



Condiciones para promover la argumentación en el aula de matemáticas

Horacio **Solar** Bezmalinovic
Pontificia Universidad Católica de Chile
Chile

hsolar@uc.cl

Jordi Deulofeu **Piquet**
Universidad Autónoma de Barcelona
España

jordi.deulofeu@uab.cat

Resumen

La problemática de esta comunicación se enmarca en el desarrollo de competencias matemáticas y la formación permanente de profesores, en particular el foco de estudio es la gestión de la competencia de argumentación en el aula de matemática. El grupo de investigación “Competencias matemáticas” (COMMAT) ha venido realizando investigaciones sobre la formación de profesores para el desarrollo de las competencias matemáticas, entre ellas la argumentación. En esta conferencia presentamos, mediante el estudio de casos de clases de matemáticas, los significados que los profesores atribuyen a la argumentación en el aula de matemáticas; la existencia de argumentación en las clases observadas; la estructura de la argumentación; el rol del docente para promover el desarrollo de la argumentación; y finalmente, las condiciones para promover la argumentación en la clase de matemáticas, punto que constituye el tema central de esta conferencia.

Introducción

Actualmente, el enfoque por competencias es considerado en la comunidad internacional como una propuesta educativa que va más allá del aprendizaje de contenidos, y apunta a la formación de ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos, permitiéndoles identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo (OCDE, 2013). Una de las

contribuciones del enfoque por competencias al currículo de matemáticas es dotarle una estructura orientada al desarrollo de procesos matemáticos tales como: argumentar, representar, calcular, modelar, resolver problemas y comunicar (Solar, 2009). Además, las competencias matemáticas, al sustentarse en procesos, se caracterizan por ser transversales a los núcleos temáticos y desarrollarse a largo plazo de manera cíclica en cada nivel educativo. Así, un enfoque por competencias es coherente con una estructura curricular que destaque los procesos matemáticos.

En el caso de Chile, las actuales bases curriculares (Mineduc, 2012) muestran un salto cualitativo en la importancia que se le da a las competencias, en términos de habilidades, y se propone una organización del currículo que articule habilidades con contenidos. En el área de Matemáticas se proponen cuatro habilidades concretas a desarrollar: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar, y representar. A partir de los trabajos que hemos desarrollado en la línea de competencias matemáticas, se ha conformado el grupo de investigación “Competencias Matemáticas” (COMMAT), que contempla tres grandes líneas de investigación: dimensión curricular, desarrollo de competencias en los estudiantes, y formación del profesorado (Solar, Gómez, Rojas y Coronado, 2014). En relación a la formación de profesores se ha caracterizado una Metodología de Trabajo Docente (MTD) de formación de profesores para el desarrollo de competencias matemáticas (Solar, Rojas, Ortiz & Ulloa 2012), tales como la modelización, la resolución de problemas, la representación, la argumentación y la comunicación.

En particular para este estudio queremos destacar la competencia de argumentar, en base a las investigaciones que han abordado dicha competencia en el aula de matemática, la mayoría de las cuales utilizan el modelo de Toulmin (1958). Si bien muchas de las investigaciones han tratado el desarrollo de la argumentación en el aula, hay pocos estudios que exploren los elementos que promueven la argumentación en el aula. Algunos de estos estudios han evidenciado que las intervenciones del profesor son clave para mejorar los niveles de argumentación en los estudiantes en el aula de matemáticas (Conner et al., 2014; Romero, Roquefort & Solar, 2012), pero no hay un reporte que aborde otras condiciones para el desarrollo de la argumentación. De este modo, la problemática que moviliza la investigación consiste en identificar condiciones para promover la argumentación en el aula de matemáticas.

Marco teórico

En general, los análisis de argumentación en el aula se sustentan en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), que sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones. Esta secuencia consta de seis elementos (Goizueta & Planas, 2013): *Datos*, *Conclusión*, *Garantía*, *Respaldo*, *Calificador modal*, *Refutadores* (figura 1). Para estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, Krummheuer (1995) propone una secuencia de argumentación basada en el modelo argumentativo de Toulmin. Sin embargo, reduce el sistema original a cuatro elementos: datos, garantía, respaldo y conclusión.

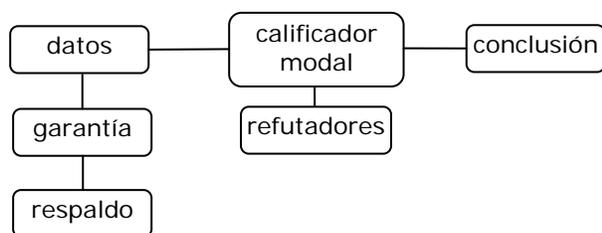


Figura 1. Modelo de Toulmin (1958).

Basándose en el modelo de argumentación de Toulmin (1958), algunos trabajos en educación matemática han estudiado la construcción individual de los argumentos en el aula de matemáticas, mientras que otros investigadores, entre ellos Krummheuer (1995), han destacado la argumentación colectiva como una parte importante del discurso en el aula de matemáticas que incluye cualquier instancia en la que el profesor y los estudiantes hacen una sentencia matemática que se puede asociar a la argumentación. Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco (2014) estudian el papel del profesor en la argumentación colectiva, para lo cual modifican el modelo de Toulmin (1958) con la finalidad de incluir las acciones de los profesores que, si bien no están directamente asociados a los componentes de la argumentación, contribuyen al desarrollo de la misma. Para nuestra investigación, hemos optado por esta visión de la argumentación colectiva para analizar el aula de matemáticas.

Nuestro análisis parte de la interpretación de los componentes del modelo argumentativo de Toulmin como procesos matemáticos. En Solar, Azcárate & Deulofeu (2012) se muestra un estudio realizado en un curso de 8° básico sobre qué procesos argumentativos de la estructura de Toulmin (1958) emergen en la implementación de una unidad didáctica de interpretación de graficas funcionales, obteniendo como resultado agregar el proceso de interpretación a la estructura argumentativa. Por otra parte, en Romero et al. (2012), se da cuenta del desarrollo de la argumentación matemática de los estudiantes en un curso de 2° básico, en el estudio del campo aditivo, describiendo tres niveles de argumentación de los estudiantes; uno de los resultados más destacados es que la intervención del profesor hace que mejoren los niveles de argumentación de los estudiantes.

Si bien la mayoría de los trabajos se enfocan a estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, recientemente han aparecido investigaciones que han trasladado el foco a cómo el profesor entiende la el desarrollo de la argumentación. Goizueta & Planas (2013) estudian las interpretaciones sobre la argumentación en clase de matemáticas de un grupo de profesores. De los resultados se destaca la difícil distinción que hacen los profesores de la estructura argumentativa. En esta misma línea, han aparecido otros estudios que utilizan la estructura argumentativa de Toulmin para analizar las respuestas de profesores que se exponen a situaciones hipotéticas de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemáticas, (Freeman, 2005). En dichos estudios han encontrado diferentes tipos de garantías que da el profesor en sus argumentos, de índole didáctico, curricular, pedagógico y personal (Nardi, Biza & Zachariades, 2012).

