¿Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad?

Edgar Alberto **Guacaneme** Suárez
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
guacaneme@pedagogica.edu.co

Resumen

La Historia de las Matemáticas ofrece, entre otros aspectos a favor del conocimiento del profesor de Matemáticas, un ambiente sinigual para ampliar la visión usual sobre los objetos matemáticos y sobre las formas de pensar en Matemáticas. La historia de la proporcionalidad brinda la posibilidad de reconocer al menos dos teorías de la proporción (a saber: pre-eudoxiana y euclidiana) que recurren a sendos tratamientos aditivos de las magnitudes (o cantidades) geométricas. El estudio de aspectos centrales de estas dos teorías no solo logra confrontar el saber matemático usual de los profesores e investigadores sobre las ideas de razón, proporción y razonamiento proporcional, sino que además ofrece opciones para un tratamiento curricular radicalmente innovador de la proporcionalidad y abre una novedosa ventana a la investigación sobre el razonamiento proporcional aditivo.

Palabras clave: proporcionalidad, razón, proporción, Historia de las Matemáticas, razonamiento proporcional, conocimiento del profesor de Matemáticas, teoría pre-eudoxiana de la proporción, teoría euclidiana de la proporción.

Introducción

La relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática” ha merecido la atención de la comunidad internacional desde hace ya varias décadas. Durante la última década del siglo XX, la décima versión de los estudios temáticos del ICMI abordó precisamente dicha relación (Fauvel & van Maanen, 2000, 2002).

En América Central y Suramérica se han desarrollado iniciativas para el estudio de dicha relación, algunas de las cuales han confluido y tenido eco en uno de los núcleos temáticos que concentran el interés y trabajo de la “Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe” (REDUMATE, http://www.centroedumatematica.com/redregional/).

En Colombia, desde hace algunos años, tal relación ha sido objeto de estudio por parte de un sector de la comunidad académica, sobresaliendo, entre otros, el trabajo del "Grupo de Historia de las Matemáticas" de la Universidad del Valle, y más recientemente las investigaciones del "Grupo de Historia, Epistemología y Educación Matemática" (GHEEMA) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y del grupo "*Research on Mathematics Teacher Education"* (RE-MATE) de la Universidad Pedagógica Nacional.

Precisamente en el seno del "Grupo de Historia de las Matemáticas" y en el marco del "Doctorado Interinstitucional en Educación – Énfasis en Educación Matemática" se desarrolla la tesis titulada "Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas", bajo la dirección del doctor Luis Carlos Arboleda Aparicio. A través de esta tesis se ha estudiado un fragmento de la historia de la proporcionalidad y se ha procurado establecer sus vínculos con el conocimiento del profesor (Guacaneme, 2010, 2011, 2012a, 2012b, 2013a). Desde dicha aproximación se han logrado identificar, como parte de la producción matemática de los griegos clásicos, dos ideas de proporción que no aluden estrictamente a esquemas multiplicativos y que más bien involucran la adición o diferencia de las magnitudes geométricas implicadas y un pensamiento correlacional entre ellas.

En lo que sigue se presentan aspectos de las dos teorías de la proporción que desarrollan sendas ideas de la misma, se precisan los enfoques aditivos y correlacionales de las mismas y se discuten algunas posibles implicaciones en ámbitos educativos e investigativos.

Dos teorías de la proporción

El estudio de la historia de la proporción permite reconocer varias teorías de la razón y la proporción y establecer diversos hitos históricos para estos objetos matemáticos. A continuación se abordan aspectos de dos de tales hitos, definidos por sendas teorías sobre la razón y la proporción, cronológicamente secuenciales, ubicados en la antigua Grecia entre los siglos V y III a.C.

Las ideas de razón y proporción en la teoría pre-eudoxiana

Varios documentos de Historia de las Matemáticas (*v.g.*, Evans, 1927; Filep, 1999, 2003; Fowler, 1979, 1980, 1981, 1982; Knorr, 1978; Thorup, 1992) refieren la existencia de una teoría de la proporción para magnitudes geométricas, que antecede a la presentada por Euclides en los Libros V y VI de *Elementos*, y que se basa en la idea de *antanairesis* (también reportada como *antifairesis*, traducción literal del término inglés *anthyphairesis*) o método de restas sucesivas (usual y anacrónicamente conocido como algoritmo de la sustracción de Euclides).

