Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Uldarico **Malaspina** Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
Perú
umalasp@pucp.pe

Resumen

En la conferencia expondremos reflexiones y experiencias didácticas sobre la creación de problemas como parte de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de la investigación en educación matemática. ¿Por qué aprender y enseñar matemáticas resolviendo solo problemas que otros crearon? Examinar y resolver problemas creados individual o grupalmente dinamiza y potencia los procesos de enseñanza y aprendizaje y estimula el desarrollo del pensamiento matemático. Explicaremos nuestra estrategia para estimular el desarrollo de la capacidad de crear problemas en los profesores de matemáticas, aplicada en talleres con profesores en formación y en ejercicio con temas de geometría, teoría de números, álgebra, análisis y optimización.

Palabras clave: Resolución de problemas, creación de problemas, pensamiento matemático, competencias didácticas, competencias matemáticas.

Introducción

Algunas investigaciones sobre resolución de problemas y su estrecha vinculación con los procesos de creación de problemas han conducido a nuevas investigaciones sobre las ventajas de incorporar la creación de problemas en programas de formación de profesores, tanto en la formación inicial como en la formación continua (Ellerton, 2013; Tichá and Hošpesová, 2013; Malaspina, Gaita, Flores & Font, 2012; Malaspina, 2013a). Estamos totalmente de acuerdo con Ellerton (2013) cuando ella afirma que: "For too long, successful problem solving has been lauded as the goal; the time has come for problem posing to be given a prominent but natural place in mathematics curricula and classrooms” [1](pp. 100-101). Consideramos esencial que los profesoresdesarrollen su capacidad de crear problemas, pues así podrán no solo crearlos para proponer a sus alumnos problemas que respondan a la realidad y las motivaciones de ellos, sino que podrán también estimular a que sus alumnos aprendan creando, resolviendo y reflexionandoproblemas creados por ellos mismos.

Como hemos mencionado en artículos anteriores (Malaspina , 2013a, 2013b),consideramos quese crean problemas de matemáticaspor *variación* de un problema dado opor *elaboración* de un problema, ya sea ante una situación concreta o porun pedido específico, de carácter matemático o didáctico.Por nuestras experiencias didácticas desarrolladas con profesores en formación y en ejercicio, consideramos que una buena manera de iniciarse en la creación de problemas es haciéndolo por variación de problemas dados y en esta línea de pensamiento, hemos diseñado y experimentado una estrategia de cinco fases, con el propósito de desarrollar en los futuros profesores y en los profesores en servicio, capacidades de creación de problemas de matemáticas mediante variación de problemas dados y así contribuir al desarrollo de sus competencias didácticas y matemáticas y fortalecer la interrelación entre la creación y la resolución de problemas (Malaspina, Mallart, & Font, 2014).

Aprendizaje y creación de problemas

La creación de problemas debe formar parte esencial en los procesos de aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos. Reconocidos investigadores se han manifestado en este sentido (Kilpatrick, 1987; NCTM, 1991; Singer and Voica, 2013). A la afirmación de Ellerton (2013) mencionada en la introducción, nos parece pertinente añadir una cita textual de Bonotto (2013):

> “The problem-posing process represents one of the forms of authentic mathematical inquiry which, if suitably implemented in classroom activities, has the potential to reach well beyond the limitations of word problems, at least as they are typically used. We believe that at school it is important to use different types of school activities in order to promote the different potentials of students and to stimulate greater mental flexibility. Therefore problem posing is just one of the possible ways to achieve these broader goals”. (p 53).

Por otra parte, consideramos que en varios enfoques didácticos contemporáneos está implícito este punto de vista, en relación a la creación de problemas.

Brousseau (1986), en su teoría de situaciones didácticas, nos dice que aprender un conocimiento es *reconstruirlo*y que el objeto final del aprendizaje es que el alumno pueda *hacer funcionar el saber en situaciones en las que el profesor no está presente.* Ciertamente, crear problemas forma parte de la reconstrucción de conocimientos y permite ir más allá de la resolución de problemas entregados por el profesor o contenidos en un texto.