Una manera de estudiar el desarrollo de la argumentación en el aula de matemáticas, es por medio del rol del profesor para que promueva la existencia de un espacio para la argumentación. Varios autores han puesto el foco en la importancia del espacio de comunicación y discusión en el aula de matemáticas (Chapin, O'Connor, & Anderson, 2009; Smith & Stein, 2011). Estos autores han estudiado movimientos discursivos del profesor, y el tipo de preguntas para una

discusión efectiva en el aula de matemáticas. En particular, tenemos especial interés en las acciones docentes para promover una comunicación en el aula, a lo que hemos llamado *estrategias comunicativas*. Para ello nos hemos basado en Lee (2010) quien señala diversas estrategias que puede utilizar el profesor para incluir a todos los estudiantes en el discurso matemático, entre ellas: hacer preguntas y desarrollar actividades que todos los alumnos consideren que merecen reflexión; fijar objetivos que dejen claro que el profesor espera que todo el mundo contribuya; que el profesor se asegure de que todos tengan la oportunidad de aportar algo en un conjunto de temas; y asegurar a sus alumnos que las respuestas equivocadas revelan errores que el profesor necesita aclarar. Otra estrategia tiene relación con el tipo de preguntas que hace el profesor para guiar el discurso matemático (Boerst, Sleep, Ball, & Bass, 2011; Ponte et al., 1997); los trabajos realizados señalan que una de las formas más importantes que tiene el profesor para orientar el discurso en clase es haciendo preguntas a los alumnos, de manera que, con ello el profesor puede detectar dificultades en el nivel de comprensión de los conceptos y de los procesos matemáticos. Las estrategias comunicativas señaladas nos parecen clave para analizar la gestión de la argumentación.

Metodología

La metodología que utilizaremos para el logro del objetivo se enmarca en un enfoque cualitativo interpretativo, orientado a describir, interpretar y entender el significado de los fenómenos sociales, intentando darles sentido desde el significado que las propias personas atribuyen a dichos fenómenos (Merriam, 1998; Bryman 2004). Esto nos permitirá entender, desde el discurso y la práctica de los profesores, los procesos de argumentación que emergen en el aula.

Para estudiar el desarrollo de la argumentación era necesario contar con un cuerpo de profesores que la promoviera en el aula, por lo que se seleccionó a diez profesores de enseñanza básica de establecimientos educacionales de la ciudad de Concepción para participar de un seminario de formación que ha tenido como propósito estudiar el desarrollo de la argumentación en el aula de matemáticas a través de la práctica de estrategias comunicativas.

El seminario se realizó bajo una Metodología de Trabajo Docente (MTD) (Solar et al., 2012; Solar & Rojas, 2012) cuyo objetivo se centra en que profesores en ejercicio estudien problemáticas en torno a la gestión del aula de matemáticas. La MTD forma parte de una secuencia de cuatro etapas de formación: Estudio de una temática matemática – didáctica específica; diseño de una secuencia de enseñanza o de una clase; implementación del diseño; y análisis y reflexión colectiva sobre las distintas experiencias vividas. En todos los pasos se promueve el desarrollo de la reflexión del profesor por medio del análisis de episodios, y aunque en la primera y segunda etapa se suelen usar episodios de clase de otros profesores, desde la tercera etapa se utilizan episodios de aula de los propios participantes, registrados en sus clases de forma paralela al seminario en las etapas anteriores.

Para analizar las condiciones que promueven la argumentación se han utilizado dos fuentes de datos: por una parte las clases de los profesores participantes del seminario, para indagar de qué manera se desarrolla la argumentación en el aula; y por otra parte, las sesiones del seminario para analizar las intervenciones de los profesores en relación a sus percepciones sobre el desarrollo de la argumentación en el aula de matemáticas.

Respecto a la primera fuente de datos, se realizó una observación no participante a ocho clases correspondientes a seis profesoras del seminario (a dos profesoras se le observaron dos

clases). Cada una de estas clases fue grabada de manera completa (90 minutos) y se aplicó una pauta de observación, previamente diseñada, centrada en los focos de la investigación: momentos de argumentación, y gestión de la argumentación por medio de estrategias de comunicación. Como criterio de reducción de datos, entendemos que la discusión en clases y la contraposición de ideas, son la base para que exista argumentación (Conner 2014); en particular, consideramos que debe existir una estructura de Toulmin que contemple como mínimo la presencia de: dato, garantía, refutación y conclusión en un proceso de argumentación. En cuatro de las ocho clases observadas se identificaron momentos argumentativos, los cuales fueron transcritos para su análisis que se centró en dos aspectos: identificación de momentos en que hubo argumentación, y caracterización de la estructura de Toulmin subyacente.

Respecto a la segunda fuente de datos, se seleccionaron sesiones representativas del seminario en que se analizaron: la percepción de los profesores de momentos de argumentación en la tarea de analizar un episodio de clase, y caracterización por parte de los profesores del seminario de la estructura de Toulmin en dichos momentos argumentativos.

Por otro lado, para analizar el rol del profesor en el desarrollo de la argumentación, se identifican las estrategias comunicativas que están presentes en las cuatro clases para así establecer relaciones entre la argumentación y comunicación. Para el proceso de identificación se ha diseñado un instrumento de estrategias comunicativas con acciones docentes (que actúan como indicadores). Para caracterizar las estrategias comunicativas nos hemos basado principalmente en la propuesta de Lee (2010). En cambio, las acciones docentes han sido especificadas por el equipo de formadores del seminario y compartida con los profesores, lo que ha tenido como consecuencia una continua revisión de estos indicadores. Una vez que se tuvo una primera versión del instrumento, fue validada por medio de un juez experto quien analizó los datos, logrando más de 70% de acuerdo en el chequeo cruzado, logrando así validar los indicadores según los criterios de Miles y Huberman (1994).

Para la conferencia, hemos elegido presentar el análisis de dos de los cuatro casos, dado que dichos ambos son un buen reflejo de los tipos de argumentación que se encuentran en los cuatro casos.

Análisis de datos

Los resultados de la investigación se han organizado en 5 temas: significado de la argumentación en la clase de matemáticas; existencia de argumentación en las clases observadas; estructura de la argumentación; rol del docente para promover el desarrollo de la argumentación; y finalmente, condiciones para el desarrollo de la argumentación en la clase de matemáticas, punto que viene a responder a la problemática planteada.

Significado de la argumentación

En el aula de matemáticas no es frecuente que encontremos discusiones en que aparezcan todos los procesos de la argumentación, por lo que hemos acordado que para que exista argumentación debe haber, por lo menos, cuatro procesos: datos, conclusión, garantía y refutación, siendo este cuarto proceso uno de los más relevantes porque da evidencia de posturas diferentes.

