
# Homeomorfismos: da intuição à visualização em construções geométricas

José Carlos Pinto **Leivas**
Centro Universitário Franciscano
Brasil
leivasjc@unifra.br

Rosvita Fuelber **Franke**
Universidade do Vale do Rio dos Sinos
Brasil
rosvitaf@unisinos.br

**Resumo**

Neste artigo, propomos abordar um assunto relevante para o ramo da Geometria, denominado Topologia, um dos mais atuais em seu desenvolvimento ao longo da história. É nosso objetivo utilizar intuição e visualização para desencadear o tema, usando diversos recursos didáticos, como folhas de papel dupla face coloridos. Abordaremos alguns homeomorfismos entre figuras planas e espaciais, buscando conexões com as diversas áreas matemáticas, como, por exemplo, o Cálculo e a Geometria Analítica, em nível elementar e acessível a um pré-universitário ou até mesmo a alunos de anos iniciais de uma licenciatura em Matemática, bem como a professores que atuam na escola básica. Culminaremos o trabalho ilustrando a importante função projeção estereográfica e a construção de superfícies homeomorfas em papel.

*Palavras-chave*: homeomorfismos, visualização, intuição, construções geométricas.

## Introdução

Em geral, em diversos níveis de ensino, em vários países, os cursos de Geometria tratam dos assuntos de Geometria Plana e de Geometria Espacial, muitas vezes, de forma axiomática e sem conexões com outras áreas do conhecimento matemático. Abordam-na, ainda, sob o formato de Euclides. Poucos são aqueles que distinguem esse tratamento daquele dado por Hilbert (2003). Queremos dizer com isso que a Geometria se desenvolveu ao longo dos milênios, séculos e até mesmo décadas, especialmente a partir do final do século XVIII e início do XIX, com a construção das Geometrias Não-Euclidianas de Bolyai e de Lobachevscky. No presente século, o grau de desenvolvimento dessa área do conhecimento é muito grande e novas geometrias, que denominamos não euclidianas foram criadas e mostram um grau enorme de generalidade comparativamente a outros ramos da Matemática. Por exemplo, Geometria Fractal, Geometria Sintética e a Geometria Topológica proporcionam um novo fazer geométrico que, em nossa opinião, devem ser incorporados à formação inicial ou continuada dos professores que irão atuar nos diversos níveis de escolaridade.

Piaget e Inhelder (1993) constataram, em suas pesquisas, que a primeira representação de espaço na criança é de natureza topológica e não euclidiana, por não depender de medidas. Para os autores,

> a percepção é o conhecimento dos objetos resultante de um contato direto com eles. A representação consiste, ao contrário - seja ao evocar objetos em sua ausência, seja quando duplica a percepção em sua presença - em completar seu conhecimento perceptivo referindo-se a outros objetos não atualmente percebidos (Piaget, & Inhelder, 1993, p. 32).

Segundo eles, a representação do espaço não é dada de antemão, é construída. Para que ocorra, consideramos que desenvolver a habilidade de visualização é de fundamental relevância. Entendemos essa habilidade como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos. Conforme Arcavi (1999),

> visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão. (p. 217, trad. nossa)

Por sua vez, Fischbein (1987) identifica visualização com um conhecimento intuitivo, uma vez que intuições são imediatas e aparentemente são autoevidentes. “É uma afirmação trivial que se tende, naturalmente, a pensar em termos de imagens visuais e que o que não se pode imaginar visualmente é difícil de conceber mentalmente”. (p. 103)

A Topologia é considerada pelos estudantes de Matemática, no Brasil, segundo nossa experiência profissional, como uma disciplina teórica, de difícil compreensão, abstrata, haja vista que a mesma aborda, eminentemente, o estudo de funções contínuas, o que é tratado nos cursos de Cálculo, meramente, pelos aspectos algébricos. Entretanto, ao tratarmos a mesma a partir das propriedades das figuras geométricas que se mantêm invariantes por transformações topológicas, utilizando habilidades visuais, entendemos que o tema pode se tornar agradável e com significado para os estudantes. Já comprovamos isso em disciplinas que temos ministrado para estudantes, tanto da Licenciatura em Matemática quanto para os de Pós-Graduação. Cabe salientar que consideramos como transformação topológica toda função contínua, bijetora com inversa contínua.