Chevallard, Bosch y Gascón (2005), en la teoría antropológica de lo didáctico, nos dicen que enseñar y aprender matemáticas corresponde a la actividad de *reconstruir organizaciones matemáticas* para poderlas *utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones*.En ese

[1]Durante demasiado tiempo, la resolución exitosa de problemas se ha alabado como la meta; ha llegado el momento de dar a la creación de problemas un lugar prominente pero natural en los planes de estudio y en las clases de matemáticas. (Traducción personal.)

sentido, crear problemas forma parte de la reconstrucción de organizaciones matemáticas, en las que se consideran tipos de problemas y a éstos como parte del “saber-hacer” matemático.

En la afirmación que hacen Font, Planas y Godino (2010), en el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (de lectura y producción de textos) y, sobre todo, una práctica discursiva (de reflexión sobre la práctica operativa) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto, encontramos que implícitamente consideran la creación de problemas como parte de la práctica operativa y discursiva, pues la creación de problemas conlleva la producción de textos y la reflexión sobre la práctica operativa, al hacer variaciones a problemas trabajados o elaborar nuevos problemas a partir de situaciones concretas.

Así, consideramos que el proceso de aprendizaje de las matemáticas debe ser dinamizado con secuencias de problemas;soluciones o aproximaciones a las soluciones de los problemas;preguntas y respuestas;conjeturas, demostración, refutación y afinamiento de conjeturas; identificación de problemas; creación de problemas; soluciones o aproximaciones a las soluciones de los problemas creados; variaciones de los problemas creados; y comprensión – con una mirada global – de lo resuelto, de lo conjeturado, de los métodos usados y del contexto matemático.En esta dinamización – no necesariamente lineal – juega papel muy importante el profesor, que obviamente requiere tener competencias matemáticas y didácticas para estimular a los alumnos en cada etapa; en particular en lo que se refiere a creación de problemas, que es un aspecto en el que usualmente se pone poco énfasis en todos los niveles educativos. No se tiene en cuenta la estrecha relación que hay entre los aspectos formativos de la creación de problemas y algunos desafíos fundamentales que los ciudadanos, técnicos y profesionales tenemos que afrontar en la vida cotidiana, como identificar problemas, plantear(se) las preguntas adecuadas, seleccionar convenientemente la información, hacer propuestas innovadoras, buscar soluciones óptimas y replantear los problemas (Malaspina, 2013a).

Una estrategia para estimular el desarrollo de competencias docentes mediante la creación de problemas

Muchas de las tareas que se proponen para desarrollar y evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes se basan en problemas de matemáticas. Esta es una razón más para que los profesores no solo sean buenos resolviendo problemas, sino que tengan capacidades de seleccionarlos, modificarlos y crearlos con propósitos didácticos.

Los profesores requieren también evaluar críticamente la calidad de una actividad matemática en torno a la solución de un problema propuesto y tener la capacidad de modificarlo adecuadamente para posibilitar actividades matemáticas más enriquecedoras.

De acuerdo con Giménez, Font y Vanegas (2013) y con Rubio (2012), entendemos la competencia de análisis didáctico como la habilidad de diseñar, aplicar y evaluar secuencias de aprendizaje usando herramientas de análisis didáctico y criterios de calidad. En la formación de profesores, esta competencia debe desarrollarse mediante la propuesta de tareas, a los futuros profesores y a los que están en servicio, que requieran de ellos el ejercicio del análisis didáctico. Una de tales tareas es crear problemas y examinarlos didácticamente.