Uno de los primeros resultados que nos encontramos en la investigación, es la dificultad de los profesores para reconocer la argumentación en el aula de matemáticas. Este resultado se obtuvo en las primeras sesiones del seminario en el momento de exponer a los profesores a

episodios de aula registrados en video, en los que los alumnos daban garantía o explicaban sus conclusiones, pero no se presentaban refutaciones que daban cuenta de puntos de vista diferentes, es decir en los que no había argumentación, tal como lo habíamos estudiado en el seminario. Cuando a los profesores se les pregunta si hay argumentación, gran parte contesta que sí. Este hecho refleja la confusión que se puede dar entre explicar y argumentar ya que la explicación no requiere convencer a otro que tenga una postura contraria. Durante el proceso de formación en el seminario esta percepción en los profesores fue cambiando de manera paulatina, mediante las diferentes tareas que fueron experimentando: análisis de la práctica de otros, de sus pares y de la propia, al ensayar clases que promovieran la argumentación. Todas estas experiencias contribuyeron a mejorar el reconocimiento de la argumentación, lo que se evidenció en la última sesión del seminario en la que todos los profesores reconocieron episodios que mostraban la existencia de argumentación.

Existencia de argumentación en las clases observadas

Paralelamente al desarrollo del seminario, se fue a observar a varios profesores con la condición de que promovieran la argumentación en la clase. A los profesores no se les entregaron actividades ni indicaciones específicas para esa clase, sino que, a partir de lo que habían percibido hasta ese momento en los seminarios tenían que preparar una clase para promover la argumentación. Se observaron ocho clases, correspondiente a seis profesores (dos profesores han sido observados en dos oportunidades) y se seleccionaron las clases en base a la existencia de argumentación, es decir que se identifiquen los cuatro elementos: datos, conclusión, garantía y refutación; de las ocho clases, cuatro cumplieron íntegramente esta condición, en cambio las otras cuatro clases observadas cumplieron sólo tres procesos -dato, garantía y conclusión- pero no se presentaba la refutación. En particular, las primeras cinco clases que se grabaron fueron preponderantemente no argumentativas (solo se seleccionó una de ellas) mientras que las tres últimas clases observadas fueron seleccionadas como argumentativas. Esto nos lleva a un segundo resultado: en la medida que los profesores van profundizando en el estudio de la argumentación en el seminario, sus clases van siendo cada vez más argumentativas.

El desarrollo de la argumentación la ilustraremos en un curso de 7° básico (12-13 años) de un establecimiento educacional subvencionado de la ciudad de Concepción en Chile. La profesora del curso, Matilde, ha trabajado con el equipo de formadores en proyectos anteriores y antes del seminario ya tenía ciertos conocimientos sobre el desarrollo de la argumentación en el aula. La clase observada a dicha profesora tenía como intención promover la argumentación, pero sin contar con un diseño de clases especial para ello.

En el curso de 7° básico se está estudiando los números enteros y Matilde presenta el siguiente problema “Un número entero y su inverso distan en la recta 12 unidades ¿qué números son?”. Los números que está buscando Matilde que respondan los estudiantes son -6 y 6, para ello dibuja una recta numérica para situar los números; ella escucha que la respuesta genérica de los estudiantes corresponde a los números -12 y 12. La profesora en vez de tratar el error les hace leer nuevamente el problema y pregunta por el significado del término “distan”; varias de las respuestas de los alumnos le dan como significado la distancia entre 0 y un número, en vez de la distancia entre dos números cualquiera; ello puede explicar los valores dados de 12 y -12 que están a 12 unidades de distancia del 0 cada uno. Matilde por medio de varias acciones docentes y de la utilización de la recta numérica, sigue trabajando con los estudiantes el significado de distan, para contrastar la idea instalada de que la distancia se cuenta desde 0 hasta el número; entonces, emerge en uno de los estudiantes que el significado

de distan se asocia a la distancia entre dos números, y si se eligen -12 y 12, se debe contar la distancia entre ambos números, que no es 12 sino 24.

Matilde selecciona algunas de las respuestas para ponerlas en común para generar conflicto con la idea instalada de medir la distancia entre 0 y un número, y no pone en común sólo la respuesta de Martín quien señala que la distancia es entre -12 y 12 en vez de 0 y 12, sino que incentiva a que el resto del curso opine sobre su idea. Al obtener solo 3 respuestas, dirige una nueva pregunta a David respecto a que punto de referencia se mide la distancia, y este sigue sosteniendo que desde el 0 al igual que Roberto y Mario quienes lo apoyan. A continuación Matilde le da la palabra a Francisco quien es el primero en explicar por qué se mide la distancia desde -12 a 12, y asimismo refuta la idea instalada de 0 a 12. Matilde, más que validar la intervención de Francisco, le invita a seguir describiendo su idea para que el resto del curso la escuche; sigue habiendo alumnas, como Isabel, que continúan con la idea de que la distancia es entre 0 y 12, por lo que la profesora pide más opiniones y ante el silencio hace leer nuevamente el enunciado para dilucidar el significado de distan. A partir de su nueva lectura varios alumnos, entre ellos Roberto, señalan que los números tienen que distar 12 unidades, y no del 12 al otro, lo cual contribuye a comprender el enunciado que lo que busca es un número y su inverso cuya distancia es 12 unidades entre ellos. Esta aclaración permite que emerja la idea de Juan, quien dice que debe ser del 0 al 6 para que diste 12 unidades. En este momento, Matilde le incentiva a seguir repitiendo su idea, y Juan señala como respuesta que los números son -6 y 6. Matilde no valida la respuesta sino que sigue promoviendo que otros estudiantes opinen sobre este resultado, entre ellos Roberto quien no está de acuerdo con los números señalados y sigue sosteniendo que la respuesta es -12 y 12.

Otro caso interesante para mostrar el desarrollo del conflicto en la argumentación, es el curso de la profesora Mónica, que corresponde a una clase de 6^o básico de Geometría que tiene por objetivo: “Identificar rectas paralelas, perpendiculares y secantes en cuadriláteros”. Para el desarrollo de la argumentación, la profesora realiza, en una primera instancia, un momento de discusión para extraer conocimientos previos y, más tarde, una actividad basada en una guía de trabajo individual, en la cual los alumnos deben asociar distintas figuras según las similitudes que poseen. Una vez que Mónica se ha paseado por la sala para ver las diferentes respuestas de los alumnos, proyecta en la pizarra la guía que repartió entre los alumnos y hace pasar a Marcelo y a Fernanda a la pizarra para que marquen que figuras tienen las mismas características, y en una de las respuestas no coinciden: Fernanda no marcó un cuadrado como similar al tratarse de un cuadrado cuya base estaba en diagonal a la base de papel, a diferencia de Marcelo que sí lo marcó como similar a otro cuadrado de base horizontal a la hoja del papel. La profesora gestiona que se discutan los dos puntos de vista y Fernanda se convence que las dos figuras tienen las mismas características. La manera como se desarrolla la discusión tienen varios puntos que son interesante para el análisis: la profesora Mónica recoge la idea de Marcelo de girar la hoja como explicación para determinar que las dos figuras tienen las mismas características; ante ello, los alumnos se encuentran divididos en sus respuestas y algunos tienen dificultades para inclinarse por una de las dos posturas. En este momento, Mónica interviene para que se identifiquen las dos posturas de manera explícita y promueve que el resto del curso se posicione frente a las dos posturas; entre sus acciones propone que Fernanda gire su guía para verificar la idea de Marcelo de girar la hoja, y lo contraste con sus pares. Luego de un tiempo le pregunta a Fernanda si cambio su opinión; si bien Fernanda hace una explicación del movimiento, Mónica insiste en la pregunta hasta que Fernanda reconoce que sí cambio de opinión.

