Enseñando operaciones con números decimales: Representaciones conflictivas

Carlos A. **López Leiva**
University of New Mexico
USA
callopez@unm.edu
Juan **Castro**
Colegio William M. Botnan
Guatemala
juancastrocutz@gmail.com
Jorge Alfredo **Monge**
Common Hope Guatemala
Guatemala
jorgemonge.aa@outlook.com

Resumen

Este documento describe el análisis del surgimiento y la resolución de un conflicto cognitivo al representar simultáneamente números decimales y mixtos usando bloques de base diez. El conflicto surgió cuando un grupo de estudiantes del5to grado usó la misma representación matemática para operar números usando ambas notaciones. Presentamos el proceso a través del cual los estudiantes clarificaron esta confusión por medio del uso paralelo de múltiples representaciones matemáticas, especialmente a través del uso constante de una representación (bananos) la cual permitió la manipulación versátil de las representaciones para formar tanto decenas como décimos. La resolución de tal conflicto es presentada y a la vez discutida desde puntos de vista pedagógico y de aprendizaje.

Palabras Clave: Números decimales y mixtos, bloques de base diez, representaciones conflictivas y representaciones múltiples, fondos de conocimiento, metacognición, y educación primaria.

Durante nuestro trabajo con un grupo de alumnas/os de 5to primaria, nosotros, los autores de este documento, aprendimos no solo acerca de la importancia de prestar atención a lo que los estudiantes piensan y entienden durante una lección matemática, sino también sobre el beneficio pedagógico y de aprendizaje que trae el hacer explícitas las construcciones y manipulaciones que aplicamos a ciertas representaciones físicas al asignarles los valores matemáticos que estudiamos. Esto es importante porque frecuentemente en el uso del material didáctico físico en la clase de matemáticas los estudiantes asumen un valor absoluto asignado a estas representaciones. Por ejemplo, a los bloques de base diez les asignamos un valor diferente cuando los usamos con números enteros o con números decimales. Un pequeño cubito puede representar ya sea una unidad en el caso de números enteros o un centésimo o un milésimo en el caso de los decimales. Aquí compartimos el proceso que nos ayudó a resolver un conflicto que surgió al utilizar los bloques de base diez para representar físicamente operaciones con números decimales y números mixtos y también cómo este proceso propició el desarrollo meta-cognitivo de los estudiantes. Primeramente, describimos recomendaciones ofrecidas por trabajos previos con números decimales y enteros. Luego, presentamos el marco teórico que dirige nuestro análisis, seguido por la descripción del contexto donde trabajamos, así como de los ejemplos de las lecciones que implementamos y donde centramos nuestra descripción en el conflicto y resolución del uso de bloques de base diez para representar y operar números decimales y números mixtos. Finalmente, discutimos lo que aprendimos por medio de esta experiencia y brevemente proveemos recomendaciones didácticas.

Estudios Previos

Las representaciones físicas en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas han sido consideradas útiles para apoyar la comprensión y razonamiento de los estudiantes. Esto se debe a que la manipulación física de estos materiales realizada conjuntamente con la manipulación de símbolos matemáticos estimula una comprensión y un razonamiento integrado acerca de cómo estas representaciones se relacionan mutuamente (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003). La conexión entre los distintos tipos representaciones ayuda a que los estudiantes puedan hacer mejor sentido sobre el sistema matemático, especialmente en cuanto a entender procedimientos y conceptos implícitos en los símbolos y algoritmos matemáticos (Hiebert, 1992). Por ello la enseñanza matemática multimodal es efectiva para ayudar a los estudiantes en la escuela primaria y secundaria a entender los conceptos matemáticos de una manera interactiva y conceptual más que memorística y repetitiva (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003; Morales, Khisty, &Chval, 2003). Particularmente los bloques de base diez representan un tipo de modelo matemático útil para enseñar el concepto de valor relativo y posicional numérico, las operaciones con números enteros (Dienes, 1960; Fuson & Briars 1990; Hunter et al., 1994), como también con números decimales (Cramer et al., 2009; Hiebert, Wearne, &Taber 1991; Suh et al., 2008).

