Dos ejemplos de modelización matemática basadas en fenómenos físicos

Jose Benito **Búa** Ares
IES Ramón Cabanillas
España
bua@edu.xunta.es
Mª Teresa **Fernández** Blanco
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Santiago de Compostela
España
teref.blanco@usc.es

Resumen

La modelización matemática se ha ido convirtiendo los últimos 30 años en una de las actividades matemáticas que se considera necesario introducir en la enseñanza secundaria obligatoria y postobligatoria. La experiencia de aula que se describe representa una modelización matemática de dos fenómenos físicos en las que el uso de herramientas informáticas (GeoGebra) juega un papel de gran relevancia. Del análisis de la experiencia se desprende que la modelización matemática es asumible en lo que se refiere al tiempo necesario para llevarla a cabo y que representa un proceso que el alumno puede realizar de forma autónoma. Asimismo, se constata que la modelización representa un reto para el alumno pero que implica dificultades que deben ser tenidas en cuenta también para el profesor.

Palabras clave: Experiencia de aula, enseñanza secundaria, funciones, modelización matemática, GeoGebra.

Introducción

La modelización utilizada en la enseñanza de las Matemáticas es un campo de investigación desde hace más de 30 años y ha pasado a ser parte fundamental en la investigación en Didáctica de la Matemática. Así, es usual que los congresos de educación matemática y de didáctica de la matemática incluyan el grupo de trabajo "Modelización y aplicaciones" entre los grupos de trabajo. Por ejemplo, el ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) posee una sección afiliada dedicada específicamente a la modelización (International Community of Teachers of Modelling and Applications, ICTMA). La NCTM y sus Principles and Standards for School Mathematics (2000; traducción al castellano, 2003) concede importancia a la modelización integrada como parte de la resolución de problemas y el informe PISA 2012 (OECD, 2013, pp. 25-27) considera la construcción de modelos matemáticos, integrada como parte del proceso de matematización de un problema contextualizado en la realidad, como parte fundamental en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Como consecuencia de todo ello, la modelización matemática se ha ido introduciendo en diversos países en la enseñanza secundaria obligatoria y postobligatoria. Por ejemplo, en el borrador de real decreto que regulará la enseñanza secundaria en España la modelización matemática y la construcción de modelos matemáticos se integran en el bloque "Procesos, métodos y actitudes" (MECD, 2014, Anexo I, Troncales, Matemáticas, p. 3):

"El bloque Procesos, métodos y actitudes en matemáticas será común y transversal, y debe desarrollarse simultáneamente al resto de bloques de contenido ya que es el eje fundamental de la asignatura. Se articula sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático: la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos."

El ciclo de modelización

Al hablar de modelización matemática es común realizar una distinción entre modelo y modelización, de la misma forma que se realiza la distinción entre producto y proceso. Así, el término modelización se refiere al proceso mientras que modelo se refiere al resultado o al producto de ese proceso, en forma de representación física, simbólica o abstracta (Blum & Niss, 1991). Existen diferentes esquemas que intentan describir el proceso de modelización matemática, caracterizados o diferenciados fundamentalmente por los objetivos asignados a la modelización en la enseñanza.

La modelización se describe como un proceso que parte de una situación o problema real y que desemboca, a través de una sucesión de pasos o fases, en un modelo matemático que da respuesta al problema o situación real inicialmente planteada. En el proceso se retoman pasos anteriores, con lo que el proceso adopta un comportamiento cíclico. Con tal motivo, los esquemas son conocidos como ciclos de modelización. En la Figura 1 exponemos un ejemplo de uno de esos esquemas, de Blum y Leiss (2007, p. 225), por representar uno de los ciclos más citados.

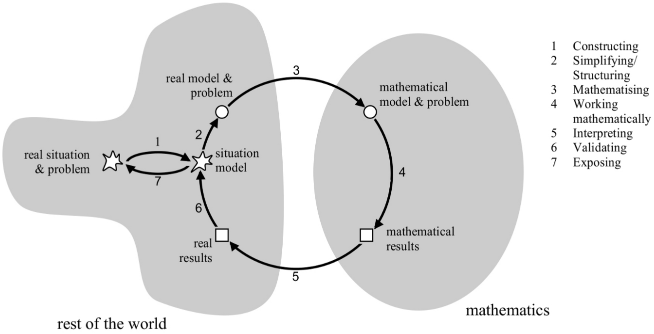

Figura 1. Ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007, p. 225).