De acordo com Eves (1969), uma figura geométrica é “um conjunto de pontos do espaço tridimensional (ou em qualquer espaço de maior dimensão); uma transformação contínua e bijetora é aquela que, dado um sistema de coordenadas cartesianas no espaço, pode ser representada por funções coordenadas contínuas e bijetoras" (p. 337, trad. nossa). Por sua vez, ao se constituir um conjunto com todas essas transformações topológicas de uma determinada figura geométrica, fica constituído um grupo de transformações e a Topologia pode ser vista como uma geometria kleiniana, segundo Eves (1969), aquela definida no Programa Erlangen de Félix Klein.

Nesse sentido, se propriedades geométricas de uma dada figura se mantêm invariantes, mediante uma dessas transformações topológicas, então elas são denominadas de propriedades topológicas da figura. Como exemplo de propriedades elementares, segundo Piaget e Inhelder (1993), temos: relação de vizinhança, separação, ordem, circunscrição, continuidade e outras. Em Leivas (2008), encontramos atividades exploratórias que ilustram tais propriedades e que podem ser utilizadas para a organização do espaço na criança por caminhos topológicos. Por sua vez, se uma figura pode ser transformada topologicamente em outra, então as duas figuras se dizem homeomorfas ou topologicamente equivalentes.

Para obtermos superfícies homeomorfas, são empregadas funções que recebem o nome de homeomorfismos, as quais são o objeto da oficina que estamos apresentando. Essa oficina aborda características visuais dessas funções e sua importância na formação do professor de Matemática que, dessa forma, poderá desenvolvê-las com os estudantes desde a escola básica, na medida que é desenvolvido o conteúdo de funções, constante dos currículos dos diversos níveis de escolaridade.

Muito embora o título e o tema possam parecer ao leitor de nível elevado, basta que os participantes da oficina tenham alguns conhecimentos básicos de Cálculo Diferencial, a saber, noções básicas de funções, de continuidade e de espaços vetoriais, oriundos de formação pré universitária.

## Intuição e visualização na geometria dos homeomorfismos

Intuição, em Geometria, é importante para o desenvolvimento de um pensamento geométrico, especialmente, no que diz respeito a habilidades visuais. Ela foi estudada tanto na Matemática como em outras ciências. Para Granger (1974, p. 62),

> [...] a intuição espacial, que unia os antigos e, como diz Descartes, causava-lhes 'escrúpulo em usar termos da Aritmética na Geometria', achava-se conjurada. Todas as operações da análise algébrica – que Descartes sistematiza – estão, desde então, disponíveis para exprimir as propriedades geométricas... A noção confusa e imaginativa de dimensão de uma figura é substituída por outra noção clara e distinta: a de grau de uma equação.

Considerando que, na Topologia, os objetos podem apresentar dimensões além das euclidianas, convencionais, o papel da intuição, filosoficamente, para nós, é imprescindível ao buscarmos conexões entre a conceituação teórica de um homeomorfismo e a representação geométrica, corroborando o que o autor afirma, pois devemos, sim, associar aos aspectos algébricos de uma função, os aspectos geométricos a eles associados. Apoiamo-nos em Hilbert e Cohn-Vossen (1932), no prefácio de seu livro *Geometry and the Imagination*, para traçarmos nosso objetivo de desenvolver o conteúdo homeomorfismos numa oficina:

> [...] é nosso objetivo dar uma apresentação da Geometria, tal como está hoje, em seus aspectos visual e intuitivo. Com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de

> investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais.(p. iii, trad. nossa)

Dessa forma, acreditamos que, partindo dos aspectos intuitivos de uma ideia, podemos desenvolver conhecimento, pois, segundo Fischbein (1987), intuição ou conhecimento intuitivo é um tipo de cognição que se refere às afirmações auto evidentes, as quais ultrapassam fatos observados, o que o diferencia de percepção, algo como uma cognição imediata, não necessitando de prova para sua existência. O autor entende por cognição as componentes estruturais de qualquer comportamento adaptativo: "o papel essencial da intuição é conferir às componentes conceituais de um esforço intelectual as mesmas propriedades as quais garantem a produtividade e a eficiência adaptativa de um comportamento prático." (Fischbein, 1987, p. 19), enquanto que "o principal atributo do conhecimento intuitivo é o sentimento de uma certeza direta e este é produzido, em primeiro lugar, pela impressão de auto evidência." (Ibid., p. 21).