Bajo esta óptica, y atendiendo a un cierto orden cronológico de las publicaciones, se puede sintetizar que Evans (1927) presenta la existencia implícita de la antanairesis como definición alterna de proporción a la expuesta en *Elementos* de Euclides; explica en qué consiste el método o procedimiento aludido. Knorr (1978) presenta un relato de una teoría pre-euclidiana de la proporción, que atribuye a Eudoxo, en la que probar que dos magnitudes a y b tienen la misma razón que las magnitudes c y d, implica probar primero el caso en que las magnitudes son conmensurables y luego el caso en el que son inconmensurables (por una reducción al absurdo). Fowler discute la antifairesis como el aspecto central de una teoría pre-euclidiana de la razón, pero no de la proporción (1979), presenta una interpretación del Libro II de *Elementos* a través de la cual reconoce un interesante nexo con la teoría pre-eudoxiana de la razón (1980, 1982) y discute que la definición eudoxiana de proporción surge naturalmente del proceso clásico de antifairesis (1981). Thorup (1992) presenta una teoría alterna de las proporciones, construida con base en la idea de antifairesis y en una interpretación muy simple de la misma, a través de lo cual no intenta mostrar que tal teoría fuese la efectivamente existente entre los matemáticos antecesores a Eudoxo, sino más bien, argumentar que ninguna parte de una teoría se puede excluir por su simple conexión con una teoría o notación moderna. Filep analiza los métodos pitagóricos de aproximación a la relación entre la diagonal y el lado del cuadrado, uno de los cuales incluye la aproximación a través de restas sucesivas (1999) y estudia tanto la teoría pre-euclidiana de la proporción como la génesis de la definición de Eudoxo (2003).

A partir del estudio de tales documentos y de manera extremadamente sintética se puede decir que la antanairesis configura tanto un proceso de comparación del tamaño de dos magnitudes homogéneas a través de la diferencia (o resta sucesiva) de las magnitudes o de sus residuos, como el resultado de dicho proceso. Asimismo, se puede reseñar que si dos parejas de magnitudes tienen la misma antanairesis, se puede concluir que estas guardan la misma razón, es decir, son proporcionales.

Para entender estas ideas, inicialmente se ilustra el proceso de resta sucesiva para dos magnitudes. Así, supóngase que se quiere obtener la antanairesis de dos magnitudes homogéneas A y B, con B menor que A. Para ello se resta B de A tantas veces como sea posible, quedando eventualmente un residuo R_1 menor que B; se registra el número n_1 de veces que B se pudo restar de A. En seguida se repite el proceso para las magnitudes B y R_1, obteniéndose un número n_2 (que representa el número de veces que R_1 se restó de B) y posiblemente un residuo R_2, menor que R_1. El proceso se puede repetir, bien hasta que no exista residuo o bien de manera infinita; en el primer caso se dispondrá de una m-upla de valores $[n_1, n_2, \dots , n_m]$, en tanto que en el segundo se tendrá una sucesión infinita de dichos valores $[n_1, n_2, \dots , n_m, \dots]$.

La *Figura 1* ilustra la anterior descripción para dos segmentos, obteniéndose la tripla [3,2,2] como resultado de la antanairesis, o si se prefiere, obteniéndose la antanairesis [3,2,2].

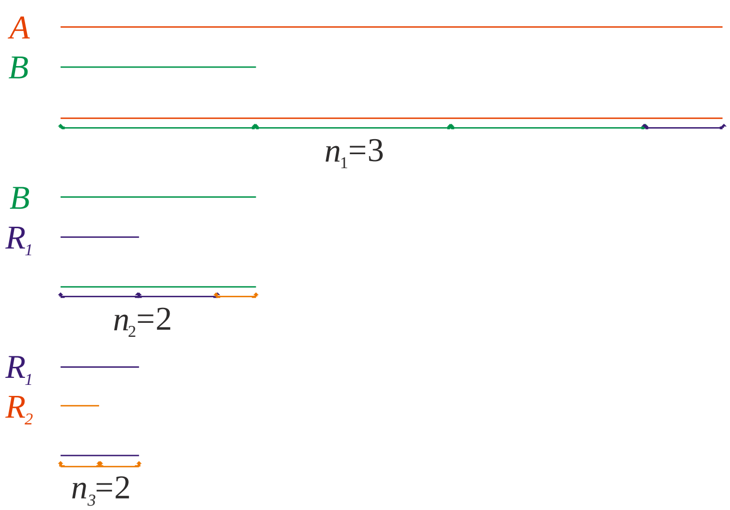

Figura 1 Antanairesis [3,2,2] de dos segmentos.