Se ha enfatizado que el uso de representaciones concretas resulta más efectivo cuando el uso centra en el entendimiento de los conceptos matemáticos en relación a las representaciones, más que cuando la exploración se enfoca en la estructura de las representaciones propiamente dichas y las acciones realizadas con las mismas (Lesh et al., 2003). El uso fluido y entendimiento de las distintas notaciones numéricas en cuanto a su valor y significado se desarrollan a través de tres clases de conocimiento: (a) el conocimiento acerca de los símbolos y las notaciones matemáticas de los números (758), las fracciones (½), o fracciones decimales (0.5); (b) el conocimiento de las reglas de los pasos y procedimientos para alcanzar resultados precisos; (c) el conocimiento sobre el mundo real para comprender el valor que representan las notaciones matemáticas (Hiebert, 1992). Las relaciones entre estos tipos de conocimiento pueden ser fortalecidas por medio de un proceso multimodal y que a la vez ayudan al aprendizaje y uso efectivo de los símbolos y las notaciones matemáticas. En este proceso multimodal, las notaciones pueden ser aprendidas utilizando bloques base diez. Sin embargo, con cada notación cada componente de los bloques base diez toma distinto valor. Por ejemplo, la tablita que contiene 100 cubos pequeños puede representar 100 unidades; al mismo tiempo esta tablita puede representar una unidad que puede ser dividida en facciones como medios o décimos; además esta tablita se puede usar para representar una unidad divida en decimales, de manera que cada cubo representa un centésimo. Por lo tanto, en el uso de los bloques con las distintas notaciones el enfoque del uso ha de centrarse en los conceptos matemáticos que los bloques representan. Sin embargo, en nuestro caso, al prestar atención a las decisiones tomadas para usar los bloques de base diez con las distintas notaciones matemáticas ayudó a los estudiantes a una comprensión conceptual de las notaciones, como también a desarrollar una perspectiva metacognitiva al adaptar el valor de los bloques al de las notaciones (Schoenfeld, 1987).

A pesar sus beneficios, los modelos o representaciones matemáticas concretas pueden ser mal utilizadas (Cramer et al., 2009; Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003). Primero, los estudiantes deben de entender cómo las representaciones de los números y los bloques de base diez aunque estén conectadas una con otra, también se pueden referir a contextos de notaciones diferentes y estas diferencias deben ser clarificadas explícitamente (Hiebert, 1992). Segundo, las representaciones pueden carecer de transparencia. Este concepto refiere a que la estructura de un modelo puede guiar a los estudiantes a fijarse en aspectos físicos de los modelos que son irrelevantes a los conceptos matemáticos (Stacey et al., 2001). La *transparencia* se refiere a que la estructura de los modelos o representaciones ayuda a los estudiantes a comprender y aprender conceptos matemáticos (Lave &Wenger, 1991; Stacey et al., 2001). Por esta razón el uso de variedad de representaciones o modelos (e.g., símbolos numéricos, símbolos verbales, dibujos, objetos reales, acciones, y representaciones físicas como bloques base diez) con respecto a un concepto matemático ayuda a una mejor comprensión y aprendizaje de ese concepto (Cramer et al., 2009; Lamon, 2005; Lesh et al., 2003).

Marco Conceptual

Para nuestro análisis, tomamos como marco conceptual el constructo de fondos de conocimiento, el cual resalta el valor del conocimiento que las niñas y niños obtienen como resultado de formar parte de su comunidad y de sus familias. Este conocimiento no se detiene cuando ellos llegan a la escuela, sino por el contrario este conocimiento representa un fundamento para el aprendizaje en la escuela. Estos conocimientos del hogar, de la comunidad, de la vida representan fondos que estos niños y niñas tienen y que deben ser considerados, utilizados y promovidos en la escuela de manera que los estudiantes pueden apreciar que sus experiencias y conocimiento fuera y dentro de la escuela son válidos, legítimos y útiles (González, Andrade, Civil, &Moll, 2001). Además con respecto al aprendizaje de las matemáticas, reconocemos que en el proceso de enseñanza-aprendizaje como educadores debemos de iniciar la instrucción matemática al nivel del conocimiento y del entendimiento de las niñas o niñas está (Van de Walle, Karp, &Bay-Williams, 2013), para ello es indispensable prestar atención, valorar, escuchar, y usar lo que los estudiantes hacen, piensan, y dicen durante la instrucción matemática (Yackel, Cobb, Wood, Wheatley,&Merkel, 1990).