Buscamos, neste trabalho, utilizar intuição como um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático-geométrico, a partir de experiências concretas dos indivíduos com um determinado objeto. O conceito deve ser formado de forma reflexiva, consciente, produzindo sentimento de certeza a partir da auto evidência.

Dessa forma, intuitivamente, dizemos que duas superfícies são homeomorfas ou topologicamente equivalentes, se for possível passar de uma para outra por meio de alguma contração, flexão, torção, sem que ocorra nenhuma ruptura e, no caso de algum corte que desejamos efetuar, as extremidades de cada corte se reúnam da mesma forma que antes de realizá-lo.

Seja $B(p, \varepsilon)$ a bola de centro p e raio $\varepsilon$ no $R^2$ [essa região do plano é denominada de círculo]. Tome, também, a bola $B(0, 1) \subset R^2$. Define-se

$$f: B(p, \varepsilon) \rightarrow B(0, 1) \subset R^2 \text{ por } f(u) = \frac{1}{\varepsilon}(u - p), \forall u \in B(p, \varepsilon).$$

Observamos que $g(u) = u - p$ é uma translação, logo é uma função contínua em seu domínio, enquanto que $h(v) = \frac{1}{\varepsilon}v$ é uma homotetia, também contínua. Dessa forma, f é uma função contínua, por ser composta de uma translação e de uma homotetia. Como $f(u_1)=f(u_2) \Rightarrow u_1=u_2$, $\forall\, u_1,u_2 \in B(p, \varepsilon)$, f é injetora.

Além disso, por $||f(u)|| = ||\frac{1}{\varepsilon}(u-p)|| = \frac{1}{\varepsilon}||u-p|| < \frac{1}{\varepsilon}.\varepsilon = 1$, segue que

$$Im(f) = B(0, 1) \text{ e f é sobrejetora.}$$

Dessa forma, $f: B(p, \varepsilon) \rightarrow B(0, 1)$ é uma função contínua e bijetora e sua inversa é dada por:

$$f^{-1} : B(0, 1) \rightarrow B(p, \varepsilon) \text{ levando } f^{-1}(u) = \varepsilon u + p, \text{ que também é contínua.}$$

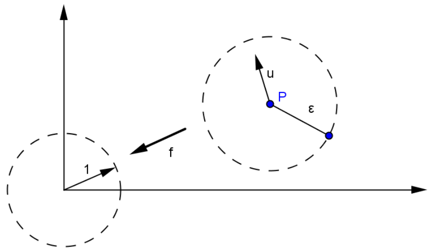



*Figura 1.* Homeomorfismo entre duas bolas (discos) no plano.

A função f, exemplificada acima e representada na figura 1, é um exemplo de homeomorfismo. Observamos que não é necessário exigir o formalismo matemático para a compreensão do exemplo, apenas é explorada a intuição de que é possível transformar uma bola com um dado raio numa bola de raio maior ou menor do que a inicial. Isso pode ser feito utilizando um tipo de material concreto flexível que possa ser alongado ou comprimido sem perder a forma circular. Dessa forma, levamos um ponto de uma em um único ponto da outra e vice versa, sem deixar nenhum deles de fora dessa correspondência.

Um segundo exemplo de homeomorfismo que pode ser obtido intuitivamente consiste na transformação da circunferência unitária $S^1 = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = 1\}$, no plano euclidiano, em uma curva fechada, no mesmo plano, como ilustrado na figura 2, a seguir. A segunda figura é denominada de Curva de Jordan.