Ahora bien, en la *Figura 2* se reconoce que la antanairesis [3,2,2] surge de aplicar la resta sucesiva al caso de los dos círculos C y D. Acá se aprecia cómo una versión particular del Teorema de Pitágoras se emplea como algoritmo geométrico para realizar las diferencias, ubicando en la hipotenusa el minuendo, en uno de los catetos el sustraendo y obteniendo consecuentemente en el otro cateto el residuo. Hay que anotar sí, que a pesar de que al hacer la diferencia entre T_1 y T_2 solo se pueda realizar una construcción (*i.e.*, la que aparece al final de la figura), el proceso de antanairesis incluye luego la resta entre T_2 y T_2, la cual obviamente no se puede dibujar, pero sí se debe contar (de allí que $\tilde{n}_3$=2).

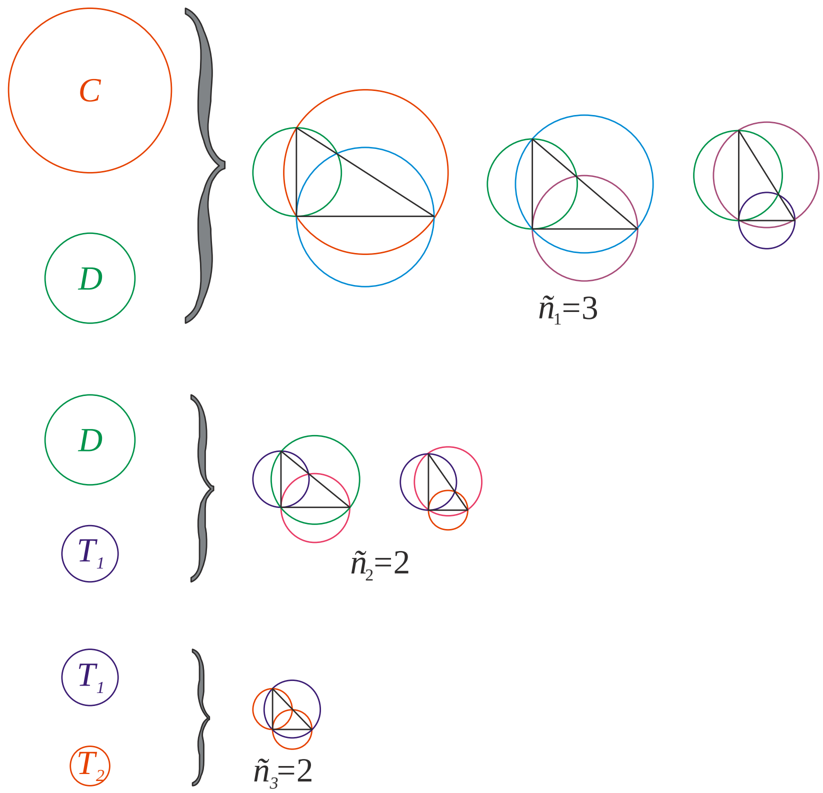

Figura 2 Antanairesis [3,2,2] de dos círculos

Comparando los resultados de la antanairesis de la pareja de segmentos *A* y *B* y la de la pareja de círculos *C* y *D*, y advirtiendo que estas son iguales, se concluye que estas cuatro magnitudes (*A*, *B*, *C*, *D*) son proporcionales, o dicho de otro modo que *A* y *B* guarda la misma razón que *C* y *D*, como se logra percibir en la *Figura 3*.

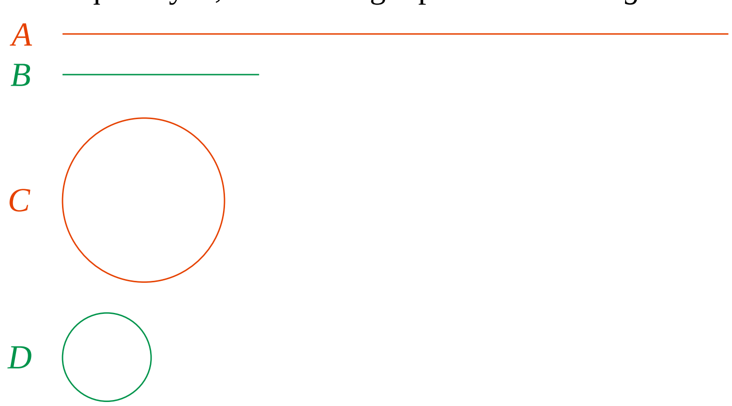

Figura 3 Cuatro magnitudes proporcionales.