Métodos

El Contexto

Las lecciones descritas aquí se implementaron en un aula de quinto grado en una escuela privada situada en una aldea en una zona rural y montañosa en Guatemala. La aldea se encuentra a hora y media de la ciudad más cercana. Los quince estudiantes (6 niñas y 9 niños) son de origen maya y bilingües (español e ixil). La mayoría han estudiado en esta escuela desde el primer grado y todos viven en la aldea. Los profesores colaboradores son guatemaltecos y trabajaron juntos durante una semana y co-planificaron y co-enseñaron las lecciones. Los educadores Juan, Jorge, y Carlos respectivamente pertenecen a una escuela primaria rural privada en Guatemala, una Organización no Gubernamental (ONG) dedicada parcialmente al mejoramiento de la calidad educativa en Guatemala, y una universidad pública de los Estados Unidos. Antes de este tiempo ellos no se conocían entre sí, pero lo hicieron por medio del programa “Teachers2Teachers”. Los educadores trabajaron unidos por una semana, iniciando el lunes. Las lecciones fueron impartidas en español e ixil, pero predominantemente en español. Cada período de matemáticas duró aproximadamente una hora. El maestro de la clase (profesor 1) es maya y bilingüe (español e ixil) y tiene una amplia experiencia en la enseñanza. Los profesores visitantes, uno (profesor 2) es ladino (mezcla de europeos y mayas), monolingüe (español), y es educador en una ONG. El otro educador (profesor 3) también es ladino y bilingüe (español e inglés) y es educador de matemática bilingüe en los Estados Unidos. La escuela cuenta con un plan de estudios alineado con los estándares de contenido de Guatemala. El plan de estudios de matemáticas incluye un libro de texto para cada estudiante.

Cada día, los profesores tomaron notas sobre lo que sucedió durante la clase y por la tarde se reunieron para planificar la lección del día siguiente. Los trabajos de los estudiantes fueron documentados y fotografiados. Los datos presentados acá fueron seleccionados para demostrar los procesos que ayudaron a los estudiantes a resolver este conflicto y que emergió a falta de la transparencia de los bloques de base diez para pensar y ver simultáneamente a los bloques de base diez como una representación de decimales y de números mixtos. Nuestro análisis se centra en las decisiones que tomamos en base a lo que detectamos que los estudiantes estaban entendiendo.