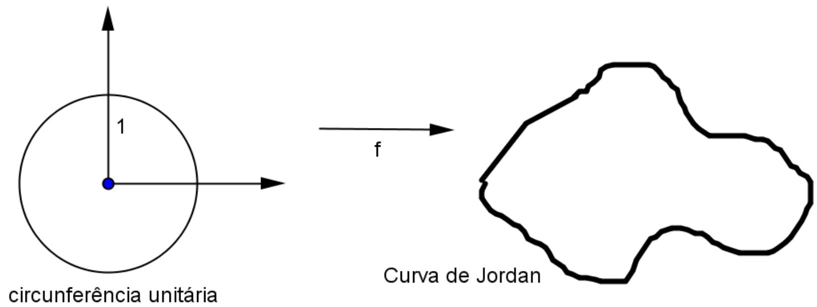



*Figura 2.* Homeomorfismo entre a circunferência e a Curva de Jordan.

Sem maior esforço matemático, ou seja, sem realizar demonstração rigorosa, como no exemplo precedente, apenas utilizando a intuição no sentido apontado por Fischbein (1987), é possível adquirir um conhecimento intuitivo e da percepção dos objetos pelo contato direto com eles, como apontado por Piaget e Inhelder (1993). Além disso, a visualização como habilidade e processo, indicado por Arcavi (1999) no tratamento de figuras, vem a desenvolver ideias ainda não conhecidas e que avancem na compreensão de um conceito.

A intuição pode ser utilizada para produzir conhecimento de arco de curva no plano ao tomarmos um pequeno fio flexível de comprimento unitário. Ao flexionar o fio, obtemos um arco sem perder nenhuma parte e, de forma recíproca, podemos considerar tal arco e deixá-lo retilíneo novamente. Com isso o conhecimento intuitivo, citado por Fischbein (1987), como um tipo de cognição, a qual está referida a afirmações auto evidentes, pode ser matematizada no seguinte sentido: consideramos o fio flexível unitário como uma representação do intervalo fechado de números reais $[0,1] \subset R$, o que, geometricamente, corresponde a um segmento de reta. O ato de transformar esse segmento de reta num arco de curva (de Jordan ou outra qualquer) é um homeomorfismo que leva um segmento de reta em um arco ou vice-versa (figura 3).

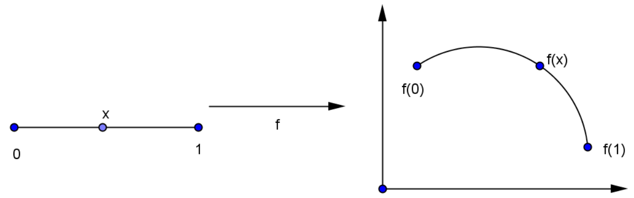



*Figura 3.* Homeomorfismo entre um segmento de reta e um arco de curva.

Os exemplos apresentados nos mostram a importância do papel que desempenha a intuição para a aquisição e desenvolvimento da habilidade de visualização, indicada por Arcavi (1999) como um processo, criação, interpretação e comentários sobre imagens. Entretanto, podemos ir mais além do que afirmações triviais, como dito por Fischbein (1987), para caracterizar essa habilidade, sem a qual é difícil conceber mentalmente conceitos dados em outras representações.

No nosso próximo exemplo, consideremos a circunferência unitária $S^1 = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = 1\}$ e o quadrado $Q = \{(x, y) \in R^2: |x| + |y| = 1\}$, ambos no plano. As duas figuras geométricas são homeomorfas, como podemos comprovar. De fato, consideremos a função

$$f: Q \rightarrow S^1 \text{ definida por } f((x, y)) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Ela é uma função contínua, uma vez que o denominador não se anula em nenhuma das duas coordenadas e é o quociente de duas funções contínuas. Por outro lado, não é difícil mostrar que a função é bijetora. A figura 4 dá uma visualização desse homeomorfismo, o qual também pode ser percebido intuitivamente, dispondo as duas figuras concentricamente e ligando os pontos de uma e de outra por vetores com origen no centro e extremidade na circunferência. Cada vetor corta o quadrado num único ponto e a correspência 1-1 fica perfeitamente definida, como ilustra a figura 5.