Lo anterior permite advertir que la antanairesis, entendida como resultado, captura la razón entre las dos magnitudes (o si se prefiere la relación entre los dos tamaños de las magnitudes en cuestión) a través de un proceso aditivo (o mejor, sustractivo) y que, por tanto, constituye el criterio para establecer la proporción (o igualdad de razón) entre dos o más parejas de magnitudes.

Las ideas de razón y proporción en la teoría euclidiana

La teoría euclidiana de la proporción para magnitudes geométricas, expuesta por Euclides en los Libros V y VI de *Elementos*, es analizada exhaustivamente por un sinnúmero de historiadores de las Matemáticas, desde diversos enfoques y con muy diversos propósitos (*v.g.*, Fine, 1917; Gardies, 1988; Grattan-Guinness, 1996; Hill, 1900, 1912a, 1912b; Knorr, 1992; Muller, 1970; Saito, 2003; Stein, 1990; Vitrac, 2002).

Para reseñar cronológicamente aspectos de los tratados por estos investigadores se debe señalar que Hill (1900) escribe un libro de texto a través del cual espera hacer más comprensible el Libro V de *Elementos* y en su prefacio hace declaraciones interesantes sobre particularidades del Libro V y usa una idea de proporción relacionada con el orden en las sucesiones de múltiplos; posteriormente este autor, en un artículo presentado en dos partes (1912a, 1912b), discute algunas definiciones y proposiciones del Libro V y presenta su reescritura. Fine (1917) exhibe una breve mirada a algunos apartes de los libros V, VI, VII y X a través de los cuales hace una presentación de la teoría euclidiana de la proporción la cual se basa en la idea de proporción sin exigir una definición explícita de razón; a través de esta teoría aborda el problema de la inconmensurabilidad sin recurrir al problema de la medida ni a los números fraccionarios. Muller (1970) discute la interpretación que Aristóteles hace de la teoría de la proporción de Eudoxo, especialmente en lo relativo a la homogeneidad de las magnitudes involucradas; presenta, además, el análisis de algunas demostraciones de propiedades y enunciados de algunas propiedades del Libro V de *Elementos*, en donde se evidencia la consideración a un discurso generalizado para la idea de magnitud o una particularización a magnitudes geométricas. Gardies (1988) examina detalladamente los aportes de Eudoxo a las matemáticas griegas, especialmente a *Elementos* de Euclides, abordando asuntos tales como: Aristóteles y Euclides, las implicaciones de la antifairesis, la teoría eudoxiana de las proporciones, las anomalías del Libro V, algunas concepciones epistemológicas y matemáticas eudoxianas, incomprensiones del siglo XVII, y la herencia eudoxiana en Dedekind. Stein (1990), en el apartado "Cantidades y sus razones: Eudoxo" propone a la razón como una de las tres cantidades trabajadas por Euclides y discute algunas definiciones del Libro V. Knorr (1992) discute dos preguntas, a saber: ¿Cuáles son las diferencias que distinguieron la teoría de Eudoxo de su presentación euclidiana? y ¿Cómo se desarrolló la forma euclidiana de la teoría a partir de su forma eudoxiana anterior? Grattan-Guinness (1996), a propósito de la discusión sobre la existencia de un álgebra geométrica en *Elementos*, introduce la discusión acerca de la posibilidad de considerar las razones como un tercer tipo de cantidad adicional a los números y las magnitudes, y reseña aspectos relativos a la definición de razón y proporción, así como a la imposibilidad de asumir la composición de razones como multiplicación, y la imposibilidad de multiplicar magnitudes entre sí. Vitrac (2002) presenta un estudio sobre la teoría antifairética de las proporciones, reseña algunas dificultades del tratamiento euclidiano en el Libro V así como problemas textuales en su transmisión y examina las teorías desarrolladas por los comentaristas árabes (al-Mâhânî, an Nairîzî y al-Khayyâm). Saito (2003) propone una visión alternativa a la reconstrucción de Becker de la teoría pre-eudoxiana de la proporción, para sustentar que los libros V y VI de *Elementos* no son tan completos como una teoría de las proporciones en abstracto y se pueden interpretar mejor como un conjunto de proposiciones útiles en Geometría, y para argumentar a favor de la idea que las teorías antiguas, si es que existían, deben haber sido menos completas.