Estructura de la argumentación

Los cuatro casos en que apareció argumentación en el aula se analizaron en base a la estructura de Toulmin. La estructura más común ha sido la formada por cuatro procesos base de la argumentación: datos, conclusión, garantía y refutador. El caso de la clase de Matilde corresponde a esta estructura: el desarrollo de la pregunta, “cuál será la distancia entre -12 y 12”, genera una estructura argumentativa que mostraremos por medio del esquema de Toulmin. Para comprender como actúa este esquema se transcribe el episodio.

Matilde: Ya, ¿y qué distancia habría del -12, Daniel, al +12?

Alumnos: 24.

Alumno: No, 12 señorita.

Roberto: O sea no, sería 12.

Matilde: Tenemos...

Roberto: Porque del 0 se empieza a contar de nuevo.

Alumno: Sí.

Alumno: No.

Matilde: Ya, si de aquí hasta aquí tenemos una distancia de 12, ¿he llegado al inverso de -12? [Señala en la pizarra la distancia que hay de -12 hasta 0]

Alumnos: No.

Matilde: Miren, voy de -12 a su inverso, avanzo, ¿cuánto llevo hasta aquí? [Marcando el 0 en la recta numérica]

Alumnos: 12.

Matilde: Si sigo...

Javier: Es como multiplicarlo por 2 y sería 24.

Arturo: 24.

Matilde: ¿Cuánto avancé para llegar al inverso?

Alumnos: 24.

Matilde: ¿Cuál es la distancia de -12 hasta 12?

Alumnos: 24.

Matilde: Distan 24 unidades entre estos dos valores.

Alumnos: Sería del -6 al 6 entonces.

El esquema de Toulmin que corresponde a una argumentación colectiva (figura 2), comienza con el dato, que en este caso corresponde a la pregunta de la profesora Matilde. Luego vienen dos respuestas que actúan como conclusiones diferentes 24 y 12, pero para efectos de seguir el proceso argumentativo tomaremos como conclusión falsa el 12. Siguiendo la estrategia de análisis de Conner et al. (2014), en los cuadros se han puesto las intervenciones tanto de Matilde como de los alumnos que son parte de la estructura argumentativa; en cambio, en los globos se han puesto las intervenciones de Matilde que contribuye por medio de preguntas a que aparezca la refutación a la falsa conclusión y luego a la conclusión verdadera.

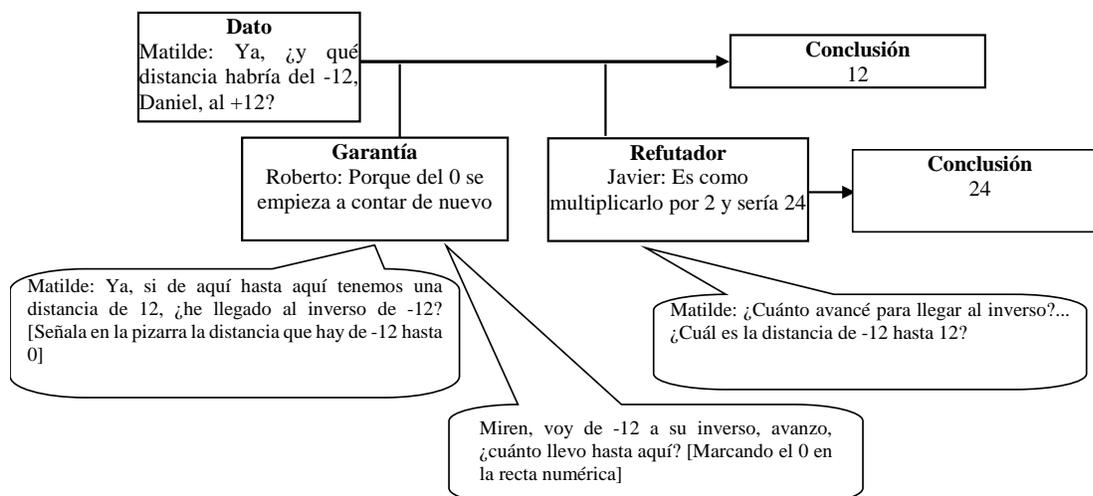


Figura 2. Mapa de la argumentación colectiva de la clase de Matilde según el modelo de Toulmin.

En las clase de Matilde aparecen diferentes momentos argumentativos, pero hemos escogido este momento como base de nuestro análisis, a partir de la estructura de Toulmin, porque la conclusión original es falsa y emerge la refutación por medio de las preguntas de Matilde. Si bien es la profesora quien comienza con el proceso de argumentación por medio del dato, son los propios alumnos los que van desarrollando la argumentación. Las dos preguntas seguidas que hace Matilde gatillan que Javier refute la garantía de Roberto; en ese sentido, se aprecia la importancia que tienen las intervenciones de la profesora para gestionar el error por medio de la indagación en el curso, en vez de adoptar una posición que consiste en validar las respuestas de los alumnos.

Si bien el caso descrito da cuenta de un adecuado momento de argumentación, este carece de lo que es el respaldo, es decir de un conocimiento que generalmente corresponde a una definición, propiedad o teorema que permita asegurar la garantía. En tres de los cuatro casos analizados podemos decir que la argumentación se comporta de la misma manera, es decir, se obtienen estructuras de argumentación de Toulmin con cuatro procesos: datos, conclusión, garantía y refutador, pero no emerge por parte de los estudiantes el respaldo a estas argumentaciones, o sea de afirmaciones que sean válidas para todos y que sostengan la argumentación.

A diferencia de las otras clases analizadas, En la clase de la profesora Mónica, se tiene la oportunidad para que emergiera el soporte de la garantía. Luego que Sofía se convence de que los dos cuadriláteros corresponden a un cuadrado, Bastián no está de acuerdo diciendo que cuando giro una de las figuras la otra que era un cuadrado deja de ser un cuadrado. Mónica hace que Josefa y Daniel pasen a la pizarra para que discutan esta idea con Bastián y con el resto del curso. En el episodio se aprecia el desarrollo de la discusión.

