (Duval, 1993).

## Metodología

Para el desarrollo del trabajo con los participantes se propone la metodología ACODESA que combina trabajos individuales, en pequeños grupos y en forma colectiva (Hitt, 2007). Los profesores se distribuyen en pequeños grupos. Cada grupo trabaja utilizando *software* de Geometría Dinámica para graficar funciones, procesar expresiones algebraicas y relaciones numéricas. Se pretende estudiar paralelamente aspectos gráficos con elementos algebraicos y numéricos. Se consideran simultáneamente fórmulas y curvas. Lo anterior se consigue por la facilidad que tiene el *software* de permitir abrir al mismo tiempo varias ventanas. Se consideran sólo funciones reales de una variable real en una interrelación de marcos (Douady, 1986). Se observa y se refuerza la presencia de objetos matemáticos al lado de los conceptos.

Los participantes interactúan entre instrumentos, registros de representación y formas de expresión y reconocen las potencialidades de estos elementos para propiciar la transformación del trabajo matemático. Se observa cómo el uso de entornos tecnológicos y sistemas de signos influyen en la construcción de los conceptos en el estudiante y en la conducción de su trabajo matemático. Se integran globalmente los aspectos cognitivo, técnico, didáctico y afectivo.

Se discute el proceso representacional donde el grupo de participantes da significado progresivamente a las relaciones entre las gráficas cartesianas y las fórmulas algebraicas. Además, se discuten las interacciones del trabajo matemático en el aula. Se analizan estas interacciones en la construcción del pensamiento funcional.

Con el objetivo de examinar las representaciones que utilizan los participantes se diseñan actividades para convertir, en uno y otro sentidos, registros de representación algebraico y gráfico. Las reflexiones cualitativas se enfocan en los ETM y en los registros de representación.

Los cinco problemas que se presentan más adelante constituyen la base matemática que sustenta el diseño y elaboración de las actividades que realizan los participantes en el taller.

## Consideraciones teóricas

El trabajo describe las relaciones entre ETM (Kuzniak, A. & Richard, P. R., 2014), utilizando un enfoque metodológico basado en el trabajo colaborativo. El objetivo fundamental es el estudio del trabajo matemático. El taller intenta integrar ciertos aspectos en las dimensiones semiótica, cognitiva e instrumental que conforman un ETM. La organización en equipos para realizar trabajo colaborativo contempla la dimensión social que se refleja en un discusión de la calidad de la enseñanza generada en un contexto de discusión en grupo. Los participantes intentan construir trayectorias de pensamiento en la realización de las actividades al identificarse con el trabajo matemático. Se sustentan en nociones teóricas sobre representación y visualización en un espacio de trabajo de funciones.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación han propiciado una transformación social. El ambiente educativo no debe quedarse al margen. El uso de las nuevas tecnologías es fundamental en los procesos de aprendizaje y de enseñanza de la matemática. Los cambios que producen en el aprendizaje se tienen tanto en los propios contenidos como en la forma de abordarlos. Los estudiantes pueden profundizar su aprendizaje usándolas en formas pertinente y responsable; pueden obtener, probar o rechazar conjeturas llegando, cada vez, a niveles más altos de abstracción y de generalización. El profesor también debe saber que el uso conveniente y oportuno desarrolla el pensamiento matemático de los estudiantes y que experimentar con recursos digitales conduce a una mejor visualización, exploración y adquisición de conceptos. Él debe decidir cuándo y en qué forma utilizarlas. El uso atinado de los programas computacionales simbólicos, de graficación y de simulación, al promover un mejor aprendizaje, pueden perturbar las formas actuales para abordar los cursos de matemáticas establecidas oficialmente; sin embargo, esto invita a replantear nuevas maneras de conducir la enseñanza de la matemática. Lo que aquí se propone es usar los recursos digitales para un aprendizaje efectivo de conceptos fundamentales del álgebra afrontando problemas que ayudan a estimular, desarrollar e incrementar el pensamiento funcional. Su diseño toma en cuenta que los alumnos, por lo general, poseen una formación académica heterogénea. Provienen de planes de estudio diferentes con un manejo variado de competencias.