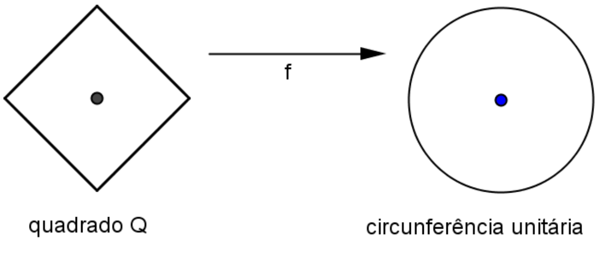



*Figura 4.* Homeomorfismo entre o quadrado e a circunferência.

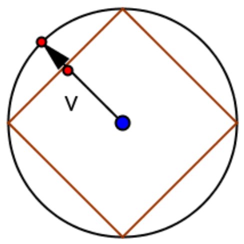



*Figura 5.* Correspondência 1-1 entre pontos do quadrado e da circunferência.

A partir do último exemplo de homeomorfismo vamos, por analogía, visualizar, intuitivamente, o homeomorfismo entre uma esfera no espaço e um cubo, como na figura 6. Observamos a inscrição de cubo na esfera, um vetor de origen no seu centro, que é comum ao centro do cubo e extremidade no ponto P da esfera. Para cada ponto P, o vetor intersecciona uma face do cubo num ponto Q. Assim, a correspondência 1-1 fica estabelecida.

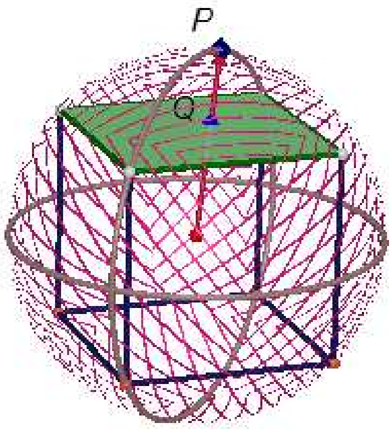



*Figura 6.* Correspondência 1-1 entre pontos do cubo e da esfera.

Podemos, ainda, explorar intuição ao considerarmos um fio elástico, de comprimento unitário, o qual pode ser esticado, sem se romper, até ser transformado, de modo a ficar com um comprimento igual ao dobro do inicial. Dessa forma, o fio, que pode ser pensado como um segmento de reta com um comprimento dado, se transforma em outro com o dobro desse. Com isso há uma transformação contínua, que faz corresponder a cada ponto de um, um único ponto do outro e vice-versa, caracterizando um homeomorfismo. Esse pode ser visualizado na figura 7, a seguir.

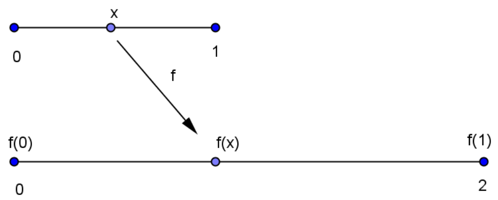



*Figura 7.* Homeomorfismo entre segmentos de amplitudes distintas.

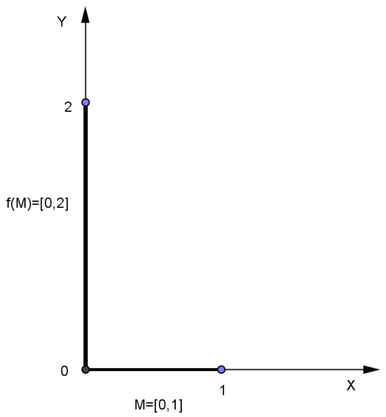
Podemos facilmente sair do plano intuitivo e imaginativo e articular a construção matemática correspondente. Para tal, vamos verificar que a função $f(x) = 2x$ define o homeomorfismo visualizado na figura 7, quando $x \in [0,1]$ e $f(x) \in [0,2]$. É necessário, pois, verificar que essa função é contínua, bijetiva e sua inversa também é contínua. Em primeiro lugar, toda função de primeiro grau, como a dada, é contínua trivialmente. Tomando $f(x_1)= f(x_2)$, isso implica em $x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$, logo temos uma função injetiva. Por outro lado, consideramos que $\forall k \in [0,2]$, $\exists! x \in [0,1]$, de modo que $k=f(x)$. De fato, $k=2x$ acarreta em $x= k/2$. Assim, a função f é sobrejetora. Portanto, é bijetora. Por fim, a função inversa de f, dada por $f^{-1}(x) = x/2$ também é uma função contínua.