En el desarrollo de la tesis doctoral citada en la introducción de este documento, se ha retomado el tratamiento de estos y otros estudios para procurar una comprensión de las ideas de razón y proporción (Guacaneme, 2012a). A partir de ello, entre otros resultados, se ha podido establecer que en la teoría euclidiana de la proporción para magnitudes geométricas hay tres definiciones que han merecido particular interés de los análisis histórico-epistemológicos, destacándose en su orden la definición 5, la 3 y la 7. A continuación se presenta la versión en Español de las dos primeras referidas.

> Definición V-5: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente. (Puertas, 1994, pp. 11-12)

> Definición V-3: Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas. (Puertas, 1994, p. 9)

Si bien el texto de la definición 5 puede ser interpretado discursiva o simbólicamente, entre otras opciones, para los efectos de este documento se prefiere a continuación la interpretación asociada a la expresión gráfica. Así, sean A, B, C y D cuatro magnitudes geométricas homogéneas dos a dos (dos segmentos y dos cuadrados, presentados en la *Figura 4*).

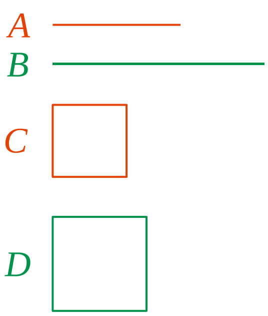

Figura 4 Cuatro magnitudes geométricas homogéneas dos a dos.

Constrúyanse los "múltiplos" de cada una de ellas, pero no a través de una multiplicación entre magnitudes geométricas ni a través de un producto por un escalar (lo cual corresponde a lecturas y notaciones modernas o al menos no coetáneas con la teoría en cuestión), sino por medio de la suma de la magnitud con ella misma. Para el caso de los segmentos la construcción de la suma es elemental; la suma de los cuadrados se puede realizar mediante construcciones geométricas en donde se interpreta el Teorema de Pitágoras como un algoritmo para sumar cuadrados construidos sobre los catetos y el construido sobre la hipotenusa como su suma.

Además, identifíquense con un subíndice que indique el número de veces que cada una se suma a sí misma para obtenerlo; así, A_3 indica el segmento resultante de sumar el segmento A (a sí mismo) tres veces (Nótese así que $A_0=A$ y que $A_1=A+A$) y C_2 indica el cuadrado resultante de sumar C con C_1 (donde C_1 es el cuadrado resultante de sumar C con C).

La *Figura 5* muestra el resultado de las sumas para los segmentos en tanto que la *Figura 6* exhibe los resultados de las sumas para los cuadrados.

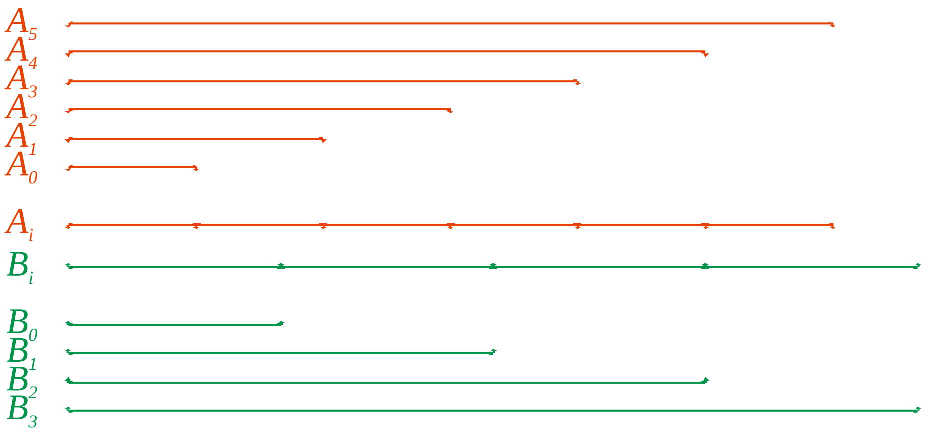

Figura 5 Segmentos resultantes de sumar los segmentos *A* o *B* a sí mismos.