La introducción de los conceptos relacionados con propiedades de funciones supone la adquisición de formas nuevas de pensamiento y de lenguaje que introducen nuevos conceptos respecto al álgebra. Desde el punto de vista cognitivo no es suficiente sólo el manejo de álgebra. Se puede afirmar que los conceptos relacionados con propiedades de funciones, donde intervienen procesos que requieren de conceptos de cálculo, requieren que el estudiante incorpore nuevas acciones de pensamiento, funcional y variacional, distintos del algebraico (Adjiage & Pluvinage, 2008; Adjiage & Pluvinage, 2012), que combinan aprendizajes ligados a procesos y conceptos. El estudiante debe aprender un lenguaje específico.

El análisis algebraico utilizado como único recurso en el aprendizaje de conceptos algebraicos y su aplicación para resolver problemas, en veces, constituye un obstáculo que bloquea a los estudiantes en ciertos problemas que requieren del razonamiento funcional. Se presentan tres ejemplos que ilustran esta realidad.

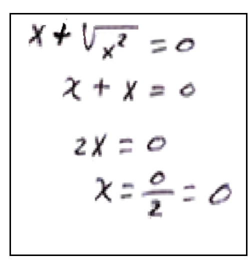


*Figura 1*

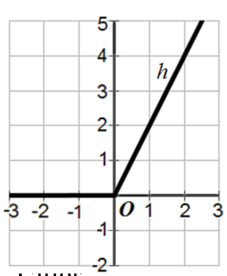

*Figura 2* 1). En la *figura 1* se muestra la resolución algebraica obtenidas por la mayoría de los estudiantes y profesores cuando resuelven la ecuación $x + \sqrt{x^2} = 0$. Se pone de manifiesto la ausencia del desarrollo de pensamiento funcional, ocasionada por las dificultades que presenta la raíz cuadrada de un cuadrado. Se percibe un tratamiento parcial, sólo algebraico. Obtienen la solución $x = 0$. No obstante, si se recurre a la representación gráfica de la función $h(x) = x + \sqrt{x^2}$, *figura 2*, se advierte que las soluciones son el conjunto de los valores reales de $x$ tales que $x = t$ y $t < 0$. El procedimiento algebraico de resolución requiere de la definición de valor absoluto de un número real negativo: $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$.

A partir de la perspectiva de los ETM se puede verificar que en la enseñanza tradicional hace falta poner más énfasis en técnicas que no se apoyan directamente en un sustento teórico. Un caso es el número negativo. Realmente, es un objeto matemático generado a partir de la visión teórica de la recta numérica. En la enseñanza predomina la insistencia en escrituras de números negativos con el símbolo "–"; por ejemplo 1. Sin embargo, el valor absoluto de –1 no es ese mismo número sin signo, sino el mayor de los dos siguientes: –1 y –(–1). En espacios de trabajo personales de estudiantes, y en la perspectiva de sus desarrollos, pueden reforzarse actividades donde está presente la identidad $\sqrt{x^2} = |x|$. Es posible suponer, además, que actividades de este tipo podrían contribuir a la desaparición del error clásico $\sqrt{x^2} = x$, presente en las producciones de los estudiantes (Carrión & Pluvinage, 2014).

2). En Adjiage & Pluvinage (2012) se presenta el ejemplo de la resolución en los números reales de la ecuación (1) con el manejo del *software* DERIVE.

$x\sqrt{x^2 - 1} = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (1)

El *software* exhibe las tres soluciones $-1$, $0$ y $1$, aun cuando la raíz cuadrada no tiene sentido en $x = 0$ porque $\sqrt{-1}$ no es un número real. La mayoría de los estudiantes y profesores al resolver la ecuación (1) sólo toman en cuenta la propiedad algebraica general "un producto es cero si, al menos, uno de sus factores es cero". Es necesario analizar, además, en la resolución el dominio de la función (2), *figura 3*.