Resultados

Las Primeras Lecciones y el Surgimiento del Conflicto

Los estudiantes empezaron a estudiarlos números decimales una semana antes de la llegada de los profesores visitantes. Los estudiantes utilizaron también los bloques de base diez para aprender y operar números enteros en grados inferiores. El lunes, el profesor 1 presentó la suma y resta de decimales siguiendo lo que el texto sugirió. El contenido del texto proporcionó algunos ejercicios y no tenía ilustraciones además del texto y números. El texto destacó dos reglas antes de sumar o restar: (a) alinear las cantidades en la base al punto decimal y (b) llenar con ceros los espacios vacíos y luego operar. El martes, los profesores 1 y 2 trajeron un juego para repasar estas operaciones. El juego fue realizado en grupos de tres e incluyó el uso de bloques de base diez. Los estudiantes tomaron turnos tirando los dados. Lo que marcaban los dados representaban centésimos y los estudiantes debían de sumar este valor al número previo (todos los grupos iniciaron con 0.15). Al llegar primero al 1.00, el grupo ganaba. Luego el proceso se revirtió y los estudiantes restaban los centésimos que marcaban los dados. El grupo que llegaba a cero primero ganaba. Al final se tuvo una discusión acerca del juego y los procedimientos y los conceptos relacionados al mismo. Por este medio se logró percibir que a pesar de la manipulación fluida de los bloques (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003) y el entusiasmo de los estudiantes aún se detectaba profundizar el razonamiento de los estudiantes entre el uso de los bloques de base diez y los números decimales (Yackel, et al., 1990), por lo que se decidió proceder con un repaso más reflexivo en este concepto el día siguiente (Hiebert, 1992). El repaso incluyó un juego similar al del día anterior usando los bloques de base diez y los dados, pero a los grupos se les dio aleatoriamente un número decimal al cual el grupo decidía sumar o restar centésimos tirando los dados hasta llegar a 0.5 ó cinco décimos. En el juego también se hicieron conexiones a la notación de fracciones al destacar que 0.75 = 75/100. Los bloques de base diez ayudaron a hacer esta conexión (Cramer et al., 2009; Hiebert, 1992, and et al., 1991; Suh et al., 2008). Pero al tener una puesta en común al final de la actividad y en relación a lo que se discutía, Profesor 3 preguntó: *¿Qué tal si hubieras sumado 0.65 con 0.75 en vez de restarlo?* La discusión sobre este punto generó un gran conflicto ya que el total de la suma era más de una unidad. La representación de números mixtos usando los bloques de base diez luego de haberlos usado para representar números decimales casi exclusivamente confundió a los estudiantes (Cramer et al., 2009). Los bloques de base diez con números mixtos perdieron su transparencia que previamente había ayudado a los alumnos a procesar decimales (Lave &Wenger, 1991; Stacey et al., 2001). Por lo que se planeó estudiar y discutir este punto el día siguiente (Van de Walle et al., 2013).

Aclarando el Conflicto: Uso Simultáneo de Bloques de base Diez y Plátanos

Aunque el plan original era introducir la multiplicación de decimales al final de la semana, la situación durante la tercera lección nos llevó a planificar una forma para resolver el conflicto conceptual matemático que los estudiantes encontraron para representar los números decimales y mixtos con los bloques de base diez. El nuevo plan incluyó dos partes. Primero se hizo un repaso sobre la agrupación de unidades y creación de decenas, y como también de su partimiento, para esto utilizamos tres tipos de representaciones (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003; Morales et al., 2003) que los estudiantes ya conocían (ver Figura 1). La primera fue una tira de papel de colores en la pizarra para demostrar las columnas de los valores posicionales de los números enteros y decimales (desde cientos hasta los centésimos). Se destacó la colocación del punto decimal. La segunda representación incluyó objetos discretos que los estudiantes pudieron partir, para ello usamos plátanos pequeños. Los plátanos se cultivan extensamente en la comunidad y fueron obtenidos de las plantaciones de algunos alumnos (González et al., 2001). Profesor 1 sugirió utilizar los plátanos, ya que se usaron para enseñar las fracciones. La tercera representación fue un modelo de área continua, los bloques de base diez.

La lección inició con el objetivo de aclarar el conflicto que inició el día anterior, y se pidió a los estudiantes que expresaran sus ideas sobre los números mixtos y que usaran la tira de valores en la pizarra. Ya que los estudiantes demostraron una comprensión clara en esta representación, se prosiguió al siguiente punto. Para ello los estudiantes trabajaron en grupos y a cada estudiante se le dio tres plátanos. Y se les pidió que pensaran y representaran con símbolos numéricos y con los plátanos el total de plátanos de cada persona, grupo, y de la clase. Para el total de la clase un estudiante pasó al frente, mentalmente multiplicó 3 x 15 para obtener un producto de 45 plátanos, y lo escribió en la tira numérica. Aunque todos los estudiantes aprobaron el resultado, se les pidió que lo representaran físicamente con los plátanos, con los números, y los bloques (Hiebert, 1992).