Con el propósito de brindar ocasiones de trabajo y reflexión individual y grupal en la creación de problemas de matemáticas, partiendo de un problema dado, diseñamos la estrategia que describimos a continuación, en cinco fases, a desarrollarse en talleres de creación de problemas:

Fase 1: Información básica

Una presentación breve sobre lo que significa creación de problemas, considerando que los problemas tienen cuatro elementos básicos: *Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático* (Malaspina, 2013a, Malaspina & Vallejo, 2014) y que puede crearse un nuevo problema, a partir de un problema dado, modificando creativamente uno o más de estos elementos.Se muestra algunos ejemplos de problemas creados por profesores – en formación o en ejercicio – en talleres anteriores. Se enfatiza la importancia de crear problemas que favorezcan el aprendizaje y el pensamiento matemático. Se hace notar que una vez desarrollada esta capacidad, cada profesor puede crear problemas específicos para un nivel académico concreto y de acuerdo a lo que se proponga estimular o desarrollar en sus clases.

Fase 2: Un episodio en clase

Se presenta a los participantes del taller un problema previamente elaborado, en el marco de un episodio muy concreto en la clase de un Profesor P. En este episodio se describen brevemente algunas reacciones de algunos alumnos del Profesor P al resolver el problema dado.

Fase 3: “Problemas Pre” y “Problemas Pos”

Se pide a los participantes que:

i) Resuelvan el problema dado;

ii) Propongan problemas modificando el problema dado, de modo que su solución facilite la solución de tal problema y ayude a los estudiantes a clarificar sus reacciones al resolverlo o intentar resolverlo. Estos problemas los denominamos “Problemas Pre”;

iii) Propongan problemas modificando el problema dado, de modo que sean más retadores; que desafíen a los estudiantes del Profesor P más allá de la obtención de una solución correcta del problema del episodio. Estos problemas los denominamos “Problemas pos”.

Fase 4: Trabajos individuales y grupales sobre creación de problemas

La creación de los problemas pedidos en la fase anterior debellevarse a cabo primero individualmente y luego en grupos de dos o tres participantes. El conductor del taller ayuda con orientaciones y aclaración de ideas. El problema creado por un grupo debe ser resuelto por el grupo autor y luego por otro grupo, conociendo solo el enunciado del problema creado. Los grupos reciben hojas especialmente diseñadas, en las que, además, se deben escribir críticas constructivas al problema creado por otro grupo.

Fase 5: Socialización con todos los participantes

Los participantes comparten con todos, en exposiciones breves – voluntarias o al azar – las razones didácticas y matemáticas tras el problema creado, ya sea en forma individual o grupal.

También, el problema resuelto por un grupo – que no es el grupo autor de tal problema – expone su solución y hace sus comentarios críticos desde el punto de vista matemático y didáctico.

El propósito es que la discusión con los autores de los problemas, así como los comentarios de los participantes y del instructor, contribuyan a mejorar la capacidad de crear problemas con potencialidades matemáticas y didácticas.

Ejemplo

A continuación damos el episodio con el cual desarrollamos una sesión de un taller sobre creación de problemas, con profesores de educación secundaria:

En el grupo de estudios de matemáticas, el profesor propone el siguiente problema a los alumnos:

En la bodega A, venden paquetes de 6 vasitos de yogur por S/. 8,00y cada vasito individual a S/. 1,50; pero en la bodega B, venden el mismo producto en paquetes de 3 vasitos por S/.4,00 y cada vasito individual aS/. 1,60. ¿Hay una sola forma de comprar 9 vasitos de yogur gastando lo menos posible? ¿Cuál?

Después de unos minutos:

- La mayoría dice que sí, que solo hay una forma.
- Carmen dice que hay muchas formas de comprar 9 vasitos de yogur.
- Toño diceque hay dos formas de comprar 9 vasitos de yogur, gastando lo mismo.
- Sara dice que el problema es muy fácil.