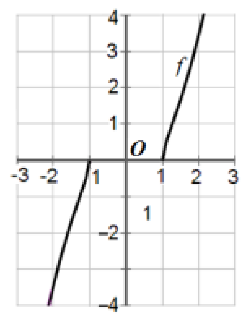


*Figura 3*

$f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$ . . . . . . . . . . . . . . . . (2)

Un caso que contrasta entre tratamientos algebraicos y funcionales se presenta con la ecuación (3),

$x\sqrt{1 - x^2} = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (3)

Es posible resolver siguiendo exactamente el mismo procedimiento algebraico y las mismas operaciones utilizados para resolver la ecuación (2). Se llega igualmente a las tres soluciones obtenidas para la ecuación (1). Sin embargo, sólo $-1$ y $1$ son solucioes de (1) y las tres, $-1$, $0$ y $1$, son soluciones de (2). De nuevo, se puede analizar el dominio de la función (4), *figura 4*.

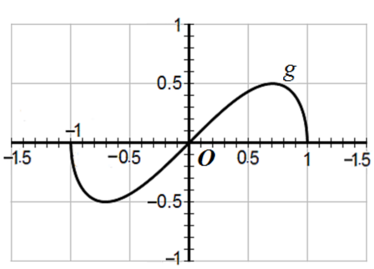


*Figura 4*

$f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . (4)

Es aquí donde entra en auxilio el pensamiento funcional. Al graficar las funciones (2) y (4), *figuras 3* y *4*, se determinan sus dominios y se comparan. Una vez determinadas las soluciones se puede ir de nuevo a los procedimientos algebraicos y hacer los ajustes necesarios y establecer las relaciones entre ambos registros de representación.

## Problemas que son la base matemática para el diseño de las actividades

Algunas propiedades de funciones empleadas en demostrar teoremas o en resolver problemas que requieren de conceptos de cálculo diferencial cobran sentido al aplicarlas en la resolución de ecuaciones y desigualdades o en demostraciones donde se aplican relaciones algebraicas. A continuación se presentan ejemplos donde se aplican métodos que requieren del uso de tales propiedades. Son métodos que pueden resultar menos laboriosos que otros donde se utilizan procesos algebraicos más complejos. Al afrontar situaciones problemáticas del álgebra escolar su uso reporta ventaja porque refuerzan el aprendizaje de conceptos de cálculo diferencial. Los siguientes ejemplos ilustran estas ideas. Requieren de algunas propiedades algebraicas y de las siguientes propiedades de funciones: composición, continuidad, crecimiento, derivación y propiedades de valores absolutos.

**Problema 1**. Resolver la ecuación siguiente si $x \geq 4$:

$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}-2=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ . . . . . . . (5).

**Solución**.

Se definen las funciones:

$f(x)=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}-2$ y $g(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$, $x \geq 4$.

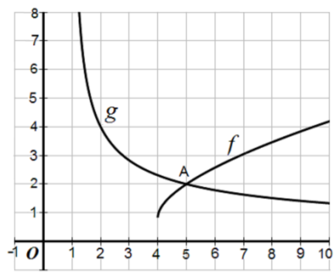


*Figura 5*

La función $f$ es continua y creciente para toda $x$ mayor que 4 y la función $g$ es continua y decreciente para valores de $x$ mayores que 2, *figura 5*. Como consecuencia, la ecuación (5) sólo tiene una solución, $x_1 = 5$, encontrada por simple inspección.

**Problema 2**. Demostrar la desigualdad siguiente, para $x > 0$:

$\sqrt{x+1} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ . . . . . . . . . . . . . . . (6).

**Solución**.

| Se consideran las funciones $g_1$ y $g_2$, *figuras 6 y 7*. | | Representación grafica de la desigualdad (6) con las funciones $g_3$ y $g_4$, *figura 8.* |
|---|---|---|
| $g_1(x)=\sqrt{x+1}$, $x > -1$ | $g_2(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $x > -1$ | $g_3(x)=\sqrt{x+1}, x \geq 0$, $g_4(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}, x \geq 0$ |

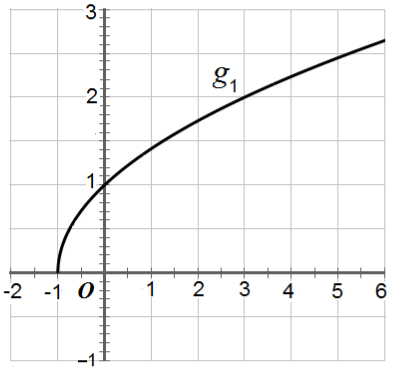

*Figura 6*

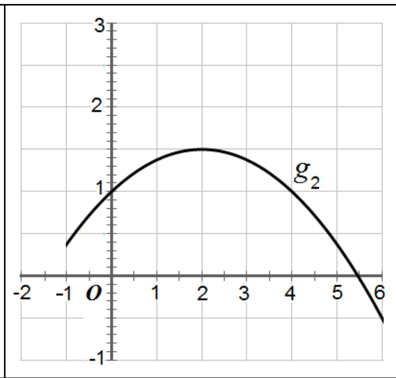

*Figura 7*

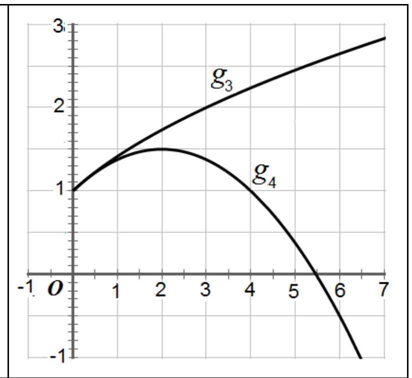

*Figura 8*

En la demostración de (6) se utiliza la función $f$, *figura 9*,

$f(x) = \sqrt{x+1} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$ . . . . . . . . . . . (7)

Primero se demuestra que la función (7) es continua y creciente, si $x$ es mayor que cero para verificar con esto que $f(x) > f(0)$ si $x > 0$.

Se tiene $f(x) = 0$ en $x = 0$. Entonces $f(x) > 0$ para toda $x > 0$.

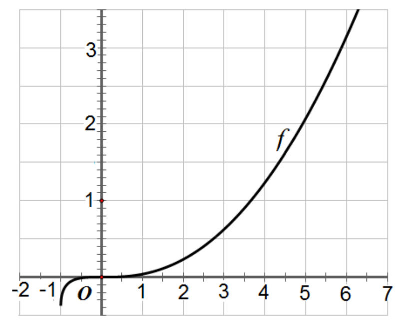

*Figura 9*

La derivada de $f$ respecto a $x$, *figura 10*, es

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$ . . . . . . . . . . . . . . (8)

Para demostrar que $f'$ es positiva, si $x$ es positiva, se utiliza la desigualdad de Cauchy (Si $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ entonces $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$):

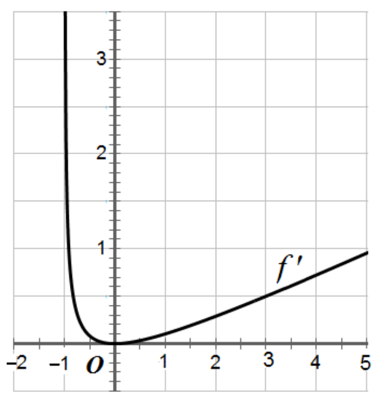

*Figura 10*

$\sqrt{x+1} = \sqrt{1\cdot(x+1)} \leq \frac{1+(x+1)}{2} = \frac{x+2}{2}$ . . . . . . . (9)

Reemplazando (9) en (8) se obtiene

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4} \geq \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4} = \frac{x^2}{4(x+2)}.$$

La función $f$ es creciente porque para $x > 0$ se cumple $f'(x) > 0$.

Por tanto, si $x > 0$ entonces $f(x) > f(0)$; o sea, $f(x) > 0$.