PISA, en su informe del año 2012, al tratar el problema de la matematización de un problema contextualizado en el mundo real, incluye su propio ciclo de modelización (Fig. 2). En dicho esquema describe la descripción del proceso de matematización de un problema procedente del mundo real e incluye un esquema descriptivo del proceso de construcción de modelos matemáticos:

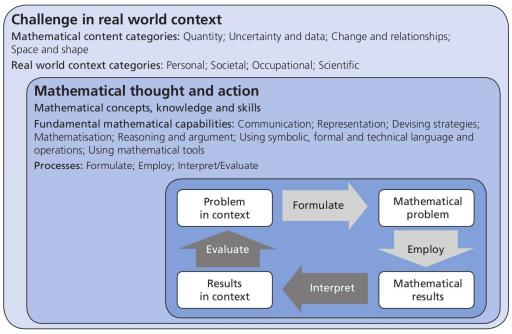

Figura 2. Matematización y ciclo de construcción de modelos de PISA 2012 (OECD, 2013, p. 26).

Como se observa, el ciclo de PISA posee puntos en común con el ciclo de Blum y Leiss pero también diferencias. Ante la introducción paulatina de las herramientas tecnológicas, se han desarrollado ciclos de modelización que incluyen de forma expresa esas herramientas en el ciclo de modelización (ver, por ejemplo, Perrenet & Zwaneveld, 2012).

Las actividades que describiremos representan dos modelizaciones de fenómenos físicos y, por tanto, identificables con una situación procedente del mundo real. Se trata, en definitiva, de resolver un problema contextualizado en la realidad mediante un proceso de matematización de esa realidad. El proceso, descrito y caracterizado usualmente como ciclo de modelización (Figuras 1 y 2), permite obtener un resultado matemático que, interpretado en contexto, representa una solución al problema inicial. La dificultad al hablar de modelización en la enseñanza radica precisamente en los procesos de matematización que tienen o deberían tener lugar en el ciclo. Lo que describiremos intenta ilustrar esa dificultad y, como consecuencia, las dificultades a las que se enfrenta un profesor al proponer como actividad en el aula una modelización.

Metodología y descripción de las actividades de modelización

Las actividades que se presentan en este trabajo se corresponden con el estudio de dos fenómenos físicos: el estiramiento de un muelle sometido a un peso (masa en realidad) y el comportamiento de aceite vertido en agua.

Las modelizaciones fueron propuestas a alumnos de 1º de Bachillerato de la asignatura de Matemáticas de la modalidad de Bachillerato Científico-Tecnológico (16-17 años de edad) durante los cursos 2010-2011 y 2011-2012, como actividades fuera del horario lectivo y de carácter voluntario, sin repercusión sobre su evaluación académica. El porcentaje de alumnos interesados en participar sobre el total rondó el 60% ambos años. Las actividades se realizaron una a continuación de la otra, con un lapso de tiempo de dos semanas entre ambas. En el momento de proponer las actividades, los alumnos ya habían estudiado el bloque de Análisis Matemático del plan de estudios del curso que estaban realizando (operaciones con funciones, límites, continuidad, derivada, representación gráfica de funciones, etc.).

Las dos actividades siguen un esquema muy parecido, tanto a la hora de ser planteadas a los alumnos como en los pasos o fases en que se dividen por lo tanto se irán analizando conjuntamente. El punto de partida representa un problema en contexto o situación real (ver los ciclos de modelización citados anteriormente). En la primera actividad, el problema se plantea a partir del comportamiento de un muelle sometido a un peso. La segunda actividad se trata del comportamiento de aceite de uso doméstico vertido en agua, a la que se ha añadido una pequeña cantidad de detergente líquido para concentrar la mancha de aceite (que traerá como consecuencia que la mancha de aceite adopte una forma circular). A partir de este momento, las nombraremos como *Muelle* y *Aceite y agua.*

Los alumnos se distribuyeron en grupos de trabajo. Cada grupo disponía de su propia mesa en el laboratorio del centro y de su propio material para obtener los datos: pesas, soporte para pesas, muelle (diferente en cada grupo de trabajo), una tina, agua, detergente líquido, aceite, jeringuillas de 2.5 *ml*, 5 *ml* y 10 *ml*, reglas y un flexómetro.

Descripción de las sesiones de trabajo

La descripción del proceso seguido se hará a través de sesiones de trabajo. Antes de empezar con las actividades propiamente dichas se incluye una sesión preparatoria de introducción al geogebra. La primera sesión de trabajo se corresponde con la obtención de datos en el laboratorio, la segunda es la sesión dedicada a la obtención de la función de ajuste y en la tercera se proponen una serie de cuestiones alrededor del modelo. En el caso de *Aceite* y *Agua* se añade una sesión más de aplicación del modelo.

Sesión preparatoria: introducción al Geogebra

En las dos modelizaciones se utiliza el programa GeoGebra como herramienta tecnológica que permite obtener con facilidad el modelo por lo que, dos semanas antes de proponer las actividades, se dedicó una primera sesión de introducción al GeoGebra.