Tomemos uma função $f: M \to N$ contínua, definida num espaço real M, com valores reais em N. O conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$$

é chamado gráfico da função f. Os conjuntos M e G(f) são denominados homeomorfos. Esse exemplo abre um leque grande de possibilidade de obtenção de homeomorfismos. Nos cursos de Cálculo e Geometria Analítica, há um conflito cognitivo ao estudar função real de variável real, isto é, conjunto imagem, nessa situação, é um subconjunto dos números reais, sendo confundido com o grafico da função, o qual é subconjunto do $R^2$.

Por exemplo, seja f: **[0,1]** $\to$ **[0,2]** a função analisada no último exemplo (figura 7), a qual associa a cada $x \in$ **[0,1]** $\subset$ **R** um único $y = 2x \in$ **[0,2]** $\subset$ **R**. Por abuso de simbologia representamos no eixo horizontal os valores do domínio da função e, no eixo vertical, os valores das imagens da função, muito a contramão de quando representamos funções por diagramas sagitais. Assim, a figura 8, a seguir, representa a função f, cujo domínio é **[0,1]** $\subset$ **R** e conjunto imagem Im(f)=f(**[0,1]**)= **[0,2]** de uma forma diferente daquela. Na figura 9, está representado o Graf(f), claramente um conjunto de pontos distintos do anterior.



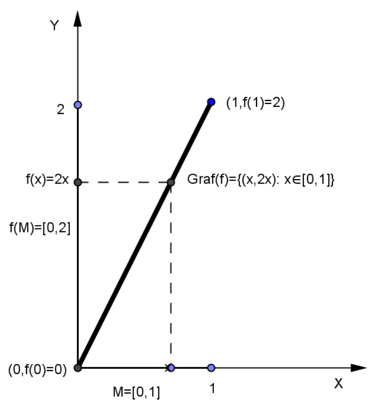



*Figura 8.* Representação da função f. *Figura 9.* Gráfico da função f.

Portanto, uma função e um gráfico não são sinônimos, como algumas vezes são considerados.

O conjunto X = {(x, y) ∈ $R^2$: x ≠ 0 e y ≠ 0} é o plano euclidiano sem o ponto (0,0), plano perfurado, enquanto que $S^2$ = {(x, y, z) ∈ $R^3$: $x^2 + y^2 = 1$} é o cilindro circular reto de eixo OZ. Os dois espaços geométricos são homeomorfos, ou seja, topologicamente equivalentes, uma vez que a função

$$f(x, y, z) = (xe^z, ye^z)$$

é contínua, bijetora e com inversa contínua.

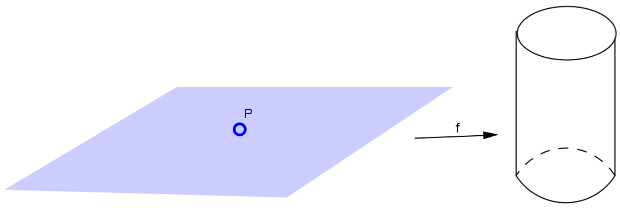



*Figura 10.* Homeomorfismo entre o plano perfurado e o cilindro circular reto.

Um exemplo interessante de homeomorfismo é o denominado projeção estereográfica da esfera unitária $S^2$ = {(x, y, z) ∈ $R^3$ : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$} do $R^3$, sem o seu polo norte, isto é, o ponto P(0,0,1) e $R^2$ sobre o plano euclidiano. A função

$$f: S^2 - \{P\} \rightarrow R^2 \text{ definida por } f(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

é a função que define esse homeomorfismo.

Notamos que f é contínua uma vez que as funções coordenadas que definem a figura geométrica

(x,y,z) → x; (x,y,z) → 1; (x,y,z) → z e (x,y,z) → 1-z são todas contínuas.

