



## La incorporación al aula de prácticas de modelación/simulación del movimiento

Jaime **Arrieta** Vera

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero  
México

[jaime.arrieta@gmail.com](mailto:jaime.arrieta@gmail.com)

Eduardo **Carrasco** Henríquez

C.D. en Ciencias Básicas para Ingeniería, Universidad Austral de Chile  
Chile

[ecarrasc@gmail.com](mailto:ecarrasc@gmail.com)

Rafael **Pantoja** Rangel

Universidad de Guadalajara  
México

[profe.rpantoja@hotmail.com](mailto:profe.rpantoja@hotmail.com)

### Resumen

Las intenciones del taller son dos, la primera está referida al ejercicio de prácticas de modelación/simulación del movimiento por los participantes del taller con el afán de caracterizarlas, la segunda, es la de reflexionar acerca de que son las prácticas de modelación/simulación, su importancia y las formas de incorporarla al sistema escolar. La primera refuerza y sitúa la segunda. Se trabajan diseños basados en modelación del movimiento utilizando diferentes recursos tecnológicos como sensores, simuladores y software para análisis de videos. La metodología empleada para la elaboración y validación de los diseños es la Ingeniería didáctica y el marco teórico que los soporta es la socioepistemología.

*Palabras clave:* modelación/simulación, prácticas, movimiento, socioepistemología, TICs.

### Introducción

La modelación matemática, en los últimos años, ha tomado un papel cada vez más relevante tanto en la investigación en educación matemática como en la enseñanza y aprendizaje

de las matemáticas, como se evidencia en la incorporación de la modelación en las currículas de muchos países (Blum, Galbraith & Niss, 2007).

Sin embargo los resultados de aprendizaje respecto a los procesos de modelación en las currículas aún no generan impactos relevantes en el sistema educativo. PISA 2012, muestra que un alto porcentaje de los estudiantes en los países latinoamericanos evaluados (Brasil, Chile, México, Argentina, Perú, Costa Rica y Colombia) a lo más son capaces de identificar y extraer información y datos desde texto, tablas y gráficos, mapas u otra representación, y hacer uso de ellos para expresar relaciones matemáticamente, interpretando o adaptando expresiones algebraicas simples relacionadas con contextos de aplicación, pudiendo transformar descripciones textuales de una relación funcional simple en forma matemática. Esto, toma mayor gravedad si consideramos el alto porcentaje de estudiantes que está por debajo del primer nivel de logro en la evaluación PISA.

Diversos investigadores (Arrieta, 2003; Arrieta y Díaz, 2014; Biembengut, 2011; Cordero, 2006, entre otros) plantean la incorporación de la modelación matemática al aula de matemáticas, recurriendo a actividades de modelación de fenómenos posibles de experimentar en el aula o al acceso a datos reales de situaciones experimentales.

Introducir situaciones experimentales al aula de matemática implica desafíos muy complejos. Una primera cuestión es la concepción de que el trabajo en el aula con la experimentación de fenómenos es ajeno al discurso matemático escolar, y por tanto, la enseñanza matemática ha de centrarse en ilustrar aplicaciones y/o ejemplos. Por otra parte nos obliga a considerar factores adicionales que en general no están presentes en las currículas, como son la toma de datos, protocolos de experimentación, mayor tiempo de aula del que se dispone, entre otros. Además, del tratamiento educativo que implica la posibilidad y/o necesidad de manejar grandes cantidades de datos en condiciones instrumentalmente desventajosas. Por ejemplo, el hecho que los datos tomados desde el fenómeno contengan ruido, es decir, errores de medición y variaciones producto de variables no consideradas.

Hoy en cambio las tecnologías nos ofertan recursos que ayudarían a vencer los desafíos planteados. Sensores, simulaciones computacionales, el video digital y software para su análisis, software para ajuste gráfico y numérico de datos y hojas de cálculo pueden integrar un gran soporte para la experimentación, la toma de datos y su tratamiento para su modelación.