Esta sesión (de duración máxima 30 minutos) es necesaria si los alumnos desconocen cómo se introducen puntos del plano en coordenadas y el uso de parámetros en GeoGebra (deslizadores). Los alumnos obtendrán una expresión analítica que relaciona las variables de un conjunto de puntos visibles en el plano cartesiano. Representa el paso inverso al que realizan normalmente (a partir de los 13-14 años de edad en España) en la representación gráfica de las funciones lineal, afín y cuadrática.

- Introducción de puntos del plano y parámetros en GeoGebra

Los puntos en el plano se introducen de la forma *A=(x,y)*. Por ejemplo (Fig. 3), *A=(2,3)*, *B=(-1,4)*. En el ejemplo, se ha indicado al ordenador que suprima el nombre del punto B en la pantalla (*Botón izquierdo->Muestra rótulo*). Si no se desea que GeoGebra asigne nombre automáticamente a los objetos que se introducen y generan, debe marcarse en *Opciones->Rotulado-> Ningún nuevo objeto.*

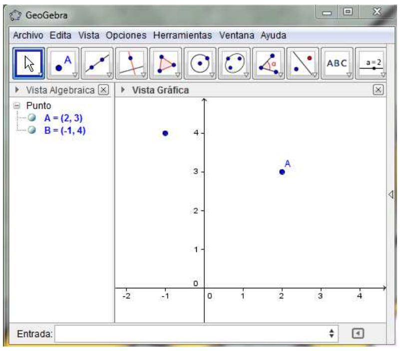

Figura 3. Introducción de puntos del plano en GeoGebra.

Los parámetros se introducen asignando un valor concreto a una variable. Por ejemplo, *a=1*, *k=1*, etc (Fig. 4a). Para que el deslizador sea visible en pantalla es necesario mostrar el objeto, pulsando el botón derecho sobre el parámetro ya introducido y escogiendo “Mostrar objeto” o picando sobre el círculo blanco que aparece a la izquierda del parámetro en la ventana “Vista Algebraica”. Aparecerá una línea con un punto central (Fig. 4b). El punto se puede mover, tanto con el ratón como con las teclas de desplazamiento, con lo que el valor del parámetro cambiará. Se puede indicar que aparezca el nombre del parámetro en la línea seleccionando “Mostrar rótulo” en el menú que se despliega al picar el botón derecho sobre el objeto. El paso de cambio con cada pulsación de una tecla de desplazamiento y el intervalo en el que el parámetro puede tomar valores se modifica en el menú “Propiedades de Objeto” (botón derecho sobre el objeto en la ventana “Vista Gráfica” o sobre el parámetro en la ventana de “Vista Algebraica”).

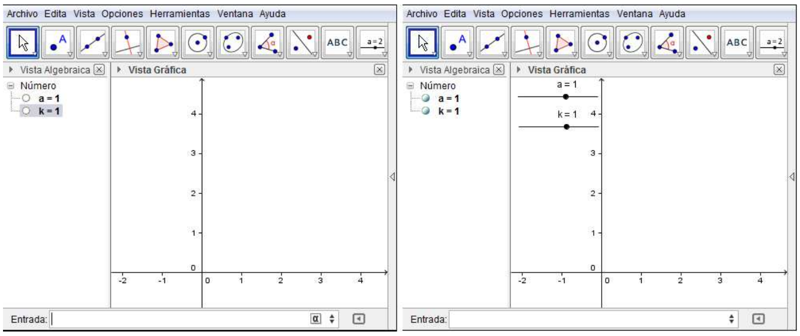

Figura 4a y Figura 4b. Introducción de parámetros en GeoGebra.

- Obtención de funciones de ajuste de puntos visibles en el plano

Se realizaron dos prácticas de ajuste de datos procedentes de una tabla de datos mediante una función. Cada grupo de trabajo disponía de un ordenador con GeoGebra instalado. Se proyectaron ambas tablas de datos (una a continuación de la otra) usando el cañón de vídeo del aula de informática. Los alumnos debían introducir los pares de puntos, decidir qué función era la adecuada para ajustar los datos, introducir los parámetros necesarios, introducir la función dependiente de los parámetros y modificar los parámetros hasta conseguir una función que ajuste los datos. En la primera, el ajuste es pleno, en el sentido de que la gráfica de la función *pasa* por todos los puntos (Fig. 5a). En la segunda, no es posible que la gráfica *pase* por todos los puntos (Fig. 5b), situación que se corresponde con la que se encontrarán posteriormente en las dos modelizaciones.