Além disso, 1-z ≠ 0 para todo z ≠ 1, o que leva $(x,y,z) \rightarrow \dfrac{x}{1-z}$ e $(x,y,z) \rightarrow \dfrac{y}{1-z}$ a serem contínuas. Na figura 11, o homeomorfismo é visualizado, na qual podemos verificar a relação 1-1 que faz corresponder a cada ponto M da esfera um único ponto M' do plano e vice-versa. A construção desse homeomorfismo, utilizando software de Geometria Dinâmica, torna-se muito interessante para o ensino e aprendizagem, especialmente para o desenvolvimento da habilidade de visualização por meio de ferramentas tecnológicas como indicou Arcavi (1999).

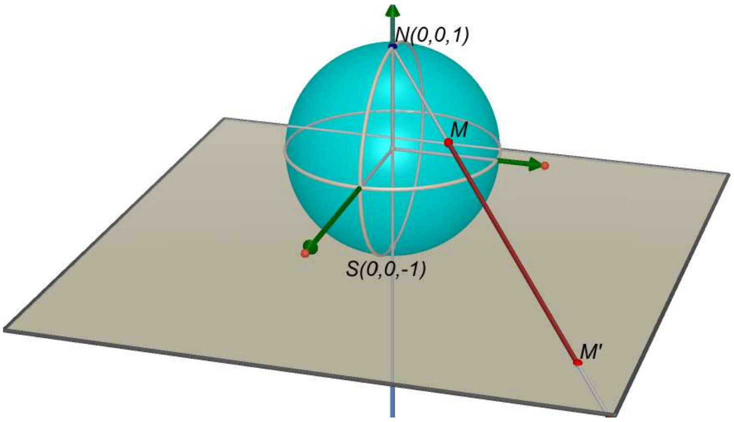



*Figura 11.* Projeção estereográfica da esfera menos um ponto sobre o plano.

A fim de concluir nosso trabalho, buscaremos ilustrá-lo com mais dois exemplos, cujas construções poderemos realizar utilizando o material concreto papel, um daqueles recursos indicados por Arcavi (1999) para desenvolver visualização. Para o primeiro, tomemos uma pequena tira de papel dupla face, com aproximadamente 2cm de largura e 10cm de comprimento, como indicado na figura 12. Realizemos uma torção na tira, de modo que façamos coincidir os pontos A com B' e B com A'.

Essa superfície, característica da Topologia, é denominada Faixa de Möebius. Como ela foi um dos embriões que deram origem à Topologia, sua importância reside, por exemplo, no fato de que é uma superfície sem fronteiras, ou seja, de um único lado. Ela tem aplicações na Astronomia associada a espaços não orientáveis, nos quais podemos entrar e sair sem que seja necessário dar volta. Também foi utilizada por Lacan para associar determinados estados da psique humana, ou seja, quando um indivíduo já não conhece seu interior, que se confunde com o exterior, já que a faixa não possui nem um e nem outro.

Ela foi originada a partir de uma superfície que apresenta duas faces, a tira de papel. Como falamos antes, o homeomorfismo não é global, uma vez que nos pontos onde há a colagem dos pontos, perde-se a injetividade. Afora isso, nossa intuição indica as demais condições para que as duas superfícies sejam homeomorfas.

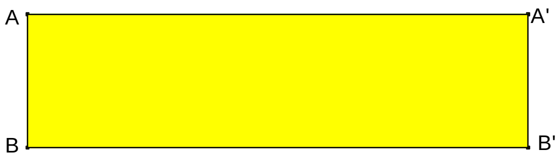



*Figura 12.* Faixa de Mõebius. Construção dos autores.