Daniel: Yo pienso que si ese cuadrado...si ese lo damos vuelta va a dar lo mismo que ese. Si lo seguimos dando vuelta, seguimos formando el cuadrado

Mónica: Ya

Bastián: No, pero si se...si se dobla la guía...el otro igual gira

Mónica: El otro...el otro...

Bastián: Si no tendríamos que tapar este y ver ese como un cuadrado, y (no se escucha bien)

Mónica: Ya, a ver Bastián

Bastián: Porque si lo dejo así, si lo dejo así (no se escucha)

Mónica: Ya, a ver ¿Escuchamos? Bastián dice...el que está al lado izquierdo, cuando lo gira él lo ve como un cuadrado, pero el que era cuadrado lo deja de ver como cuadrado. Entonces, si tapa el que era cuadrado, dice que ese es un cuadrado

Blanca: No tía, está loco

Mónica: Pero Blanca, espera. Él dice que es un cuadrado. Ahora, Daniel y la...

Bastián: Pero si...

Mónica: Pero sigue siendo un cuadrado según tú. Ya, siguen siendo diferentes, pero si lo giro es cuadrado, ¿si o no?

Bastián: Si

Mónica: Ya, ¿podemos escuchar, Romina, podemos escuchar a Daniel y la Josefa? Porque ellos van a explicar qué es lo que piensan

Josefa: Que si uno da vuelta la guía, emm...

Daniel: Va a quedar como cuadrado

Josefa: Si [Dibuja las figuras en la pizarra, la posición inicial y cómo quedaría al girarla]

Daniel: Si la seguimos dando vuelta va a quedar igual como estaba esa

Mónica: Pero explíquenles a ellos po chiquillos.

Blanca: Pero no...

Mónica: Pero Blanca escucha, porque hay que escuchar

Daniel: Que si este lo damos vuelta forma como un cuadrado, si lo seguimos dando vuelta igual vamos a tener un cuadrado

Josefa: Aunque se gire la figura va a seguir siendo un cuadrado

Mónica: Ya, eh...Blanca, pero espera un poco. Espera un poco porque o sino no vamos a...nos vamos a llegar a un acuerdo. La pregunta que les voy a hacer, si yo tengo una figura y la empiezo a girar... ¿pueden tomar atención por fa?...y la empiezo a girar, ¿esa figura va a ser otra figura?

Alumnos: No

Mónica: ¿O va a seguir siendo la misma figura?

Alumnos: Va a seguir siendo la misma

El esquema de Toulmin que corresponde a una argumentación colectiva (figura 3), se sostiene en un dato que es implícito en la discusión “¿Las dos figuras, ¿son un cuadrado?”. Siguiendo a Conner et al. (2014), hemos puesto el dato en un cuadro con una línea entrecortada para diferenciarlo del resto de procesos argumentativos. La primera conclusión emerge de manera implícita de la garantía de Bastián de que al girar el cuadrado izquierdo, el derecho deja de verlo como cuadrado. Daniel refuta la idea de Bastián diciendo que el cuadrado al girarlo no deja de ser cuadrado y Josefa se sostiene de esa idea para llegar a esa conclusión.

Las intervenciones de Mónica que se han marcado en los globos han promovido que se generara la argumentación colectiva, la intervención de Mónica “Pero sigue siendo un cuadrado según tú” pretende elicitarse ante el curso la idea de Bruno. La siguiente intervención de Mónica genera el espacio para que exista la contraposición de ideas; en particular la pregunta que hace Mónica “si yo tengo una figura y la empiezo a girar... ¿esa figura va a ser otra figura?” después de la intervención de Daniel y Josefa es un camino hacia el respaldo, Mónica hace un cambio relevante al preguntar si cualquier figura va a seguir siendo la misma si se gira en vez de centrarse solo en el cuadrado. No obstante no lo clasificamos como respaldo porque no se conecta con los movimientos rígidos – no emergió la rotación como concepto- ni tampoco es una idea que fue desarrollado por los propios alumnos. La profesora no propone acciones para que

realmente se instalara el respaldo de la argumentación colectiva siendo que se había dado la oportunidad propicia para que así fuese.

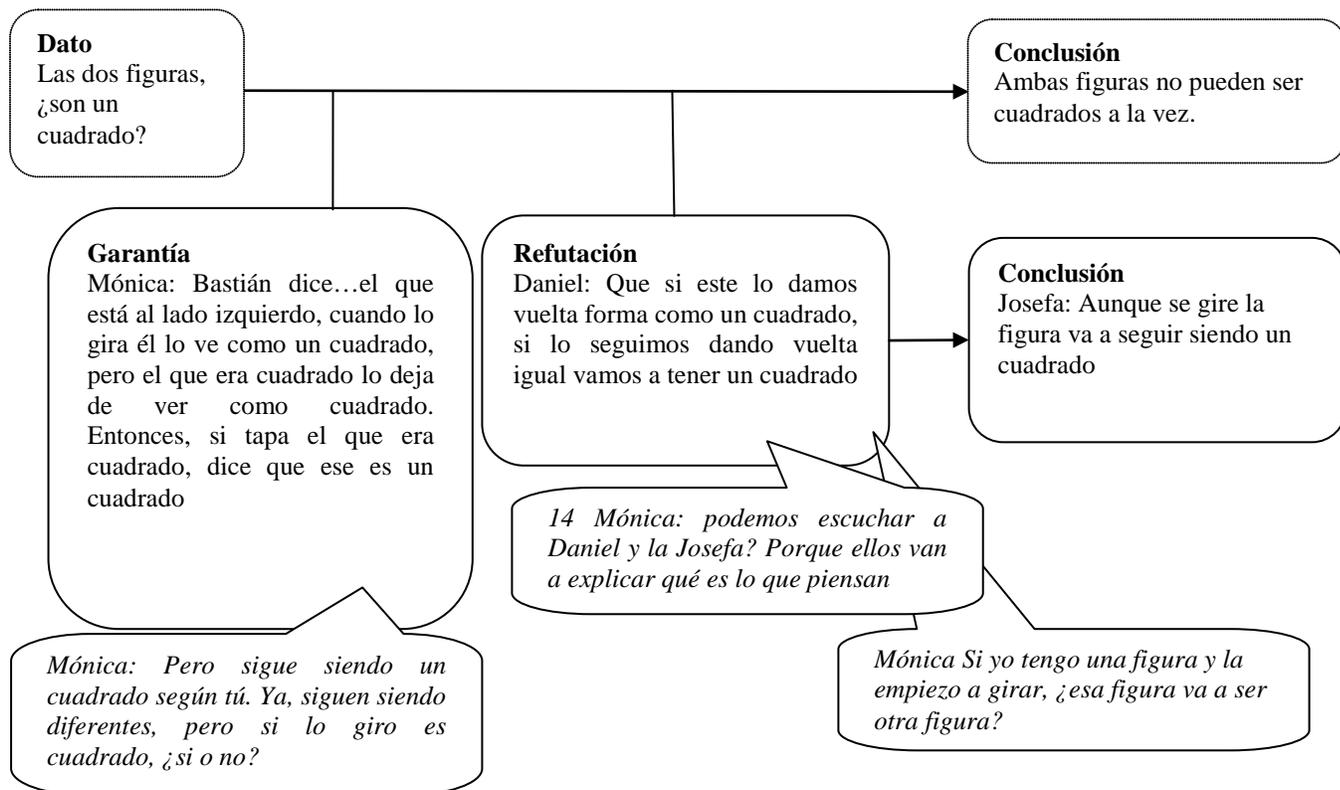


Figura 3. Mapa de la argumentación colectiva de la clase de Mónica según el modelo de Toulmin.