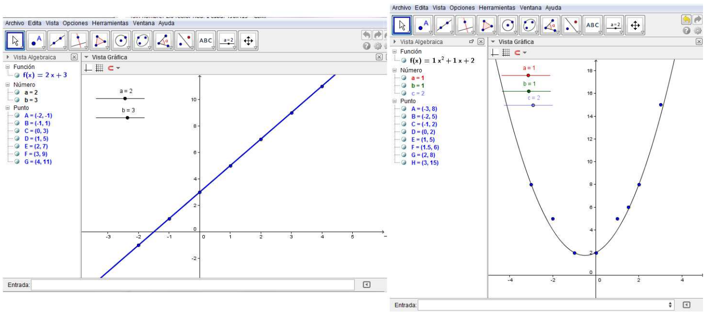

Figura 5a y Figura 5b. Prácticas previas. Generación de funciones de ajuste.

Primera sesión: obtención de datos en el laboratorio.

Duración aproximada: sobre 20 minutos en el caso de *Muelle* y sobre 45 minutos en el caso de *Aceite y Agua*. La forma de presentar a los alumnos esta primera parte del proceso de modelización es muy parecida en las dos actividades (Tabla 1).

Tabla 1

Enunciados de la primera sesión

Muelle	Aceite y Agua
Vamos estudiar cómo se estira un muelle al colgarle un peso. Tomad el número de datos que estiméis necesario y usad la forma de hacerlo que os parezca mejor.	Vamos estudiar cómo varía el diámetro de una mancha de aceite sobre agua al añadirle aceite al agua. Tomad el número de datos que estiméis necesario y usad la forma de hacerlo que os parezca mejor.

La obtención de datos en el caso de *Muelle* no planteó ningún tipo de dificultad. En cuanto a la actividad *Aceite y agua*, se indicó a los alumnos la conveniencia de verter una nueva cantidad de aceite sobre la mancha visible de un vertido anterior, con lo que únicamente se tomaban medidas de una mancha de aceite, obtenida por acumulación de aceite sobre manchas obtenidas anteriormente. La mayor dificultad encontrada en esta parte consiste en la dificultad de verter cantidades concretas de aceite con una jeringuilla. Por ello es conveniente que al menos uno de los alumnos de cada grupo practique en su domicilio a verter cantidades fijas de aceite sobre el agua. Otra opción es realizar el vertido del aceite con una pipeta en lugar de utilizar jeringuillas, lo que facilita y disminuye el tiempo dedicado a esta parte de forma considerable (que pasaría a ser de alrededor de 20 minutos).

Segunda sesión: obtención de la función de ajuste.

Duración aproximada: sobre 15 minutos en el caso de *Muelle* y sobre 35 minutos en el caso de *Aceite y Agua*.

Los alumnos se trasladaron al aula de informática del centro para realizar esta sesión. La tarea fue planteada a los alumnos bajo la misma forma en los dos casos (Tabla 2).

Tabla 2

Enunciado de la segunda sesión

Muelle/Aceite y Agua
Introduce los datos que obtuviste en el laboratorio en el ordenador e intenta obtener una función que ajuste los datos mediante el programa GeoGebra.

Cada grupo de trabajo disponía de unas fotocopias con las gráficas de las familias de funciones fundamentales: afín, cuadrática, potencial, ($f(x)=x^n, n\in N$), proporcionalidad inversa ($f(x)=\frac{1}{x^n}, n\in N$), raíz cuadrada ($f(x)=k\cdot\sqrt{x},\ k\in R$), exponencial y logarítmica (de bases mayores y menores que 1), seno, coseno y tangente. Además, disponían de dos archivos GeoGebra en los que se habían introducido previamente 20 y 60 puntos del plano de la forma *(x,x)*. Estos dos archivos se proporcionaron para reducir el tiempo dedicado a la introducción de datos pues la modificación de datos ya introducidos previamente en GeoGebra es más rápida que la introducción de datos nuevos, por otro lado, representa un trabajo aburrido y tedioso.

La función que los alumnos deben obtener es la función *f(x)=ax o f(x)=ax+b*, en el caso de *Muelle* (dependiendo de si toman solo la longitud de estiramiento o la longitud total del muelle) y $f(x)=k\cdot\sqrt{x},\ k\in R^+$. *x* representa la masa colgada del muelle y la cantidad de aceite, respectivamente. *f(x)* representa la longitud del muelle y el diámetro de la mancha de aceite circular. Como veremos, algún grupo puede obtener las funciones inversas de las indicadas.