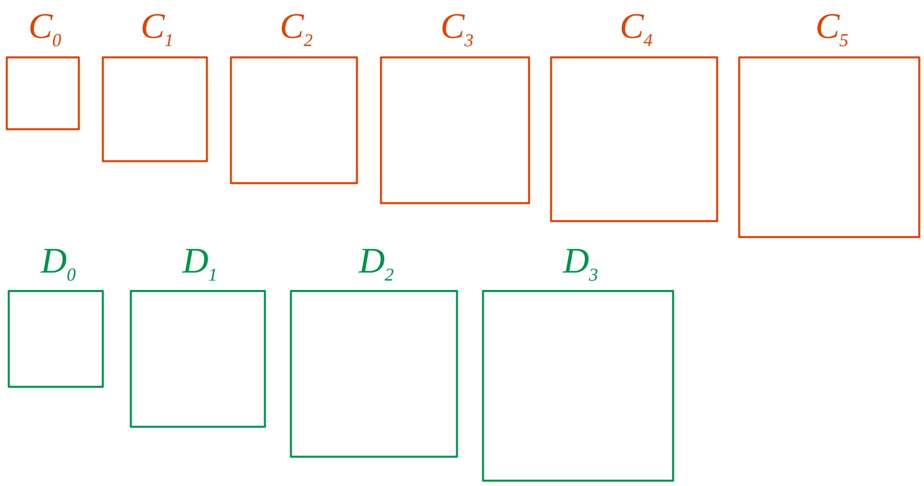

Figura 6 Cuadrados resultantes de sumar los cuadrados *C* o *D* a sí mismos.

Una opción para determinar si las magnitudes *A*, *B*, *C* y *D* son proporcionales es establecer si satisfacen las condiciones de la definición V-5. Ello se puede hacer comparando cada uno de los múltiplos de *A* con cada uno de los de *B*, a la vez que se compara el mismo múltiplo de *C* con el homólogo de *D*, y verificando si el resultado de la comparación coincide. Así, por ejemplo, se puede reconocer que:

A_3 es mayor que B_0 y B_1 pero menor que B_2 y B_3, a la vez que

C_3 es mayor que D_0 y D_1 pero menor que D_2 y D_3.

Una segunda opción se sigue si se asume la interpretación de la definición V-5 sugerida por (De Morgan, 1836) y retomada también por (Fine, 1917). En esta basta con ordenar de manera sucesiva y en un solo grupo los múltiplos de *A* y *B*, así como también ordenar en otro grupo los múltiplos de *C* y *D*; luego se revisa si los órdenes en ambos grupos coinciden.

La *Figura 7* exhibe los dos grupos aludidos; allí se aprecia que el orden en que se distribuyen los múltiplos de *A* y *B* es el mismo en que lo hacen los de *C* y *D*, como se evidencia al comparar los dos siguientes listados (retomados de la figura):

A_0,	B_0,	A_1,	A_2,	B_1,	A_3,	A_4=B_2,	A_5,	B_3
C_0,	D_0,	C_1,	C_2,	D_1,	C_3,	C_4=D_2,	C_5,	D_3

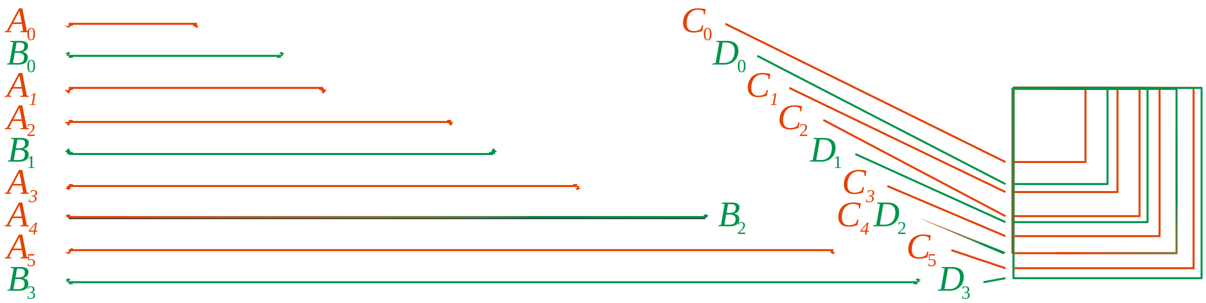

Figura 7 Grupos de múltiplos de las parejas de magnitudes homogéneas.