Se concluye la función $f$ es continua y creciente si $x > 0$. Con esto queda demostrada la desigualdad (6).

Un tratamiento semejante se sigue para demostrar la desigualdad $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, si $-1 < x < 0$, *figura 11*.

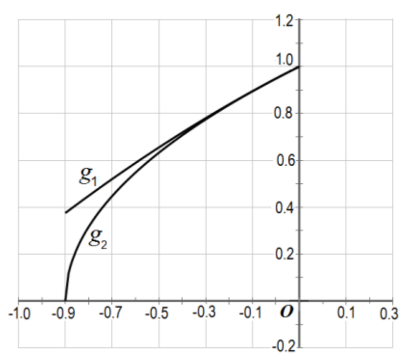

*Figura 11*

**Problema 3**. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales con tres incógnitas:

$$\left.\begin{matrix} 3^x + 5^x = 8^y \\ 3^y + 5^y = 8^z \\ 3^z + 5^z = 8^x \end{matrix}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

**Solución**.

| | |
|---|---|
| El sistema (10) se puede transformar en el sistema siguiente:<br>$\left.\begin{matrix} y = \frac{ln(3^x)\ +\ 5^x}{ln(8)} \\ z = \frac{ln(3^y)\ +\ 5^y}{ln(8)} \\ x = \frac{ln(3^z)\ +\ 5^z}{ln(8)} \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (11)$ | Considerando la sustitución $f(x) = \frac{ln(3^x)\ +\ 5^x}{ln(8)}$ el sistema de ecuaciones (11) se puede escribir como sigue:<br>$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ z = f(y) \\ x = f(z) \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$ |

El sistema (10) es equivalente a la ecuación funcional

$$f(z) = f\left(f\big(f(x)\big)\right) = x \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

La ecuación (13) es equivalente a $f(x) = x$ porque $f$ es creciente en todo valor positivo, *figura 12*; entonces,

$$y = f(x) = \frac{ln(3^x)\ +\ 5^x}{ln(8)} = x \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

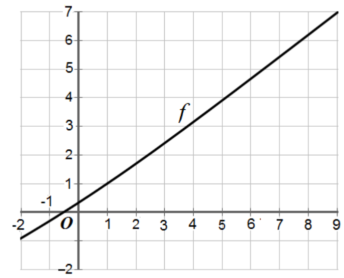


*Figura 12*

La ecuación (14) se transforma en la siguiente: $3^x + 5^x = 8^x$. De aquí se obtiene

$$\left(\frac{3}{8}\right)^x + \left(\frac{5}{8}\right)^x = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

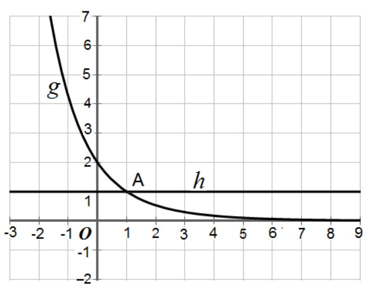


*Figura 13*

Una solución de la ecuación (15) es $x_1 = 1$. La solución es única porque si $x > 0$ la función $g(x) = \left(\frac{3}{8}\right)^x + \left(\frac{5}{8}\right)^x$ es creciente y, además, $g(x) = 1$ es constante y ambas son continuas en el mismo dominio, *figura 13.*
Con un procedimiento semejante se obtener que la solución del sistema de ecuaciones (10) es $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ y $z_1 = 1$.

**Problema 4**. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales con dos incógnitas:

$$\left.\begin{matrix} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = ln\left(\frac{y}{x}\right) \\ 3^{2x}(3^x - 8) + 8 \cdot 3^{x+3} = 3^{2y+3} \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

**Solución**.

De la primera ecuación del sistema (16) se tiene que $x \cdot y > 0$. La ecuación se transforma en la siguiente:

$$\sqrt[3]{x} + ln(x) = \sqrt[3]{y} + ln(y) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

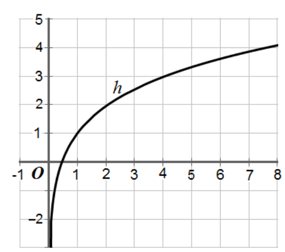


*Figura 14*

Si definimos la función $h(x) = \sqrt[3]{x} + ln(x)$, *figura 14*, entonces la ecuación (17) tiene la forma de la ecuación funcional $h(x) = h(y)$.