Las funciones representan, interpretadas como un modelo matemático, la respuesta al problema planteado inicialmente. El modelo obtenido es, al mismo tiempo, un resultado matemático y real o en contexto (ver ciclos de modelización citados anteriormente) sin más que identificar las variables dependiente e independiente con las magnitudes físicas presentes en ambos fenómenos (*x* con masa e *y* con longitud; *x* con cantidad de aceite e *y* con diámetro de la mancha)

Tercera sesión: cuestiones sobre los modelos obtenidos

Se realizó una tercera sesión consistente en plantear preguntas sobre los modelos obtenidos (Tabla 3).

Tabla 3

Cuestiones de la tercera sesión

Muelle	Aceite y Agua
- ¿Cuanto se alarga el muelle con 370 g de peso? - ¿Qué peso se corresponde con 21 cm de longitud del muelle? - ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente en la función?	- La función que rige los datos es siempre de la forma f(x)= $k\cdot\sqrt{x}$, siendo k una constante, x la cantidad de aceite en ml y f(x) el diámetro en mm. La k es diferente dependiendo de cada caso. En ese sentido, k varía. ¿Sería apropiado darle el nombre de "variable"? ¿Por qué? ¿Usarías otro nombre? ¿Por qué crees que K varía en cada caso

	estudiado?
	- Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso el radio en lugar del diámetro?
	- Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso el área de aceite sobre el agua en lugar del diámetro?

Cuarta sesión: aplicación del modelo *Aceite* y *Agua*.

Duración aproximada: 50 minutos. En el caso de *Aceite y agua*, se añade esta cuarta sesión en la que el modelo es utilizado en una hipotética situación real. Dicha situación real se corresponde con un vertido contaminante de petróleo en la costa cercana al centro de estudios de los alumnos. El uso en ese contexto nuevo conlleva asumir los límites que el modelo presenta en la nueva situación: comportamiento diferente del petróleo y el aceite, comportamiento diferente en agua salada y dulce, influencia de las olas y las corrientes marinas, etc. Además, era necesaria una "modificación" de la función obtenida en el ajuste de datos, motivación fundamental para el planteamiento de las preguntas previas de la sesión anterior.

En el aula, se entregó a cada alumno una fotocopia en color en la que se describía una situación de vertido contaminante en la costa (Fig. 6) y que suscita preguntas a las que el modelo que han obtenido previamente puede dar respuesta (Tabla 4). Se indicó a los alumnos que ese día llevasen calculadora científica y material de dibujo técnico. También se les suministró una fotocopia en color y de tamaño DIN A3 (29,7cmx42cm) de una parte de una carta náutica de la misma zona de la costa que aparece en el hipotético vertido. En esta sesión, las preguntas debían ser respondidas individualmente.

Tabla 4

Aplicación del modelo Aceite y Agua

Aplicación del modelo *Aceite* y *Agua*

La fotografía que aparece a continuación, se corresponde con una fotografía vía satélite de un vertido que se produjo en las costas de Cambados.

Fig. 6. **Imagen de vertido (reducida respecto al original)**

a) Determina la escala de la fotografía.

b) Determina el área de superficie contaminada. Usa aquellos instrumentos y conocimientos que estimes necesarios o convenientes.

c) Aplica el modelo que obtuviste para determinar la cantidad de fuel del vertido.

d) Haz una crítica de tu trabajo: deficiencias, ventajas, posibles mejoras, etc.

Resultados

El ambiente de trabajo en todas las sesiones es relajado y no se observan pérdidas de tiempo significativas. En las dos primeras sesiones (obtención de datos y la obtención de la función de ajuste) todos los alumnos participan activamente, deciden consensuadamente la distribución del trabajo y asumen que es importante realizar bien las mediciones y el ajuste. Los alumnos preguntan al profesor en muy contadas ocasiones y casi siempre en relación con cuestiones meramente técnicas, lo que lleva a pensar que procuran realizar el trabajo de forma autónoma.

No realizaremos un análisis completo de los resultados obtenidos por falta de espacio. Nos centraremos en aquellos resultados que consideramos más relevantes.

En relación al número de datos que los diferentes grupos recogen, se observa que varía considerablemente: en el caso de *Muelle* el número de datos varía desde 9 hasta 32; en el caso del *Aceite* y *Agua* obtienen entre 7 y 23 pares de datos. También se encuentra variabilidad en cuanto al nombre que asignan a cada columna de la tabla de datos: *x* e *y*, *Peso* y *Longitud*, *cm*, *g*, *ml y cm*, etc.

En el caso de *Muelle*, el grupo G1 (Fig. 7a) obtiene la ecuación de una recta determinada a partir de dos datos de su tabla y el grupo G5 modifica los parámetros *a* y *b* de la ecuación de una recta en el plano, $y=ax+b$. Los restantes grupos utilizan la expresión $f(x)=ax+b$. El grupo G3 representa, al contrario que sus compañeros, la masa en el eje de ordenadas y la longitud en el de abcisas (Fig. 7b), lo que los conduce a la función inversa de la que usan sus compañeros.