Coincidente con ello, el recurso a tecnologías en América Latina se ha facilitado. Diversos programas del Banco Mundial y otras organizaciones han ayudado a dotar a las instituciones de educación, de computadores en las aulas o en laboratorios de informática. Programas como el proyecto Enlaces en Chile, o el programa Cibal en Uruguay son muestras claras de como la tecnología informática ya no es una excepción en las aulas de nuestro continente. Del mismo modo la población y en particular los estudiantes, hoy acceden a teléfonos móviles avanzados. Actualmente, sobre el 84% de los hogares de Latinoamérica están suscritos a algún servicio de telefonía móvil y, por tanto, cuentan con teléfonos móviles que actualmente son capaces de grabar videos de mediana calidad (WorldBank, 2012).

A pesar de ello, los esfuerzos de inserción de las tecnologías informáticas se han centrado en la incorporación del recurso tecnológico, sin una evidencian clara de cambios en prácticas docentes o en los aprendizajes estudiantiles (Guerrero y Kalman, 2010). Por tanto, se hace necesario indagar formas de incorporar estas tecnologías en la enseñanza con una intencionalidad

didáctica matemática que las transforme en herramientas didácticas más complejas que la mera simplificación de cálculo.

En síntesis, el desafío didáctico es aprovechar herramientas tecnológicas que permitan realizar actividades de modelación de fenómenos, a partir de su experimentación. En este marco, la herramienta digital Tracker, utilizada para procesar videos de situaciones cotidianas de movimiento, entrega entidades como gráficas, datos numéricos y expresiones analíticas a los actores, quienes mediante un proceso de socialización, las transformarían en modelos al articularlos con los movimientos de las variables a modelar y cuya covariación se registra en el video. La modelación, así, reside en el acto de articular las entidades mencionadas y se entiende en el acto de la interrelación de lo uno con lo otro y su entorno, y donde los alumnos son los actores protagonistas, que desarrollan el guion de la escena. La modelación se vive, más bien se convive con los integrantes del equipo, en un proceso en activo integrado por los acoplamientos estructurales que hacen emerger las herramientas, los procesos e intencionalidades en la modelación misma.

Luego el taller tiene como objetivo explorar, junto a los participantes, el uso de celulares y computadoras básicas, para el ejercicio de prácticas de modelación de fenómenos cotidianos.

Considerando a la modelación como una práctica en el aula, el taller se propone de modo específico modelar y simular situaciones de la vida cotidiana mediante el trabajo colaborativo y apoyados en el análisis de video digital mediante el software Tracker, con simuladores del movimiento y sensores.

### Aspectos Teóricos

Concebimos a la Modelación y a la Simulación como prácticas recurrentes de diversas comunidades. Mientras que la modelación es una práctica que articula dos entidades con intención de intervenir en una de ellas, lo modelado, a partir de la otra, el modelo, conformando, así, un dipolo modelo-modelado (Arrieta y Díaz, 2014). A la simulación la caracterizamos como prácticas con intención de reproducir algún fenómeno partiendo de sus modelos, posibilitando manipular el fenómeno al variar sus parámetros, sin la necesidad de que ocurra (figura 1).

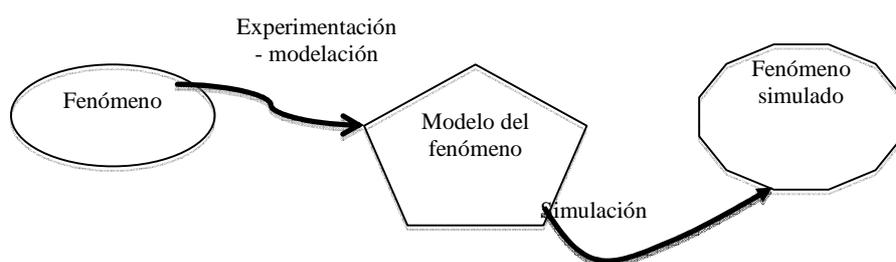


Figura 1. Práctica de modelación/simulación.

Por ejemplo, cuando se asocia la relación algebraica con el fenómeno de caída libre, se articula la covariación entre el tiempo y la distancia recorrida por aquello que cae, con los valores de  $t$  y  $d$  que cumplen la igualdad  $d = 9.8t^2$ . Así, en la medida que se asignan valores al tiempo se puede predecir la distancia recorrida por el objeto que cae. Por otra parte, también se puede simular en computadores la imagen de un objeto que cae y explorar las velocidades finales a partir de ensayar alturas diversas.