Al no haber conflicto, la siguiente tarea incluyó el uso de bananos para representar y operar decimales. Profesor 1 dijo: *Hemos utilizado muchos plátanos para pensar y escribir números* *enteros usando unidades, decenas y centenas. Pero ahora, vamos a tomar un plátano en su grupo y lo dividirán en décimos. ¿Cómo van a hacer esto?* (El maestro esperó a que cada miembro en los grupos de tres estudiantes dividieran un plátano y lo cortaran en diez piezas). *Ahora, cada quien cómase una pieza. ¿Cuánto comió cada persona, qué cantidad de plátano se comió cada grupo, y cuánto plátano se comió en toda la clase? Averígüenlo y escriban las respuestas usando números.* Las discusiones grupales incluyeron cómo una pieza de plátano no podría representarse con un número 1, pero con 0.1, ya que era una décima parte. Pero, después

Figura 1. Representaciones matemáticas

de varias operaciones, un nuevo reto para todos que causó confusión fue cómo escribir en números 15 décimos. Profesor 1 intervino diciendo: *"¿Cuántos pedazos o décimos haría un plátano entero? Y así, 15 de esas piezas, cuántos plátanos van a hacer?*" Sin dudarlo, los estudiantes de acuerdo en que 10 piezas hacían 1 plátano ya que habían cortado uno en 10 décimos, se les hizo evidente de que 15 piezas era un plátano y medio.

Pero luego el uso de números decimales aplicado a esta situación presentó un problema también, por lo que la clase entera discutió cómo un décimo se representa con “0.1”.Profesor 1 preguntó: "*Si sabemos que diez piezas o diez décimos hacen un plátano y si tenemos cinco décimos más, entonces ¿cómo se escribe esa cantidad?*"Esto ayudó a los estudiantes llegaran a la notación 1.5. Luego de acordar con esa respuesta, Profesor 1 pidió a un estudiante en cada grupo que se comiera un determinado número de décimos para que luego cada grupo tuviera que encontrar el resultado para el grupo y luego para toda la clase. Este proceso ayudó al grupo a afirmar lo que se entendió en el problema previo. Los grupos resolvieron efectivamente el número de décimos de plátano que quedaron en cada grupo y toda la clase. Estos procesos confirman que al conectar un contexto conocido a uno nuevo (González et al., 2001) ayuda a los estudiantes no solo a entender mejor nuevas ideas, sino también que el sistema matemático es clarificado por medio de aplicaciones a situaciones de la vida real (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003).

Enseguida que los plátanos nos ayudaron a representar números mixtos, se procedió a usar también los bloques de base diez. Para esto, Profesor 3 pidió que representaran usando los bloques de base diez y números el total de plátanos que la clase tenía al principio. Los estudiantes usaron 4 bloques largos (decenas) y 5 cubos pequeños (unos) y el número 45. Profesor 3 destacó cómo cada cubito representaba un plátano, iniciando con lo que los estudiantes sabían (Van de Walle et al., 2013). Luego les planteó otro problema: "*Si un cubito* [de los bloques de base diez] *representa un plátano, ¿cómo podemos representar con los bloques de base diez los décimos o las diez piezas en que cortamos un plátano? Hablen con los miembros de su grupo y dígannos qué piensan.*"Después de la discusión, un par de estudiantes voluntarios afirmó que los décimos podrían representarse usando los bloques largos, porque diez son igual a una tabla (de 10 por 10 cubos), como diez piezas de un plátano o décimos hacen un plátano entero. Profesor 3 les pidió que aclararan aún más diciendo: "*Estoy confundido. Explíquenme cómo es posible que si dijimos que un cubo pequeño representa a un plátano, y ahora usamos diez bloques largos para representar un plátano? ¿No es el bloque largo mucho más grande que el cubito?*" Ellos dijeron que el cubo era demasiado pequeño para dividirlo, así que usaron la tabla en vez del cubito y pensaron en la tabla como si fuera un plátano. El maestro recalcó: "*Entonces, ¿estás diciendo que una tablita y un cubo pequeño ambos pueden representar un plátano o un entero? ¿Cómo? ¿Son lo mismo?*"Los estudiantes respondieron: "*No, no son lo mismo, pero como si fueran lo mismo*."El maestro hizo hincapié en la frase:“*¡Ah! ‘Como si fueran’ Mmm?”* pidió al grupo discutir la arbitrariedad de los bloques de base diez y cómo las decisiones que tomamos nos hacen ver los bloques con un valor diferente. Los estudiantes razonaron eficientemente utilizando lo que sabían en cuanto a los números y en cuanto a los plátanos y ellos expandieron y reaplicaron esta relación a una relación que no les fue evidente al principio (González et al., 2001). El razonamiento sobre varias representaciones (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003) mitigo en los ojos de los estudiantes la falta de transparencia de los bloques de base diez para representar números mixtos (Stacey et al., 2001).Ellos llegaron a darse cuenta de que un entero puede representarse con un cubo o una tablita, y una tablita puede representar100 enteros ó 1 entero que se puede partir.