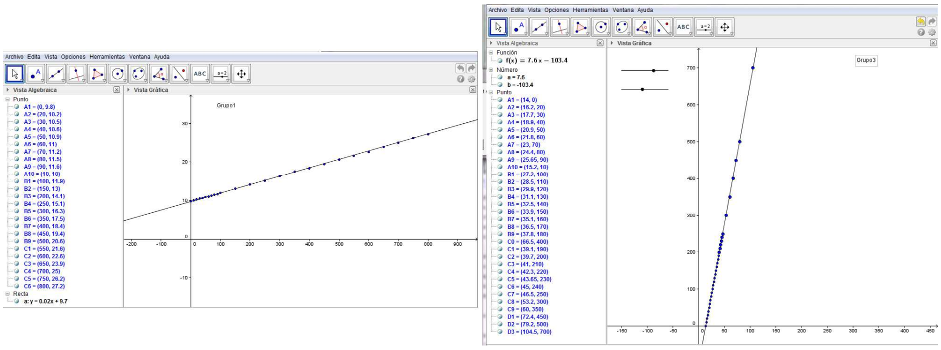

Figura 7a. Grupo G1: $y=0.02x+9.7$ y *Figura 7b.* Grupo G3: $f(x)=7.6x-103.4$.

En el caso de *Aceite y Agua*, para la obtención de la función de ajuste, todos los grupos aportan como solución una función del tipo $f(x)= k\cdot\sqrt{x}$, con valores de *k* diferentes en cada grupo (Fig. 8a y 8b).

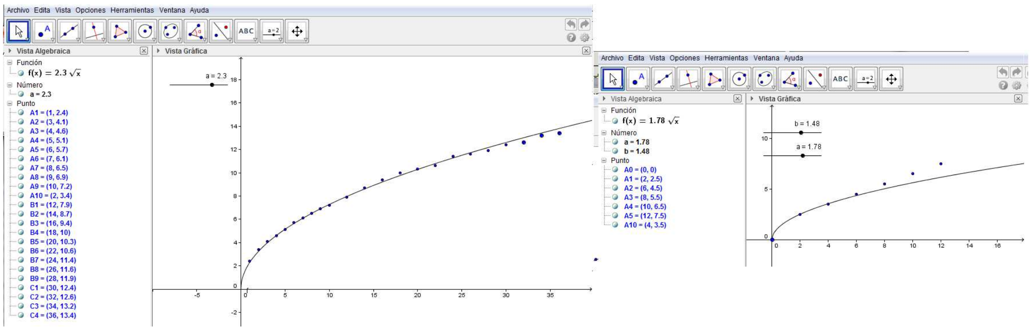

Figura 8a. Grupo G1: $f(x) = 2.3\sqrt{x}$ y *Figura 8b.* Grupo G5: $f(x) = 1.78\sqrt{x}$.

Uno de los grupos G5, utiliza un número de datos claramente insuficiente (Fig. 8b), lo que lleva a pensar que utilizan la función raíz cuadrada al observar que la usan sus compañeros. La razón de que ese grupo se contente con un número de datos tan escaso puede explicarse en base a su experiencia en la modelización anterior que, al tratarse de una recta, no precisaba de un número de datos grande. De esa forma, trasladan la experiencia previa a una nueva experiencia, sin reflexionar suficientemente sobre sus consecuencias.

En los párrafos siguientes mostraremos las respuestas a algunas de las cuestiones planteadas en la tercera sesión. Ante la pregunta en *Muelle* de cuales son las variables dependiente e independiente (Tabla 3), sólo el 36,4% de los alumnos identifican correctamente las dos variables. El 63,6% identifica, en la expresión $f(x) = ax + b$, el valor *b* como variable independiente y el valor *a* o *ax* variable dependiente. También se les preguntó sobre valores de alargamiento y masa no presentes en su tabla de datos (Tabla 3), para comprobar el uso que realizan del modelo que han obtenido. Un 54.5% usa una regla de tres en una o ambas preguntas para obtener el dato solicitado y solo un 27.2% utiliza la función en una o ambas preguntas. En la Fig.9 mostramos la respuesta que da un alumno para calcular el alargamiento del muelle al colgarle 370 g de masa.

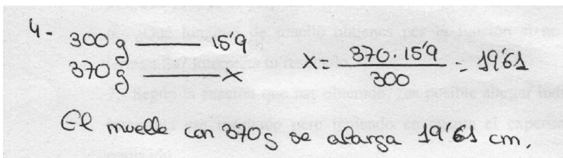

Figura 9. Respuesta de un alumno. Cálculo de alargamiento del muelle con 370 g de masa.