A manera de síntesis de estos análisis, es que en las clases que hay argumentación generalmente se constituyen por una sola estructura constituida por los cuatro procesos de argumentación ya mencionados: dato, garantía, refutación y conclusión.

Rol del docente para promover el desarrollo de la argumentación

Una manera de estudiar la gestión de la argumentación, es por medio de las estrategias comunicativas (Ponte et al., 1997; Chapin et al., 2009; Lee, 2010; Smith & Stein, 2011; Boerst et al., 2011), las que nos parecen clave para analizar la gestión de la argumentación. Por ello hemos diseñado un instrumento de análisis en que se ha definido ocho estrategias comunicativas, se analizaron las cuatro clases seleccionadas en que aparece la argumentación, la manera de aplicar el instrumento de estrategias comunicativas ha sido identificar el logro de cada indicador mediante cuatro niveles (destacado, observado, no se puede observar, se observa negativamente) registrando la cita del diálogo o comentario que permita dar evidencia del indicador. En base a la calidad y cantidad de indicadores por estrategias, se determina que indicadores y estrategias eran las preponderantes en los episodios. En la tabla 1 se aprecia un extracto del instrumento para las estrategias comunicativas oportunidades de participación aplicado a la clase de Mónica.

Se analizaron las cuatro clases con este instrumento, y se observó que hay tres estrategias que se van repitiendo y que están impactando en el desarrollo de la argumentación: oportunidades de participación, gestión del error y tipo de preguntas. En la tabla 2 se presentan

los indicadores que aparecen en la clase de Matilde y Mónica en cada una de estas tres estrategias comunicativas.

Tabla 1

Extracto Análisis de clase de Mónica de las estrategias comunicativas

Estrategias	ACCIÓN DOCENTE	Nivel de logro	Evidencia o comentario (identificar las que no son observables)
Asegurar que todos tengan la oportunidad de aportar	Incluir, en las actividades, preguntas que favorezcan la descripción y explicación de procedimientos e ideas.	Destacado	A medida que se presenta o se desarrolla la actividad, la profesora realiza preguntas como: - ¿Todos los lados en todas son iguales? - ¿Tú estás de acuerdo con que esos dos son iguales? - ¿Nos puede decir por qué usted no marcó igual que la Francisca?
	No validar las respuestas de los alumnos antes de la socialización de algunas respuestas y de las explicaciones de las técnicas, ni en la pizarra, ni puesto por puesto.	Destacado	La profesora no valida las respuestas que otorgan los alumnos, sino que pregunta a los mismos compañeros si están o no de acuerdo con ello y la explicación planteada. <i>P: ¿Nos puede decir por qué usted no marcó igual que la Francisca? Pero díganos a todos para que escuchemos</i> <i>Michael: Porque si nosotros giramos esto derecho, quedaría igual como este [Señala un cuadrado que se encuentra apoyado en un vértice y el otro que se apoya en una arista]</i> <i>P: Si ese lo giramos quedaría igual como ese ¿Puede girar su guía y mirar? Si lo giran, ¿queda igual que el otro o no?</i> <i>Alumnos: Si</i> <i>P: ¿Si o no?</i>

Oportunidades de participación: Esta estrategia tiene relación con asegurar que todos tengan la oportunidad de aportar. En el caso de Matilde el primer indicador destacado está asociado a no validar, y es una acción docente que está presente en Matilde a lo largo de toda su práctica en la clase, y que podemos evidenciar de manera particular en el inicio del episodio en las preguntas que hace Matilde para promover la refutación, en vez de valorar las respuesta errónea de Roberto 12 y quedarse con la respuesta inicial que dan algunos alumnos de 24 antes de que aparezca la explicación de Roberto que hace de garantía. El segundo indicador destacado está asociado la flexibilidad que tienen los alumnos para intervenir en la discusión, el cual también se aprecia a lo largo de toda la clase, y en particular en que hay diferentes alumnos que intervienen y Matilde tiene la particularidad de ir relevando intervenciones clave, tales como la de Francisco, y da el espacio a alumnos como Isabel.

En el caso de Mónica el primer indicador destacado es de incluir actividades o preguntas que favorezcan la explicación de ideas, se puede apreciar de la tabla 1 que Mónica hace preguntas que promueven la elicitación del pensamiento de los estudiantes. El segundo indicador destacado es de no validar las respuestas, de la tabla 1 se aprecia que Mónica no valida las intervenciones de los alumnos, sino que les pregunta a los compañeros si están de acuerdo con ello. El tercer indicador destacado en Mónica es de no invalidar los errores, en los episodios mostrados se puede observar que la profesora en ningún momento invalida los errores que aparecen sobre si el cuadrilátero girado es un cuadrado o no, sino que son los propios alumnos que argumentan que ambos son un cuadrado. El hecho que se repita en ambas profesoras el indicador de no validar las respuestas de los alumnos antes de la socialización de las respuestas no es una casualidad, en los otros casos también se aprecia que es un indicador clave para las oportunidades de participación.

Gestión del error: Esta estrategia tiene relación con asegurar a los estudiantes que sus ideas/respuestas equivocadas son importantes para construir el conocimiento matemático. En la gestión de Matilde: ambos indicadores destacados están muy presentes en el episodio de la clase de Matilde, y podemos señalar que son estas acciones docentes asociadas al error las que permiten que se genere la discusión entre los dos respuestas (12 y 24) y el proceso argumentativo descrito.

En el caso de la clase de Mónica, se destacan otros dos indicadores los que se aprecian en el episodio descrito de la clase de Mónica cuando se genera el contraste de ideas entre Daniel y Josefa por una parte que salen a exponer a la pizarra sus ideas, y Bastián desde su asiento que defiende la idea errónea que al girar una de las figuras deja ser un cuadrado.