Lo anterior permite advertir que al "ejecutar" la definición, más que comparar las razones entre cada par de magnitudes para establecer si guardan o no la misma razón, lo que se hace es comparar los órdenes relativos de los múltiplos de las magnitudes en cuestión, actividad que comporta exclusivamente la realización de sumas y la comparación (u ordenación) de los resultados de las mismas.

Enfoques aditivos de las dos teorías

Como se ha intentado enfatizar antes, tanto la aproximación a la razón y proporción a través de la antanairesis, como el tratamiento de las proporciones por medio de la definición V-5, recurren a tratamientos aditivos de las magnitudes geométricas. En uno y otro caso se emplea la sustracción y la adición, respectivamente, para operar las magnitudes. Además de ello, para establecer la existencia o no de una proporción, se acude a una comparación, bien sea entre el resultado del conteo del número de veces que se pudo restar una a otra magnitud (en el primer caso), bien entre los órdenes o distribución de los múltiplos de las magnitudes (en el segundo).

Por otra parte, una mirada a las ideas y estrategias expresadas en ambas teorías permite reconocer que la idea de razón, en tanto expresión de la relación entre el tamaño de dos magnitudes, no necesariamente involucra la existencia de un número (o de una pareja de números) que la capture, objetive o la haga ostensible (Guacaneme, 2013b). Para el caso de la antanairesis, la relación entre los dos tamaños de las magnitudes se aprehende en el comportamiento relativo de las diferencias entre estas, de los residuos con estas, o de sus residuos. Para el caso de la definición V-5 la relación entre los dos tamaños de las magnitudes se aprehende en el comportamiento relativo de los múltiplos de las magnitudes y del correspondiente orden de estos.

En ninguno de los dos casos se incorpora una aproximación que implique la aparición de un producto o un cociente entre las magnitudes implicadas, e incluso en el segundo caso no es necesaria la determinación de la razón entre las parejas de magnitudes vinculadas (lo cual parece justificar la aparente imprecisión o laxitud de la definición V-3). Así, en ninguno de los dos casos se hace presente la idea de razón asociada al cociente de las magnitudes y mucho menos al producto cruzado de las mismas (incluso si las cuatro magnitudes son homogéneas).

Lo anterior conduce necesariamente a proponer que la Historia de las Matemáticas, a través de estos dos enfoques de la razón y la proporción, ofrece una posibilidad para entender que no siempre el razonamiento proporcional ha estado ligado al pensamiento multiplicativo y que existen posibilidades de asociarlo al pensamiento aditivo de las magnitudes.

Algunas posibles implicaciones para la Educación Matemática

Muy probablemente para la gran mayoría de los lectores lo relatado hasta acá constituya una novedad y, en tal sentido, probablemente se adicione al conocimiento que sobre la razón y la proporción se posee, articulándose al mismo de manera más o menos consciente, cuestionando o no la hegemonía del conocimiento común y usual sobre tales objetos matemáticos.

Más allá de ello, lo planteado hasta este punto pretende ser un elemento que confronte el saber matemático usual de los profesores de Matemáticas y, por qué no, de los investigadores en Educación Matemática. Se espera que los individuos de ambas comunidades perciban que en efecto las actividades matemáticas implicadas en las dos teorías citadas conllevan la emergencia de dos significados matemáticos de sendos objetos matemáticos y que incluso se advierta que la razón y la proporción cobran una naturaleza epistémica diferente a la usual y una manera de existir matemáticamente diferente a la convencional. Se tiene la esperanza que la respuesta que unos y otros den a la pregunta qué es una razón y una proporción se dificulte y complejice al intentar incluir las respuestas implicadas en las teorías aludidas. Se aspira a que se reconozca que efectivamente el razonamiento proporcional puede no necesariamente estar ligado al pensamiento multiplicativo y que existe la posibilidad de que esté fuertemente asociado al pensamiento aditivo y al pensamiento correlacional. Se anhela a que el estudio de tales teorías y objetos matemáticos permita explorar opciones alternas para el establecimiento de la cuarta proporcional, problema central (pero no el único) del razonamiento proporcional.

En una dirección un tanto más ambiciosa, pero quizá no menos difusa, se entrevé que la aproximación a la razón y la proporción basada en alguna de las teorías (o en las dos, e incluso en otras no tradicionales), ofrezca un ámbito de innovación educativa y de elaboración de propuestas curriculares que permitan aproximaciones escolares alternas a las usuales.