La función $h$ es creciente para $x > 0$. Entonces, de la igualdad $h(x) = h(y)$ se sigue $x = y$, en este mismo conjunto de valores.

Por otra parte, de la segunda ecuación del sistema (16) se despeja $y$ y se designa con $y = f(x)$, *figura 15*:

$y = f(x) = \frac{ln[3^{2x-3}(3^x - 8) + 8 \cdot 3^x]}{ln(9)}$ . . . . . . . . (18)

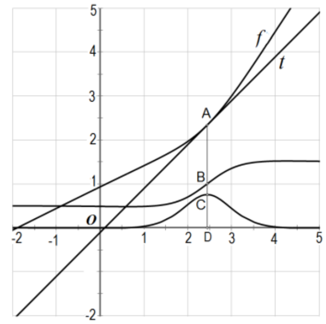

*Figura 15*

Considérese también la función $g$ definida como sigue:

$g(x) = x = y$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (19)

La pendiente de la recta tangente $t$ de la función (18) es igual a 1 en el punto A de abscisa $x_A = \frac{3\,ln(6)}{2ln(3)}$, *figura 15*. Si $x < x_A$ la pendiente es menor que 1 y si $x > x_A$ es mayor que 1. Esto garantiza que la ecuación resultante de igualar las funciones (18) y (19), $y = f(x) = g(x)$ tenga sólo dos soluciones, $x_1$ y $x_2$, con las siguientes características: $x_1 < x_A$ y $x_2 > x_A$, *figura 16*, donde $x_1 = \frac{3\,ln(2)}{ln(3)}$ y $x_2 = 3$. Las soluciones del sistema de ecuaciones (16) son los puntos $D = (x_1,\ y_1)$ y $E = (x_2,\ y_2)$, tales que $x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$.

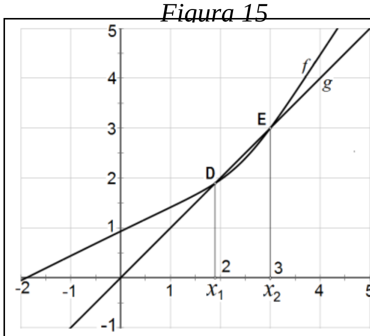

*Figura 16*

**Problema 5**. Resolver la ecuación

$\left|x^2 - 6x + 7\right| + \left|x^2 - 5x + 6\right| = x - 1$ . . . . . (20)

**Solución**.

Se utiliza la siguiente propiedad de valores absolutos para funciones: Sean $f$ y $g$ funciones reales de variable real. Si

$\left|f(x)\right| + \left|g(x)\right| = -f(x) + g(x)$

entonces $f(x) \leq 0$ y $g(x) \geq 0$.

La igualdad de este enunciado coincide con la ecuación (20) si se definen las funciones

$f(x) = x^2 - 6x + 7$ y

$g(x) = x^2 - 5x + 6$.

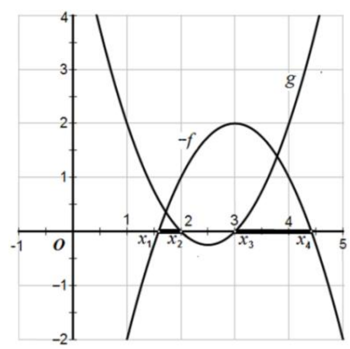

*Figura 17*

Esto significa que $\left|f(x)\right| = -f(x)$ y $\left|g(\mathrm{x})\right| = g(x)$.