De este modo el dipolo modelo-modelado permite la realización de dos prácticas, que se imbrican en la articulación del modelo y lo modelado, que dependen de la intencionalidad de quien actúa. Por un lado, el acto de modelar o construir la articulación entre un ente matemático y un fenómeno dado, por otro, reproducir un fenómeno a partir de sus modelos. Si bien estas prácticas de modelación y de simulación pueden parecer prácticas inversas, no lo son. Pues en el acto de modelar un fenómeno, se ha de restringir el número de variables, dada la dificultad de articular todas las variables del fenómeno con entidades matemáticas. Luego una simulación solo podrá reproducir un fenómeno restringido a algunas variables.

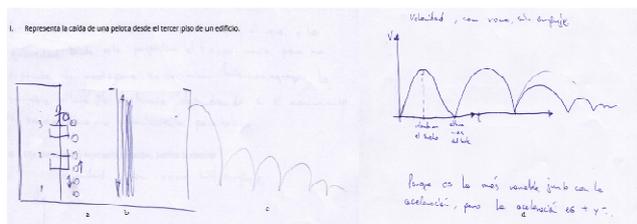


Figura 2. Figuración de caída libre. (Carrasco 2014).

Por ejemplo, en Carrasco (2014) se muestra un proceso de figuración de un fenómeno de caída libre en el cual, en la sucesiva construcción de figuras, articula una gráfica cartesiana con la covariación de velocidad y tiempo en la caída de una pelota. La imagen muestra un proceso de modelación en la cual la gráfica cartesiana, figuración del fenómeno, se constituye en el modelo y la pelota que cae, en lo modelado. Como muestra la imagen 2 se construyen cuatro figuraciones del fenómeno de caída. La primera de ellas (Img. 2a) es cercana a la percepción visual del fenómeno y se constituye en una narración compleja del mismo. Esta el edificio, la trayectoria de la pelota lo rebotes y desplazamiento de distancia, pero el tiempo queda implícito en las diversas posiciones de la pelota. La segunda y tercera imagen, se aprecia como el estudiante no figura el edificio y una de las dimensiones es dejada para ser reemplazada por el tiempo. Finalmente surge una gráfica cartesiana con velocidad y tiempo.

Del mismo modo que se articula la gráfica, se puede articular una tabla de valores experimentales o teóricos con el fenómeno o una expresión algebraica. Cada uno de ellos se constituye en modelo del fenómeno.

Por su parte, al simular el fenómeno desde la gráfica se accede solamente a las variaciones de velocidad que ha tenido el móvil que se mueve. Por ello, quien simula desde gráficas diferenciales deberá interpretar dicha gráfica y para ello concurre no solo la covariación de velocidad y tiempo que se figura, sino aquella información respecto del fenómeno que quien simula evoca (Carrasco, Buendía y Díaz, 20014). De esta manera se reconstruye un fenómeno con diversas variaciones en los elementos no graficados (altura de inicio, finalización del fenómeno, objeto que cae entre otros). En particular al simular a partir de gráficas velocidad tiempo, implica responder a la pregunta diferencial sobre la función  $d(t)$  conocida la relación diferencial  $d'(t)$ .

Surge interesante entonces propiciar la reflexión en torno a las potencialidades que las prácticas de modelación/simulación tienen en la construcción de aprendizajes estudiantiles. Al caracterizar aquello que concurre como herramienta al modelar/simular el movimiento en torno a gráficas de velocidad/tiempo. Reflexión en torno a Desplazando la mirada desde los objetos matemáticos que posibilitan determinar función  $d(t)$ , hacia la actividad de quien simula, se

focaliza en buscar elementos teóricos que permitan caracterizar de modo complejo la actividad del estudiante que modela/simula y el rol de tienen en su actividad aquello que sabe, aquello que hace y aquello que surge en la actividad.

### **Sobre el acto cognitivo: El espacio epistémico de figuración**

La aproximación a los procesos de modelación/simulación de gráficas diferenciales la hacemos el marco socioepistemológico. Este Marco teórico asume la importancia de focalizar en las prácticas que están al seno del actuar de cada sujeto y de aquellas que están a la base de su construcción de saber. Así en el aula se produce un encuentro de tales prácticas por ello se hace necesario una caracterización de las prácticas que ponen en juego los y las estudiantes que actúan.