Los siguientes son algunos problemas pre y problemas pos, creados grupalmente en tal ocasión:

Problema Pre 1.*En un kiosco venden cajas de alfajores de 6 unidades a S/. 10 y de 12 unidades a S/. 20. ¿De cuántas maneras puedo comprar 18 alfajores? ¿Cuánto gasto en cada una de las posibilidades? ¿Hay alguna más barata?*

Problema Pos 1.*Con la misma información dada en el problema del episodio,*

a) *Dar cuatro cantidades distintas de vasitos de yogur, para las cuales se obtenga el menor precio por vasito.*
b) *¿Qué característica común tienen los números que respondió en (a)?*
c) *¿Hay más cantidades que pueden ser respuesta de (a)? ¿Puede generalizar?*
d) *Si la cantidad de vasitos a comprar no es múltiplo de 3, ¿en cuál de las dos bodegas es más barato?*

Problema Pos 2. *En la bodega A, venden paquetes de 6 vasitos de yogur por S/. 8,00y cada vasito individual a S/. 1,50; pero en la bodega B, venden el mismo producto en paquetes de 3 vasitos por S/.4,00 y cada vasito individual a S/. 1,60. ¿Cuánto es el pago mínimo que puede hacerse por la compra de n vasitos de yogur, según la información dada? Explicitar la función correspondiente.*

En el Problema Pre 1 se ha modificado la información y el requerimiento. En la información se mantiene la misma estructura que en el problema del episodio, pues el precio de la caja de 12 alfajores es el doble del precio de la caja de 6 alfajores. El requerimiento se hace con una cantidad que se relaciona con la información de manera similar a la que se relaciona en el problema del episodio. Es decir, se da información de precios Q y $2Q$ de paquetes de n y $2n$ objetos respectivamente y se hace un requerimiento sobre la compra de 3n objetos (Q y n representan números naturales). Si bien el contexto sigue siendo extra matemático, se ha modificado la presentación de tal contexto. La situación es más sencilla que la del episodio, por no haber precios unitarios y – como lo manifestaron las autoras –la intención didáctica, teniendo en cuenta lo dicho por algunos alumnos en el episodio, es hacer evidente las diversas posibilidades de comprar una cantidad fija de alfajores, con el añadido explícito de pensar sobre la existencia de una opción más barata.

El Problema Pos 1, es más retador que el problema del episodio y estimula el desarrollo del pensamiento matemático, pues induce a la generalización, considerando múltiplos de 3 y múltiplos de 6. Brinda una oportunidad para recordar y usar el hecho que si un número es múltiplo de 6 entonces es múltiplo de 3, pero que lo recíproco no es cierto. La parte (d) lleva a la construcción cuidadosa de una función que – según el contexto dado – acada número natural que no es múltiplo de 3 le hace corresponder la letra A o la letra B, según la bodega en la que se haga la compra. Es interesante hacer la lista de asignaciones considerando, por ejemplo cantidades (enteras) de 1 a 16 e ir observando regularidades. Notar que las autoras del problema cuidaron no considerar los múltiplos de 3, porque, por ejemplo, por 6 vasitos de yogur se paga igual en la bodega A y en la bodega B y ya no se tendría la asignación única para el número 6, como lo exige la definición de función. Sin embargo, 9 es múltiplo de 3 y la compra de 9 vasitos es más barata en la bodega B. Situación similar se presenta para 3 y 15, que también son múltiplos de 3. Esto lleva a pensar que puede ampliarse el dominio de la función que asigna la bodega en la que es más barato comprar cierta cantidad de vasitos de yogur.

El Problema Pos 2 fue propuesto por el orientador del taller a partir de las conversaciones con el grupo que propuso el Problema Pos 1. Se mantiene la información y el contexto del problema del episodio, pero se cambia el requerimiento y el entorno matemático, pues se especifica el uso de funciones. Es ciertamente retador. Volvemos a referirnos a él en la siguiente sección y una solución detallada se encuentra en Malaspina (2013b).

Creación de problemas y ampliación de horizontes matemáticos

Como se percibe, con el ejemplo mostrado en la sección anterior, la creación de problemas genera una dinámica matemática acompañada de lo didáctico, cuyas fronteras son difíciles de predecir, pues ya sea por variación o por elaboración, surgen preguntas cuyas respuestas pueden requerir un entorno matemático que va más allá de lo inicialmente considerado. Un problema creado inicialmente con un propósito, puede realmente abrir posibilidades didácticas y matemáticas muy interesantes, más allá de tal propósito, en las que no se pensó al momento de crearlo. Esto es interesante en la perspectiva de descubrir conocimientos y de hacer matemáticasy contribuye a ampliar la visión que suele tenerse de las matemáticas, como algo estático y acabado.