En otras palabras, se tienen las relaciones
$f(x) \leq 0$ y $g(x) \geq 0$, *figura 17*.
Se llega al sistema de desigualdades siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 6x + 7 \ \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

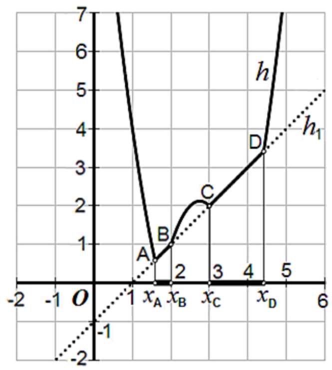

*Figura 18*

La solución del sistema de desigualdades (21) es la unión de los intervalos $x_1 < x < x_2$ y $x_3 < x < x_4$, tales que
$x_1 = 3 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 3 + \sqrt{2}$, *figura 17*.

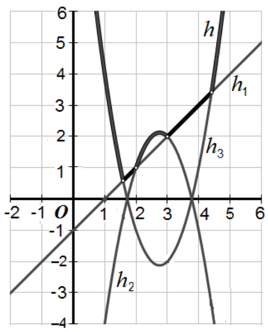

*Figura 19*

Para tener otra manera de visualizar la resolución de la ecuación (20) se toman en cuenta las funciones $h$ y $h_1$, *figura 18*.

$$h(x) = \left|x^2 - 6x + 7\right| + \left|x^2 - 5x + 6\right| \ \ldots\ldots \quad (22)$$

$$h_1(x) = x - 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

La función (22), *figura 19*, se determina con las siguientes secciones:

$h_1(x) = x - 1$, tal que $3 - \sqrt{2} < x < 2$,
$h_2(\mathrm{x}) = -2x^2 + 11x - 13$, tal que $2 < x < 3$,
$h_3(x) = 2x^2 - 11x + 13$, tal que $x < 3 - \sqrt{2}$ o $x > 3$

En la *figura 18* se observan los segmentos de recta comunes de las representaciones gráficas de las funciones (22) y (23). Estos segmentos determinan los intervalos solución de la ecuación (20): $x_\mathrm{A} < x < x_\mathrm{B}$ y $x_\mathrm{C} < x < x_\mathrm{D}$. Las soluciones $x_\mathrm{A}$ y $x_\mathrm{D}$ se encuentran resolviendo simultáneamente el sistema de ecuaciones formado con las funciones $h_1$ y $h_3$ y las soluciones $x_\mathrm{B}$ y $x_\mathrm{C}$ se obtienen con $h_1$ y $h_2$, *figuras 18* y *19*.

## Conclusiones

Consideramos que el saber del álgebra no es suficiente para los tratamientos de funciones, se necesita el pensamiento funcional. La introducción de los conceptos del cálculo supone la adquisición de una nueva forma de pensamiento y de un lenguaje que introducen elementos adicionales y complementarios respecto al álgebra. Para adquirir procesos y conceptos sobre funciones el estudiante debe aprender un nuevo lenguaje específico. Debe entrar en el razonamiento funcional, distinto al algebraico.
Se mejora la calidad de la enseñanza que se genera en un contexto de discusión en grupo.
El uso de herramientas tecnológicas ejerce influencia en el desarrollo de las actividades y en el manejo de conceptos.

## Referencias y Bibliografía


Adjiage R. & Pluvinage, F. (2008), A numerical landscape (chapter). In Calvin L. Petroselli (Eds), Science Education Issues and Developments (pp. 5-57), New-York: Nova Publishers.

Adjiage R. & Pluvinage, F. (2012), Strates de compétences en mathématiques. Repères IREM, vol. 88.

Carrión Miranda, V. & Pluvinage, F. (2014) Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Volumen especial ETM3. En proceso de publicación.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherche en Didactique des Mathématiques, 7/2, 5–31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37–65.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.). *Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique: modèles, dispositifs et pratiques.* (p. 65-88). Paris: Hermes.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Volumen especial ETM3*. En proceso de publicación.

Vivier, L. (2011). La noción de tangente en la educación media superior. *El Cálculo y su Enseñanza.* Vol. II, año 2010-2011. México, Cinvestav-IPN.