Varela (2000) establece la noción de Enacción para entender cómo se constituye el acto cognitivo. Este se da en el acoplamiento estructural del sujeto que actúa con aquello que le toca vivir. De este modo el mundo del sujeto emerge en la carga de significaciones que se han constituido para estructurar su identidad en y con el entorno que le ha tocado y toca vivir (Varela 2000). Es decir, el mundo es construido por quien vive, no es, por tanto, una re-presentación adquirida desde un mundo exterior. Así, por ejemplo, cuando vemos un autorretrato de Frida Calo o Kandinsky vemos la diferencia entre el mundo del pintor y como se percibe e el, de la fotografía de ellos.

Luego para entender cómo se construye saber en torno al uso de gráficas cartesianas como modelo de fenómenos tomamos la noción de espacio epistémico de figuración (Carrasco, Buendía, Díaz, 2014). Este espacio es conformado por la gráfica cartesiana, el fenómeno y el sujeto que interpreta y/o construye la gráfica (ver. *Img. 3*).

La gráfica es en principio una figura que hace ostensible, a quien la usa, las variaciones de variables en un fenómeno. Así, diversas investigaciones la consideran como un conjunto de símbolos, que devienen en signos al ser interpretados por quien trabaja. Signos vehículos por cuanto llevarían el significado del mundo externo a la cognición (Presmeg, 2008). Esta mirada representacionista la resignificamos desde la idea de que el mundo se enacta en la medida que se actúa, por ello la gráfica y sus elementos se significa en la medida que se articula con aquello que busca mostrar (una función o la relación de variación entre variables de un fenómeno). Roth y Bowen (2003) muestra como diversos profesionales interpretan aspectos diversos del fenómeno desde una misma gráfica, y gracias a la cooperación entre ellos se comprende que sucede en el proceso productivo. La interpretación entonces se construye desde la relación entre la gráfica y la función que esta representa, así como desde la experiencia de quien interpreta. Trabajar con gráficas porta la carga experiencial del sujeto desde la cual reflejan aquellas prácticas propias de su pertenencia social. Entonces la mirada es hacia el sujeto que trabaja con gráficas, es un foco en el uso de la gráfica (en el sentido de Tuyub y Buendía, 2014) y por tanto en las prácticas que con ellas se ejercen. Prácticas que desde el marco socioepistemológico, reconocemos sociales y que orientan la actividad del sujeto. Investigaciones en este marco han evidenciado la emergencia de figuras no cartesianas cuando estudiantes buscan modelar fenómenos de variación (Carrasco, Buendía, Díaz, 2014, Díaz 2009, Dolores 2010) Las cuales son articuladas con el fenómeno y como muestra la figura 2, pueden ser articuladas en la construcción de una gráfica cartesiana. Así el espacio epistémico de figuración, conformado por la figura, el fenómeno y el sujeto que figura, se constituye en el topos sobre el cual se da la actividad de conocer un fenómeno por parte del estudiante. Un acto cognitivo que se constituye

en la media que se interactúa con el fenómeno y la gráfica articulándolos ambos y por tanto constituyendo a la gráfica en modelo del fenómeno.

En síntesis, el espacio epistémico es operacional toda vez que el estudiante conoce en la medida en que se imbrica en aquello que se necesita conocer. Es perceptual, en el sentido que concurre su visión y percepción del mundo que vive, de la gráfica como figura, pero también como modelo, su percepción del fenómeno evocado o experimentado. Y finalmente, experiencial, pues a entender aquello que conoce concurre las experiencias previas, vividas y que asumimos similares a lo que se vive así como la relación con los otros.

Esta noción conforma una mirada a la gráfica como un modelo, en el sentido de Arrieta (2002), que busca reconocer de modo complejo las prácticas que esta herramienta facilita. Ubica una mirada sistémica al sujeto que articula la gráfica con el fenómeno, conformando el espacio epistémico de figuración integrando las relaciones que se construyen entre el fenómeno, la gráfica y quien actúa.