En las experiencias didácticas realizadas en talleres de formación de profesores, hemos encontrado varios casos de descubrimiento de nuevos horizontes matemáticos, algunos de las cuales resumimos a continuación:

Retomamos el Problema Pos 2, creado a partir del episodio mostrado en la sección anterior. Percibimos el paso de una situación particular a una general, mediante el uso de una función que hay que definirla con la misma información dada en el problema inicial. La idea es interesante y parece ser de fácil solución. Lo interesante es que lleva a un tipo de función que no es conocida en la educación secundaria. El profesor que lo resolvió le dedicó tiempo de trabajo más allá de las horas en el taller y manifestó haber comprendido mejor tal tipo de función, “redescubierta” a partir del problema sencillo de compra. El problema se resuelve usando la función “mayor entero” (o “máximo entero”). Así, con la información dada en el problema del episodio, el pago mínimo por *n* vasitos de yogurt es

$$f(n) = 4\left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right] + \left(\frac{n}{3} - \left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right]\right) \times 3 \times 1{,}5$$

Otros casos:

Problema inicial (a) (En un taller con profesores de secundaria):

Hallar las dimensiones del triángulo rectángulo que tenga la mayor área posible y estéinscrito en una circunferencia cuyo radio mide 8cm.

Problema creado (a):

Determinar las dimensiones de un triángulo rectángulo que tenga la mayor área posible y que esté circunscrito a una circunferencia de radio 8 cm.

Vemos que el autor del problema tiene la interesante idea de considerar triángulos circunscritos a una circunferencia; élno llega a una respuesta final, no encuentra las dimensiones del triángulo que busca. ¿Existe tal triángulo?

El problema presenta una excelente oportunidad para ejercitar una faceta muy importante del pensamiento matemático: la existencia de una solución; en este caso, la del valor óptimo de una función; y más específicamente, plantearnos la pregunta ¿existe un triángulo rectángulo circunscrito a una circunferencia, que tenga área máxima?

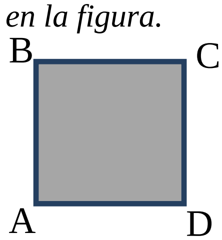
Problema inicial (b) (En un taller con alumnos de profesorado de educación inicial y primaria):

Pedro tiene una hoja rectangular de papel ABCD,de 20 cm de largo por 12 cm de ancho, como se ilustra en la figura.

Pedro dobla la hoja de modo que el vértice C se ubica en el lado AD y el lado CD se superpone sobre ellado AD.¿Es verdad que el área del trapecio que se visualiza es el 75% del área del rectángulo ABCD? ¿Por qué?

Problema creado (b):

Lucía tiene una hoja cuadrada de papel ABCD, de 10 centímetros de lado como se ilustra en la figura.



Su profesor le pide que realizando dobleces en la hoja, muestre de forma visual el 25% del área del cuadrado original. ¿De cuántas maneras Lucía podría hacer dobleces para mostrar de forma visual el 25% del cuadrado original?[2]

En su solución, la alumna mostró las tres maneras más “naturales” de hacer los dobleces (mostrar cuatro cuadrados congruentes entre sí, mostrar cuatro rectángulos congruentes entre sí, y mostrar cuatro triángulos rectángulos congruentes entre sí). Lo interesante del problema, es que presenta no solo un reto alcanzable por niños de primaria, sino también que suscita preguntarse si las tres formas “naturales” de hacer los dobleces para mostrar figuras con el 25% del área del cuadrado original, son las únicas. Ante esta pregunta, al socializar el problema, las alumnas encontraron dos formas más. Por otra parte, con la misma idea, buscamos formas de hacer un solo doblez en la hoja cuadrada para mostrar dos figuras con la misma área. Llegamos a encontrar que esas figuras pueden ser trapecios y que hay muchos pares de tales trapecios. Así, tuvimos la ocasión de evidenciar que hay problemas con infinitas soluciones.