Al final, se sostuvo una conversación para pensar en cómo podemos decidir los valores de los modelos matemáticos. Y cómo estas decisiones afectan los valores que vemos o pensamos en una representación. Este valor no está implícito en la representación misma, sino en cómo decidimos verla; este punto trasciende a un entendimiento meta-cognitivo (Schoenfeld, 1987) logrado al escribir y representar valores múltiples modalidades. Los plátanos, familiares a los estudiantes, ayudaron en la creación de un nuevo significado matemático (Irwin, 2001). La no transparencia de los bloques para representar números mixtos se aclaró al contrastarla con la de los plátanos. Los plátanos como una unidad discreta y constante, permitió su manipulación para representar enteros y décimos junto a los bloques de base diez. Los estudiantes avanzaron la fluidez de su conocimiento matemático al notar la arbitrariedad de las representaciones (Hiebert, 1992). Y al final, el error o conflicto inicial sólo propició un mejor entendimiento (Resnick et al., 1989).

Discusión

Las representaciones multimodales ayudaron a los estudiantes y a los maestros a abordar explícitamente los conceptos matemáticos que fueron inicialmente confusos. La confusión surgió a través del uso aislado de un modelo o representación (Cramer et al., 2009). También es crucial reconocer que la falta de transparencia de los bloques de base diez (Lave &Wenger, 1991; Stacey et al., 2001) para representar enteros, decimales, y números mixtos se hizo más clara y explícita a los niños a través de la interacción social entre los estudiantes y los profesores (Vygotsky, 1978).La conversación y el razonamiento junto a la manipulación de las representaciones propició un nuevo conocimiento matemático (Hiebert, 1992) el cual fue fundado en un ambiente de reflexión centrado en entender que el valor de las representaciones es relativo a las decisiones externas que las personas hacen, y no inherente a las representaciones mismas (Cramer et al., 2009; Lamon, 2005; Lesh et al., 2003). La clarificación del conflicto o error (Resnick et al., 1989) por medio de un análisis explícito del valor arbitrario de las representaciones generó un mejor entendimiento de los números mixtos conectado a un contexto real y significante para los estudiantes (González et al., 2001).