Outra construção em papel que podemos elaborar consiste em tomar duas faixas de papel semelhantes a anterior e, a partir de uma delas, construir uma nova superficie, colando a fronteira AB com A'B' mas, antes, dando uma torção de 360º na faixa. Com a outra, construímos uma superficie cilíndrica. Segundo Eves (1969), as duas superficies não são globalmente homeomorfas, não podemos transformar diretamente uma na outra, mas os pontos da superficie cilíndrica podem transformar-se bijetivamente e de forma contínua em pontos da outra superficie. Isso significa que a relação homeomórfica depende dos pontos e não do espaço em que as duas superfícies se encontram, no caso, $R^3$. O autor afirma que

> a diferença entre eles desapareceria, se o espaço tridimensional pudesse ser considerado como um subespaço de um tetradimensional e se o alongamento, a contração e a flexão fossem admissíveis nesse espaço de quatro dimensões pois então, o cilíndrico e a tira torcida poderiam ser deformadas, convertendo-se uma na outra, sem qualquer corte ou auto intersecção. (EVES, 1969, p.343, trad. nossa)

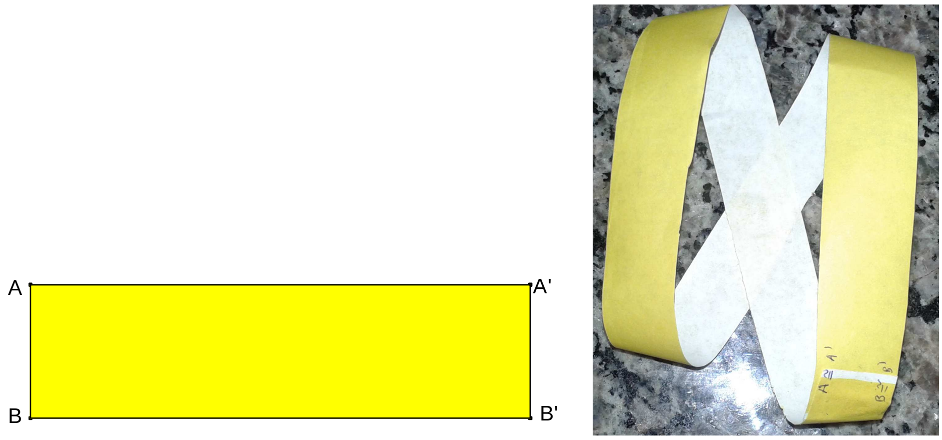



*Figura 13.* Faixa e superfície. Construção dos autores.

## Finalizando

Nessa oficina, utilizamos intuição como forma de construção de conhecimento matemático para, juntamente com visualização, dar um tratamento aos homeomorfismos pelos aspectos geométricos visuais intuitivos. Não nos preocupamos com demonstrações matemáticas rigorosas, mas buscamos fazer analogias e estabelecer conexões com conteúdos geométricos em nível intermediário, de modo que o professor e os futuros professores possam adquirir habilidades e conhecimentos geométricos que julgamos relevantes para desenvolver pensamento geométrico atual.

Nesse sentido, abordar um conteúdo avançado de uma geometria, como a Topológica, de forma acessível a um aluno ingressante de uma Licenciatura em Matemática, por exemplo, constitui um desafio para todo formador. Em particular, nossas pesquisas têm apontado que imaginação, intuição e visualização podem ser aliados poderosos nessa tarefa e que proporcionam novos pontos de vista sobre Geometria, como indicado por Félix Klein em seu Programa de Erlangen: “se define geometria como a teoria dos invariantes de um grupo de transformações.” (EVES, 1969, p. 434, trad. nossa).

Deixamos de considerar, neste trabalho, demonstrações matemáticas mais rigorosas com o objetivo de despertar os participantes da oficina e o leitor a aprofundar estudos relacionados ao tema.

## Referências e bibliografia

Arcavi, A. (1999). The role of visual representation in the learning of mathematics. *North American Chapter of the PME*. Proceedings… Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 set. 2008.

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrias*. UTHEHA: México.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Granger, G. F. (1974). *Filosofia do Estilo*. São Paulo: Perspectiva, Editora da USP.

Hilbert, D. (2003). *Fundamentos da geometria*. Lisboa: Gradiva.

Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (1932). *Geometry and the imagination*. New York: Chelsea Publishing Company,

Leivas, J.C.P. (2008). Organizando o espaço por caminhos topológicos. *Revista Vidya*, *28*(2), 59-71.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1993). *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.