En *Aceite y agua* se le preguntaba a los alumnos sobre el nombre adecuado para el valor de *k* (Tabla 3). Los resultados muestran que un 52.2% lo nombra como variable (Fig. 10), un 34.8% como constante y ninguno le asigna el nombre de parámetro.

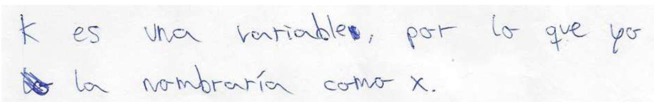

Fig. 10. Respuesta de un alumno. Identificación de *k* como variable.

En las preguntas relativas al modelo de *Aceite y agua* cuyo objetivo era modificar la función para relacionar radio con volumen (Tabla 3), el debate que se desarrolla cada uno de los dos años es diferente. El primer año debaten sobre si la expresión adecuada para relacionar radio y volumen debía ser $\frac{f(x)}{2}$ y sobre las consecuencias de dividir un solo miembro de una igualdad por un número. El segundo año debaten acerca de si la expresión del segundo miembro de la igualdad funcional debía ser $\frac{2.1}{2}\cdot\sqrt{x}$, $2.1\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}$ o $\frac{2.1\cdot\sqrt{x}}{2}$. Ninguno de los dos años nombran las nuevas funciones que obtienen durante el debate con un nuevo nombre, de forma que los resultados los nombran como *f(x)*.

En cuanto a la aplicación del modelo de *Aceite y agua* a un hipotético caso de vertido contaminante (cuarta sesión) destacamos los siguientes resultados:

- La cuarta parte de los alumnos determinan un valor de escala aceptable. Los demás o bien utilizan un sistema claramente inadecuado (55%) o no determinan la escala (20%).
- Solo dos alumnos llegan a utilizar un método de cálculo apropiado para determinar el valor de área de la mancha de la fotografía (Fig. 11). El 55% de los alumnos traza un círculo en la fotografía y mide radio o diámetro, en relación clara con sus observaciones del comportamiento del aceite sobre el agua en la obtención de datos en el laboratorio.

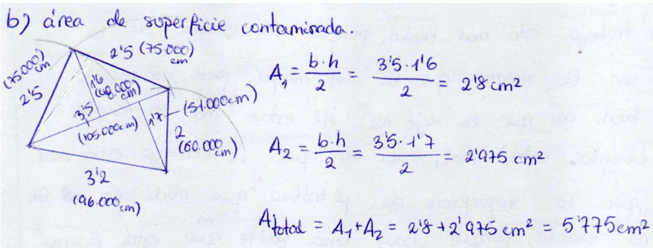

Figura 11. Respuesta de un alumno. Cálculo del área de la mancha de petróleo.

- Los alumnos tienen muchas dificultades en la aplicación del modelo: no recuerdan fórmulas básicas de cálculo de áreas, confunden nombres de figuras geométricas, utilizan mal las unidades de superficie o volumen, etc.
- En ningún caso interpretan ambas imágenes (mapa y fotografía) como una semejanza, por lo que no usan la relación entre áreas y entre volúmenes de figuras semejantes.
- De todos los alumnos, sólo dos llegan a proporcionar un volumen de vertido siguiendo un sistema de cálculo que se pueda considerar adecuado.

Reflexiones finales

Uno de los obstáculos a la introducción en la enseñanza-aprendizaje de la modelización en la enseñanza es el tiempo necesario para llevarla a cabo (Blum & Niss, 1991, pp. 53-54). Los profesores tienen miedo de no tener tiempo suficiente para hacer frente a la resolución de problemas, modelado y aplicaciones, además de tener que ocuparse de las matemáticas obligatorias incluidas en el plan de estudios. Como se ha visto a lo largo del documento, el tiempo necesario para llevar a cabo las actividades propuestas no puede calificarse como excesivo o demasiado largo (2-3 sesiones en cada una de las dos modelizaciones).

Parece destacable señalar que los resultados obtenidos en las dos primeras sesiones pueden llevarnos a conclusiones engañosas. Si acudimos a su capacidad a la hora de obtener un modelo, los resultados arrojan una conclusión clara: los alumnos, en general, obtienen un modelo con éxito y con facilidad. El proceso de obtención del modelo, que se reduce a la generación de la función que permite ajustar los datos obtenidos previamente experimentalmente, se realiza de forma ordenada y sin dudas. La obtención de la función mediante el programa GeoGebra se lleva a cabo con éxito, lo que proporciona el modelo matemático y real al mismo tiempo, por simple identificación de variables matemáticas con magnitudes físicas. Eso puede llevar a pensar que dominan los procesos necesarios de simplificación/estructuración, matematización, trabajo matemático e interpretación (ver Fig. 1).