En este espacio epistémico se constituyen las prácticas de modelación con gráficas cartesianas. En particular a aquellas de simulación del fenómeno a partir del modelo gráfico. Prácticas que son descritas, por las herramientas que concurren a la actividad estudiantil, las argumentaciones que emergen para explicar aquello que se vive y los significados que emergen en la actividad (Carrasco, 2014).

### **Metodología**

En una primera fase, los participantes del taller trabajan diseños de aprendizaje basados en la modelación del movimiento soportado por la metodología de Ingeniería Didáctica (citadas). Para ello se experimenta con movimientos y se capturan datos numéricos y gráficos utilizando sensores, simulaciones y videos y software para la captura de datos. Se analizan los datos desarrollando diferentes procedimientos, como el ajuste gráfico de datos, el análisis de gráficas y la utilización de las herramientas tecnológicas. Se construyen diferentes modelos y se utilizan para predecir el movimiento. Se articulan redes de los diferentes modelos con el movimiento. Se constituyen redes de redes de modelos, analogando diferentes movimientos. Se simulan diferentes movimientos a partir de modelos diferenciales.

En una segunda fase se reflexiona sobre la actividad realizada, se analizan las herramientas matemáticas empleadas, los procedimientos utilizados, los argumentos esgrimidos y las intenciones de realizar la actividad. Se concluye esta fase caracterizando las prácticas de modelación/simulación.

En una tercera fase se propicia una reflexión didáctica respecto de la propuesta presentada, sus potencialidades y desafíos de implementación. Se discute sobre las formas de incorporar las prácticas de modelación/simulación del movimiento al aula de matemáticas.

### **Consideraciones Finales**

En la aproximación presentada en el taller se busca aportar herramientas para la incorporación de la modelación/simulación del movimiento al aula de matemáticas, con soporte en recursos tic, configurando de este modo un escenario escolar, de bajo costo, para la realización de prácticas de modelación.

Del mismo modo se busca reflexionar sobre las fases de la modelación/simulación y su caracterización desde las categorías presentadas. Se reflexiona sobre la relevancia de la

experimentación con el fenómeno; sobre la actividad que caracteriza a la modelación, el acto de modelar; la construcción de redes de modelos con el fenómeno; la construcción de red de redes de modelación/simulación, la analogía; y la caracterización de la simulación y su relación con la modelación. Esto de una mirada sistémica que desde el espacio epistémico de figuración caracteriza las practicas que ejercen los actores que modelan, identificando sus formas de hacer, sus argumentos, sus significados y las herramientas que concurren a su actividad.

### Referencias y bibliografía

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* (Disertación doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.
- Arrieta, J., & Díaz, M. (2014). *Una mirada Socioepistemológica de la modelación*. Artículo enviado a revista de corriente principal (140501).
- Biembengut, M. (2011). Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. En *Acta Electrónica de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado el 10 de marzo de 2013 de [http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/viewFile/2875/1149](http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2875/1149)
- Carrasco, E., Buendía, G. & Díaz, M. (2014). Figuración de lo que varía. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), 365-384
- Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20(1), 59-79.
- Ezquerro, Á., Iturrioz, I., & Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* Universidad de Cádiz. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733 <http://hdl.handle.net/10498/14733>. <http://reuredc.uca.es>
- Pantoja, R., Ulloa, R., & Nesterova, E. (2013). La modelación Matemática en situaciones cotidianas con los software AVIMECA y MATHCAD. *Revista Virtual Góndola, revista de Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*. ISSN 2145-4981 2010.
- Guerrero, I., & Kalman, J. (2010). La inserción de la tecnología en el aula: estabilidad y procesos instituyentes en la práctica docente. *Revista Brasileira de Educação*, 15(44). Rio de Janeiro, Brasil
- Roth, W. M., & Bowen, G. (2003). When Are Graphs Worth Ten Thousand Words? An Expert-Expert Study. *Cognition and Instruction*, 429-473. [http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci2104\\_3](http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci2104_3)
- Tuyub, I., & Buendía, G. (2014). El uso de las gráficas en una comunidad de prácticas. El caso de la maestría en ingeniería de la UADY. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1636-1642. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.
- WorldBank (2012). *Information and Communications for Development: Maximizing Mobile*. Washington, DC. EEUU: Ed. International Bank for Reconstruction and Development / The World Bank.