Tipo de preguntas: Esta estrategia pone el foco en la formulación de preguntas adecuadas por parte del docente. Los cuatro indicadores que aparecen en la tabla 2 son destacados tanto en la clase de Matilde como de Mónica y tienen foco en preguntas que: favorezcan la explicación, evitar que sean retóricas, contra-preguntas, y no cambiar el foco. Varias de las preguntas que responden a estos indicadores aparecen señaladas en la estructura argumentativa de Toulmin porque contribuyen a promover la argumentación en los estudiantes. Como resultados de este análisis podemos agregar que: si bien las preguntas del profesor siempre son importantes, hay un tipo de preguntas que favorecen especialmente el desarrollo de argumentación, en especial queremos destacar de la tabla 2 el indicador asociado a preguntas que no cambien de foco muy rápidamente, ya que las interacciones tanto de Matilde como de Mónica que hemos asociado a esta pregunta han sido cruciales para que se genere los dos puntos de vista, que es base para que exista argumentación. Por tanto sin la presencia de estas preguntas se complica que aparezcan por los propios alumnos procesos argumentativos con garantías y refutaciones.

Tabla 2

Estrategias de participación en las clases de Matilde y Mónica

Matilde	Mónica
Oportunidades de participación	
<p>No validar las respuestas de los alumnos antes de la socialización de algunas respuestas y de las explicaciones de las técnicas, ni en la pizarra, ni puesto por puesto.</p> <p>Gestionar con flexibilidad el hecho que los alumnos puedan interrumpir al profesor.</p>	<p>Incluir, en las actividades, preguntas que favorezcan la descripción y explicación de procedimientos e ideas.</p> <p>No validar las respuestas de los alumnos antes de la socialización de algunas respuestas y de las explicaciones de las técnicas, ni en la pizarra, ni puesto por puesto.</p> <p>No invalidar los errores; en su socialización de los errores, retomar al niño/a que originó la discusión, y pedir su opinión sobre lo planteado por sus compañeros.</p>
Gestión del error	
<p>Gestionar el error socializando de manera colectiva los conocimientos matemáticos que van mejorando la respuesta inicial.</p> <p>No revisar en forma anticipada los errores, sino hasta después que los alumnos se han dado cuenta del error.</p>	<p>Promover que alumnos con respuestas correctas e incorrectas salgan a exponer, sin validar antes la calidad de éstas.</p> <p>Gestionar el error, con foco en las explicaciones incorrectas, y no en las respuestas incorrectas</p>
Tipo de preguntas	
<p>Realizar preguntas que favorezcan la explicación por sobre un sí o no.</p> <p>No hacer preguntas retóricas, es decir hacer la pregunta y responder inmediatamente.</p> <p>Realizar contra-preguntas a los estudiantes a partir de las respuestas dadas por ellos.</p> <p>Plantear preguntas que no cambien de un foco a otro muy rápidamente; tratar que las preguntas promuevan que las ideas evolucionen.</p>	

Las tres estrategias comunicativas descritas son especialmente relevantes para gestionar la argumentación, en particular vemos que el tipo de preguntas ha sido especialmente importante para la gestión especializada de la argumentación, en cambio las otras dos sirven de apoyo para que se dé la argumentación. Sin participación es difícil que aparezca argumentación, y la gestión del error promueve la contraposición de ideas.

Las estrategias comunicativas por si solas no aseguran que se promueva eficazmente la argumentación, una de las últimas clases que se observó fue la clase de Karina quien despliega varias estrategias comunicativas y si bien ella intenta promover la argumentación, consiguiéndolo en un momento puntual de la clase, la mayoría de las veces no ocurre ya que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de la tarea matemática. En vista de eso nos dimos cuenta que es necesario que el docente pueda planificar la clase, cautelando que se den las condiciones para un adecuado desarrollo de la argumentación, por lo que decidimos conducir las últimas cinco sesiones del seminario a diseñar dos clases para promover la argumentación. Para ello hemos diseñado un plan de clases con espacios específicos para que el docente anticipe los procesos argumentativos de los estudiantes y describa el tipo de acciones y preguntas que

hará para promover dichos procesos argumentativos, por ejemplo la refutación. En la tabla 3 se describen las dimensiones del diseño de una clase para promover la argumentación.

Tabla 3.

Diseño de una clase para promover la argumentación

Tarea matemática	
<actividad que se realizará en la clase, se identifican las preguntas que se realizarán a los estudiantes >	
Gestión de la Tarea matemática	Respuestas o Procedimientos o Posturas Esperadas
<describir los pasos e intervenciones del profesor de la tarea matemática que conducen hacia el conflicto>	<anticipar las intervenciones de los estudiantes en relación a Respuestas o Procedimientos o Posturas Esperadas>
Gestión de la confrontación de posturas	
<hacer preguntas para gestionar el conflicto, por ejemplo que inviten a que existan más de una postura, que emerjan refutaciones, e intervenciones que desarrollen el ponerse de acuerdo. Además se pueden anticipar las intervenciones de los alumnos en relación a la estructura de Toulmin (dato, garantía, conclusión etc.) >	

La tarea matemática es una dimensión que es habitual en el diseño de una clase. Si bien la dimensión gestión de la tarea matemática también es una dimensión que puede ser habitual, en este modelo se pone el acento en que docente conduce la discusión de la clase hacia al conflicto. Del mismo modo la respuestas esperadas de los estudiantes, también es una dimensión esperable en el diseño de una clase, pero aquí se hace hincapié en que se expongan también las posturas esperadas. Finalmente la dimensión "Gestión de la confrontación de posturas" no es nada habitual en un diseño de una clase, y es la dimensión más relevante en este modelo, aquí se puede anticipar las posibles estructuras de Toulmin que se darían y también las intervenciones del docente que promueven los procesos de la argumentación.

Si bien los casos descritos no planificaron sus clases con este modelo, las clases que hemos analizado tenían distintos niveles de acercamiento a este modelo de diseño de clases. En el caso de Matilde, la tarea matemática estaba planificada, pero no así su gestión ni tampoco las respuestas de los estudiantes, de modo que la discusión y la argumentación emergió de manera contingente. En el caso de Mónica, en una entrevista posterior a la clase, ella señaló que esperaba respuestas distintas de los estudiantes respecto a si ambas figuras eran un cuadrado o no, y tenía planificado la gestión de la tarea matemática que conducía el conflicto, pero no así la gestión de la confrontación de posturas. En las sesiones finales de seminario los profesores diseñaron una o dos clases con este modelo, los resultados de esas clases están todavía en análisis y serán parte de otro manuscrito.