Notamos que usando para un rectángulo el criterio para hacer el doblez en la hoja cuadrada de modo que se encuentren trapecios congruentes, se obtiene también infinitos pares de trapecios con la misma área, lo cual nos llevó a concluir que el problema propuesto por la alumna también tiene infinitas soluciones. Ciertamente, la alumna no pensó en esta posibilidad al crear su problema y disfrutó mucho al conocer los alcances que tuvo su idea.

Consideraciones finales

Vemos que la creación de problemas – en particular la *variación* de problemas dados – está estrechamente ligada a la resolución de problemas y que tiene gran potencialidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues contribuye a desarrollar el pensamiento matemático de quien los crea, a ampliar su horizonte matemático y a iniciarlo en la investigación y en el hacer matemáticas, pues brinda oportunidades – a alumnos y profesores – para modificar creativamente la información recibida y plantear nuevos requerimientos; para hacer nuevos requerimientos con la misma información; para proponer requerimientos de carácter general; y para hacer mixturas razonadas de estos cambios.

La creación de problemas por *elaboración*, a partir de situaciones dadas; o por requerimientos específicos, didácticos o matemáticos, es otro reto que ya no se vincula directamente con un problema específico previamente dado, sino con la creatividad que debe ponerse en juego para establecer requerimientos a partir de la información que se seleccione, o se modifique, de la situación dada. En este artículo no nos hemos referido a experiencias de este tipo, que ciertamente son muy enriquecedoras para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos. En Malaspina (2012) se detallan algunas experiencias didácticas sobre este aspecto de la creación de problemas, con profesores de primaria en formación.

Consideramos esencial que en los cursos de formación inicial y en los cursos de capacitación de profesores, se incluya la creación de problemas, por su aporte a aprendizajes significativos y por contribuir a desarrollar competencias matemáticas y didácticas que favorecerán que los profesores, a su vez, estimulen en sus alumnos el desarrollo dela capacidad de aprender creando problemas e iniciándose en la investigación.

[2]Cabe aclarar que el texto del problema fue mejorado en la socialización. La redacción original decía “…cuántos dobleces podría hacer Lucía..”, lo cual induce a pensar en solo dos dobleces, aunque se hagan de distintas maneras.

Referencias

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37 – 55.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas.* Universidad de Burdeos. Traducción de J. Centeno y otros.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2005). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.*Perú: Horsori.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 87-101.

Font, V.; Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89–105.

Giménez, J., Font, V. & Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process, In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education.Proceedings of ICMI Study 22,* (Vol. 1, pp. 581-590). Oxford: ICMI.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.). *Cognitive Science and Mathematics Education.* Hillsdale, NJ: LEA.

Malaspina (2012). Creando problemas para educación primaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 21,* 131 – 137.

Malaspina, U., Gaita, R., Font, V. & Flores, J. (2012). Elements to stimulate and develop the problem posing competency of pre service and in service primary teachers. Paper presented at the *12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12). Pre proceedings*, 2964-2973. Seoul, Korea.

Malaspina, U. (2013a). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM),* 117–128. Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.

Malaspina, U.(2013b). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 35,* 135 – 143.

Malaspina, U., Mallart, A. & Font, V. (2014). Problem posing as a means for developing teacher competencies. En Osterle, S., Nicol, C., Liljedahl, P. & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of the PME 38 and PME-NA 36*(6), 356.Vancouver, Canadá.

Malaspina, U. & Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia e investigación. EnMalaspina, U. (Ed.) *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática* (pp. 7 – 54).Lima: IREM-PUCP.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*.Reston, VA: NCTM.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.

Singer. F. M. &Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 9-26.

Tichá, M. &Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133-143.