En realidad, el proceso de obtención del modelo hasta ese momento se ha reducido al uso de técnicas o destrezas aprendidas con anterioridad y que no representan un problema matemático complejo en sí mismas, especialmente si tenemos en cuenta de que se trata de dos funciones muy sencillas. En las dos primeras sesiones se ha reducido el proceso de modelización a la obtención de un resultado (una función en este caso). Podríamos suponer que obtener el modelo es suficiente si suponemos que los procesos de simplificación/estructuración, matematización, trabajo matemático e interpretación se hallan integrados en los procesos que se llevan a cabo en la primera sesión. Supondremos que obtener datos experimentales conlleva una matematización o empleo de competencias matemáticas: se identifican los datos obtenidos como variables, se reconoce una relación de dependencia entre ambas variables, etc. El reconocimiento de la existencia de una relación de dependencia entre las variables lleva de forma inmediata a la búsqueda de la forma matemática en que ambas variables se relacionan o, lo que es lo mismo, la segunda sesión. En la introducción de datos y tratamiento de los mismos en GeoGebra, la matematización, trabajo matemático e interpretación (que se identifican con el empleo de competencias matemáticas) vuelve a producirse: se identifican los datos de la tabla de datos con puntos del plano cartesiano, se reconoce la gráfica que se intuye en la nube de puntos como una gráfica funcional determinada, se hace corresponder una magnitud con la variable dependiente y otra con la independiente, se introducen parámetros y funciones en las que esos parámetros jugarán un rol de variables funcionales, se distinguen los parámetros de la variable dependiente e independiente, etc.

La conclusión, de contentarnos con comprobar la capacidad de los alumnos para obtener un modelo, puede ser que los alumnos dominan todos esos conocimientos, conceptos, nociones, destrezas o competencias. Pero esa conclusión es, cuando menos, arriesgada. El análisis de las respuestas de los alumnos a las preguntas realizadas en la tercera sesión arroja datos que llevan a una interpretación distinta. Por ejemplo, dos grupos obtienen la ecuación de una recta en vez de la expresión de la función solicitada (con lo que las variables no pueden ser interpretadas por esos alumnos como variables funcionales), la mayoría no identifica las variables dependiente e independiente (confundiendo los parámetros con las variables dependiente e independiente), más de la mitad de los alumnos usan una regla de tres en vez de usar la función, no reconocen el valor de *k* como un parámetro en la expresión que obtienen ($f(x)=k\sqrt{x}$) y la denominan como constante o como variable, etc. Así, y como consecuencia del análisis de los resultados a las preguntas de la tercera sesión, no creemos que se pueda afirmar que los alumnos desarrollan los procesos que tienen lugar durante el ciclo de modelización por el simple hecho de que obtienen un modelo matemático.

Por todo ello, se hace imprescindible que el profesor sea consciente de que la modelización representa un proceso complejo en el que pueden no hacerse evidentes los errores, dificultades u obstáculos de los alumnos asociados a los conceptos, nociones y conocimientos involucrados en el proceso de modelización. Así, creemos que las dos actividades que hemos expuesto, no pueden ni deben reducirse a la obtención del modelo (dos primeras sesiones). Es necesario que el profesor contemple la diferentes opciones que permiten que los alumnos reflexionen sobre el modelo que están obteniendo y que lo asuman matemáticamente. Con tal motivo, el profesor debe reflexionar sobre qué es conveniente preguntar en cada sesión para garantizar que los procesos asociados al ciclo se desarrollen realmente, qué fases o partes desarrollar y en qué momento hacerlo. También deberá decidir sobre el tramo de edad en que sería conveniente realizar las modelizaciones. Por ejemplo, en edad temprana y como introducción de conceptos y nociones o en alumnos de mayor edad y como forma de ilustrar los conceptos y nociones ya estudiados previamente.

En resumen, la modelización y su introducción en la Enseñanza Secundaria es y debe ser un motivo de reflexión y debate también para el profesor.

Referencias y bibliografía

Blum, W., & Niss, M. (1991) Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues mathematics instruction. *Educational studies in mathematics, 22,* 37-68. Ed. Dorfler

Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum,& S. Khan, (2006), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing

MECD. (2014). *Borrador de real decreto. Anexo I, Troncales. Matemáticas.* Recuperado de http://www.mecd.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/participacion-publica/cerrados/2013/curriculo-basico.html

OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OCDE Publishing. doi: /10.1787/9789264190511-en

N.C.T.M. (2003): *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: S.A.E.M. Thales (Trad. Al castellano de Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000)).

Perrenet, J. C., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of mathematical modelling and application, 1(6),* 3-21.