Creemos que la lección más significante para nosotros como docentes colaboradores en estas lecciones es la noción de que el entendimiento significativo es producto de una participación relacional entre los estudiantes, sus historias, su entendimiento previo, su entendimiento actual, y su entendimiento emergente, con sus compañeros, sus maestros, y la actividad matemática en que participan (Domínguez, López Leiva, &Khisty, 2014). Es necesario que esta participación relacional se construya a través de un mutuo entendimiento y atención (Yackel et al., 1990), pero sobretodo en un proceso que le permita a los estudiantes destruir el mito de quelas matemáticas son mágicas que solo están en las manos de otros, y en vez reconstruir su actitud en una productiva que les permita apreciar las matemáticas como una práctica social en la que ellos pueden intervenir y hacer cambios, como también poder entender, operar, y manipular la misma conceptualmente y no solo físicamente y numéricamente. Esta actitud se refiere a una actitud metacognitiva matemática que genere y promueva agentividad estudiantil con entendimiento (Schoenfeld, 1987).De manera que los estudiantes puedan participar en la “creación” de procesos y soluciones matemáticas. Porque aunque estos procesos y soluciones son conocidos para otros, para los estudiantes el descubrir como funcionan las matemáticas les ayudará no solo a entenderlas, sino también a verse a sí mismos como creadores de las mismas y por ende un sentido como participantes y practicantes de las matemáticas, una agentividad matemática. Esto lo vimos evidente por medio del proceso de nombrar y reconstruir unidades y al utilizar múltiples modelos o representaciones, algo que ellos nunca habían hecho. Finalmente, aseveramos que éste es un caso particular y que generalizaciones aplicadas a cualquier contexto en cuanto al uso de plátanos en conexión a los bloques de base diez para explicar los números decimales y mixtos no proceden. Lo que procede y debería de ser implementado es una exploración multimodal y escuchar a los estudiantes y facilitar y desafiar su entendimiento en base a lo que saben y ven. Puede ser que siguiendo los juegos sea suficiente, o puede ser que ni el uso de plátanos u otro objeto familiar facilite tal entendimiento (Hiebert, 1992). Intensa comunicación sobre el razonamiento mutuo será útil y pertinente (Domínguez et al., 2014; Resnick et al., 1989; Vygotsky, 1978; Yackel et al., 1990).

Referencias

Cramer, K.A, Monson, D. S., Wyberg, T., Leavitt, S., & Whitney, S. B. (2009). Models for Initial Decimal Ideas - Put a Twist on the Familiar 10 X 10 Grid Model to Build Your Students' Understanding of Effective Decimal Models. *Teaching Children Mathematics, 16*(2), 106-117.

Dienes, Z. (1960). *Building up mathematics*. London: Hutchinson Educational Ltd.

Domínguez, H., López Leiva, C. A. & Khisty, L. L. (2014). Relational Engagement: Proportional Reasoning with Bilingual Latino/a Students. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 143-160. doi: 10.1007/s10649-013-9501-7.

Fuson, Karen. C. & Briars, D. J. (1990).Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*,180-206.

González, N., Andrade, R., Civil, M., & Moll, L. (2001). Bridging funds of distributed knowledge: Creating zones of practices in mathematics. *Journal of Education for Students Placed at Risk, 6*(1-2), 115-132.

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G. Leihardt, R. Putnam, R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 283-322). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hiebert, J., Wearne, D. & Taber, S. (1991). Fourth graders' gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations. *The Elementary School Journal, 91*(4), 321-341.

Hunter, J., Turner, I., Russell, C., Trew, K., & Curry, C. (1994). Learning multi-unit number concepts and understanding decimal place value. *Educational Psychology, 14*(3), 269-282.

Irwin, K. C. (2001). Using Everyday Knowledge of Decimals to Enhance Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(4), 399-420.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. New York: Cambridge University Press,

Lamon, S. J. (2005). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Publishers,

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. S. (2003). Model Development Sequences.In R. Lesh and H. M. Doerr (Eds.). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 35-58). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Publishers,

Morales, H., Khisty, L. L., & Chval, K. (1999).Beyond discourse: A multimodal perspective of learning mathematics in a multilingual context. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of PME, 27*(3), 133–140

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual Bases of Arithmetic Errors: The Case of Decimal Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8-27.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K., Sue H., Shona A., & Condon, C. (2001). The Effect of Epistemic Fidelity and Accessibility on Teaching with Physical Materials: a Comparison of Two Models for Teaching Decimal Numeration. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 199-221.

Suh, J. M., Johnston, C., Jamieson, S., & Mills, M. (2008). Promoting decimal number sense and representational fluency. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(1), 44-50.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013).*Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*(8th ed). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G., & Merkel, G. (1990). The importance of social interaction in children's construction of mathematical knowledge. In T. Cooney & C. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (pp. 12–21). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.