Condiciones para promover la argumentación en la clase de matemáticas

En base a los puntos anteriores, en este punto podemos desarrollar la pregunta de la investigación que tiene relación con las condiciones para promover la argumentación en la clase de matemáticas. Una primera condición, expuesta en el punto anterior, corresponde a las estrategias comunicativas; un docente con dominio de ellas promueve la argumentación en clases de matemáticas. De las ocho estrategias comunicativas, las tres ya nombradas: *oportunidades de*

participación; *gestión del error* y *tipo de preguntas*, son las más significativas para su desarrollo. En las clases analizadas si bien aparecen diferentes indicadores relevantes en cada una de las tres estrategias, hay algunos indicadores que se repiten en estas clases: en la estrategia *oportunidades de participación* el indicador relevante que generalmente aparece es “No validar las respuestas de los alumnos antes de la socialización de algunas respuestas”; para *gestión del error* aparecen dos indicadores relevantes: “Gestionar el error socializando de manera colectiva los conocimientos matemáticos”, “No revisar en forma anticipada los errores, sino hasta después que los alumnos se han dado cuenta del error”; y finalmente en la estrategia *tipo de preguntas* se identifican tres indicadores recurrentes: Realizar actividades con preguntas que favorezcan la explicación por sobre un sí o no; “Realizar contra-preguntas a los estudiantes a partir de las respuestas dadas por ellos” y “Plantear preguntas que no cambien de un foco a otro muy rápidamente”. De todas las clases analizadas podemos decir que al no observarse estos indicadores había más dificultades para que se diera la argumentación en la clase, y si bien no tenemos observaciones de clases en que estos indicadores se observarán de forma negativa posiblemente dificultarían más aun la existencia de argumentación en el aula de matemáticas.

Una segunda condición tiene relación con las características de las tareas matemáticas que se plantean en clases. Tareas cerradas, que permiten una sola respuesta correcta y que prevengan la aplicación de un algoritmo estándar, no generan las condiciones para que exista un debate en los estudiantes, en cambio tareas abiertas que no necesariamente hay un único resultado correcto o que su desarrollo requiere de un acercamiento con estrategias informales de resolución, promueve en que existen diferentes puntos de vista. Si bien existe una nutrida literatura que ha puesto en evidencia la importancia de utilizar diferentes tipos de tareas matemáticas en clases (desafíos, resolución de problemas, abiertas, de investigación, metodología de proyectos, etc.), el tipo de docentes con que solemos trabajar suelen utilizar tareas matemáticas cerradas y no les son familiares otro tipo de tareas. En las últimas sesiones del seminario de formación en que se ha estado trabajando en el diseño de clases en que se promueva la argumentación, uno de los aspectos que se les ha hecho más difícil a los profesores es la elección de una tarea matemática no cerrada. En efecto, ha habido casos en que el equipo de formadores sugiere a una profesora una tarea abierta, pero ella la modifica para que finalmente sea cerrada. Un caso particular tiene que ver con cambiar las condiciones de la tarea. En unas de las primeras clases que fuimos a observar, la profesora Bernardita utilizó una actividad que tenía como propósito que los alumnos estimaran el valor de varios pagos, la cual tenía como consecuencia que pudieran haber tanto diferentes procedimientos como resultados. En cambio la profesora Bernardita cambio las condiciones de la tarea teniendo como consecuencia que todos los estudiantes deberían llegar al mismo valor estimado en los pagos, disminuyendo notoriamente las posibilidades de que hubiera dos puntos de vista. Cuando expusimos el episodio de la clase en el seminario con la tarea matemática original, ningún profesor se percató del cambio en las condiciones de la tarea, entre ellas estaba Bernardita, y fueron los propios formadores los que tuvieron que hacerles ver a los docentes la importancia de respetar las condiciones de la tarea matemática.

Una tercera condición tiene relación con una planificación de clase que promueva la argumentación. No solo basta con una tarea matemática abierta sino con una gestión del docente sobre dicha tarea que conduzca hasta el conflicto, y cuando éste se genera, el docente intervenga mediante acciones y preguntas para que se desarrolle la argumentación. Esto lo pudimos apreciar en la última clase observada en que la profesora Mónica gestionó la clase para que hubieran dos puntos de vista; en que ella planificó los conflictos entre los estudiantes que emergieron.

El plan de clases debe contemplar no solo la anticipación de las respuestas, procedimientos o posturas de los estudiantes sino también la anticipación de los procesos argumentativos de los estudiantes; y como rol del docente, debe tener el tipo de acciones y preguntas para promover dichos procesos argumentativos, por ejemplo la refutación.

En el esquema de la figura 4 se caracterizan las tres condiciones que hemos desarrollado con los respectivos indicadores. Estas tres condiciones para promover la argumentación se han elaborado con los datos que hemos analizado a la fecha, por lo que pueden tener modificaciones en la medida que vamos analizando más casos.



Figura 4. Condiciones para promover la argumentación en el aula de matemáticas

Conclusiones

Finalmente queremos destacar que un proceso de formación con profesores para promover la argumentación requiere de un tiempo considerable, y no es viable en un formato de capacitación de corto plazo, ya que para muchos profesores requiere romper barreras que solo es posible con un análisis de la práctica más que de la teoría. En este sentido la Metodología de Trabajo Docente (MTD) como modelo para el seminario ha resultado una plataforma adecuada para modificar de forma articulada las prácticas y concepciones de los profesores sobre el propósito de la actividad matemática escolar con sus estudiantes, encaminada más el desarrollo de competencias que de la adquisición de contenidos.

Referencias y bibliografía

- Boerst, T., Sleep, L., Ball, D. L., & Bass, H. (2011). Preparing teachers to lead mathematics discussions. *Teachers College Records*, 113(12), 2844–2877.
- Bryman, A. (2004). *Social Research Methods*. Second Edition. Oxford: Oxford University Press.
- Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N.C. (2009). *Classroom Discussions: Using Math Talk to Help Students Learn*. Math Solutions.
- Conner, A. M., Singletary, L., Smith, R. C., Wagner, P. A. & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 401-401.

- Freeman, J. B. (2005). Systematizing Toulmin's warrants: An epistemic approach. *Argumentation*, 19(3), 331–346.
- Goizueta, M. & Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(1), 61-78.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata.
- Mineduc (2012). *Bases curriculares 2012. Matemática Educación Básica*. Chile: autor.
- Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook* (2ª ed.). Thousand Oaks: Sage Publication.
- Nardi, E; Biza, I & Zachariades, T. (2012). 'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 157–173.
- OCDE. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*: OECD Publishing.
- Ponte, J., Boavida, A., Graça, M. y Abrantes, P. (1997). Funcionamiento de la clase de matemáticas. *Didáctica da matemática*, (pp. 71-95). Lisboa, Portugal: Ministerio de Educação. Recuperado de: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_sp.htm
- Romero, S, Roquefort, A. M. & Solar, H. (2012). La argumentación matemática en los estudiantes de 2º básico en el campo aditivo. Un estudio de caso. *RECHIEM: Revista Chilena de Educación Matemática*, 6(1) 229-247.
- Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. EEUU: NCTM.
- Solar, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Solar, H.; Gómez, B.; Rojas, F. & Coronado, A. (2014). Propuesta de un Modelo de Competencia Matemática como articulador entre el currículum, la formación de profesores y el aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática*, 26(2), 33-67.
- Solar, H., Azcárate, C. & Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 133-154.
- Solar, H., Rojas, F., Ortiz, A. & Ulloa, R. (2012). Reflexión docente y competencias matemáticas: un modelo de trabajo con docentes. *RECHIEM: Revista Chilena de Educación Matemática*, 6(1) 257-267.
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.