Asimismo, se prevé que las ideas expresadas constituyan un acicate para nuevas propuestas investigativas en el campo del razonamiento proporcional (ahora también aditivo), tanto desde perspectivas cognitivas como desde otros enfoques de la investigación en Educación Matemática (*v.g.*, ontosemiótico, semántico, social). No se deja de lado la invitación a que más y mejores investigadores se unan a la comunidad ya existente que asume como empresa académica la investigación de la relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática” entendida como un ámbito ampliamente estudiado, pero aún con mucho conocimiento por brindar. Sin duda sus aportes constituirán nuevos derroteros y retos para profesores e investigadores, en tanto intelectuales de la educación.

Referencias y bibliografía

De Morgan, A. (1836). *The connexion of number and magnitude: an attempt to explain the fifth book of Euclid*. London: Taylor and Walton.

Evans, G. (1927). The Greek Idea of Proportion *The American Mathematical Monthly, 34*(7), 354-357.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2002). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Filep, L. (1999). Pythagorean side and diagonal numbers. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 15*, 1-7.

Filep, L. (2003). Proportion Theory in Greek Mathematics. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 19*, 167-174.

Fine, H. (1917). Ratio, Proportion and Measurement in the Elements of Euclid. *The Annals of Mathematics, Second Series, 19*(1), 70-76.

Fowler, D. H. (1979). Ratio in Early Greek Mathematics. *Bulletin (New Series) of the Amrican Mathematical Society, 1*(6), 807-846.

Fowler, D. H. (1980). Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio. *Archive for History of Exact Sciences, 22*(1), 5-36.

Fowler, D. H. (1981). Anthyphairetic ratio and Eudoxan proportion. *Archive for History of Exact Sciences, 24*(2), 69-72.

Fowler, D. H. (1982). Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio part 2: Sides and diameters. *Archive for History of Exact Sciences, 26*(3), 193-209.

Gardies, J.-L. (1988). *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them? *Historia Mathematica, 23*(4), 355-375.

Guacaneme, E. A. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista Virtual Educyt, 2*(2).

Guacaneme, E. A. (2011). *La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones*. Paper presented at the XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife - Brasil.

Guacaneme, E. A. (2012a). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. In O. L. León (Ed.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 99-135). Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Guacaneme, E. A. (2012b). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor? *Revista TED. Tecné, Episteme y Didaxis, 31,* 113-131.

Guacaneme, E. A. (2013a). Conflictos para precisar el conocimiento disciplinar del profesor de Matemáticas. In C. Dolores Flores, M. d. S. García González, J. A. Hernández Sánchez & L. Sosa Guerrero (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 77-95). Chilpancingo, Guerrero: Ediciones Díaz de Santos, S. A.

Guacaneme, E. A. (2013b). Tres ejemplos para discutir la existencia de objetos geométricos In P. Perry (Ed.), *Memoerias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 23-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Hill, M. J. M. (1900). *The contents on the fifth and sixth books os Euclid*. London: Cambridge University Press Warehouse.

Hill, M. J. M. (1912a). The Mathematical Association. London Branch. Presidential Address on the Theory of Proportion. *The Mathematical Gazette, 6*(99), 324-332. doi: 10.2307/3605021

Hill, M. J. M. (1912b). Presidential Address on the Theory of Proportion. *The Mathematical Gazette, 6*(100), 360-368.

Knorr, W. (1978). Archimedes and the Pre-Euclidean Proportion Theory. *Archives internationales d'histoire des sciences, 28*, 183-244.

Knorr, W. (1992). De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 8,* 1-12.

Muller, I. (1970). Homogeneity in Eudoxus's theory of proportion. *Archive for History of Exact Sciences, 7*(1), 1-6.

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos S.A.
Saito, K. (2003). Phantom Theories of pre-Eudoxean Proportion. *Science in Context, 16(03), 331-347, 16*(3), 331-347. doi: 10.1017/S0269889703000838
Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. . *Synthese, 84*, 163-211.
Thorup, A. (1992). A pre-euclidean theory of proportions. *Archive for History of Exact Sciences, 45*(1), 1-16.
Vitrac, B. (2002). ‘Umar al Khayyam et l'anthyphérèse: Étude du deuxième Livre de son commentaire Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide. *Fahrang. Quarterly Journal of Humanities & Cultural Studies, 14*, 137-192.