

Geometria do Taxi – uma investigação com alunos do ensino médio no Brasil

José Carlos Pinto **Leivas**Centro Universitário Franciscano
Brasil
leivasjc@unifra.br
Helenara Machado de **Souza**Centro Universitário Franciscano
Brasil
helenara25@gmail.com

Resumo

Esta comunicação científica é um extrato de uma dissertação de um Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática no Brasil. Teve como objetivo investigar como alunos do Ensino Médio de uma escola pública construíram conceitos de uma geometria não euclidiana, a Geometria do Taxi. A metodologia de pesquisa foi qualitativa e envolveu 26 alunos que fizeram uso de recursos didáticos como quadriculados e o software GeoGebra. Nesta comunicação analisamos uma das atividades realizadas, a qual tratou de investigar se os alunos haviam adquirido os conhecimentos esperados. Isso foi feito por meio de um problema avaliativo, no qual os estudantes precisavam analisar o trajeto entre três residências, utilizando o software e um comparativo entre a métrica euclidiana e a dos catetos. Os resultados comprovaram que os conhecimentos dessa geometria, até então adquiridos, foram suficientes e relevantes para a solução correta do problema.

Palavras chave: geometria do taxi, investigação matemática, ensino médio brasileiro, categorias.

Resumen

Esta comunicación científica es una parte de una tesis de Maestría Profesional en Enseñanza de la Matemática en Brasil. El objetivo fue investigar cómo los estudiantes de una escuela secundaria pública como lo habían construido conceptos de una geometría no euclidiana, Taxi Geometría. La metodología de la investigación fue cualitativa y incluyó 26 estudiantes que utilizaron recursos educativos como papel cuadriculado y software GeoGebra. En esta comunicación se analiza una de las

actividades, la que trató de investigar si los estudiantes tenían adquirido los conocimientos esperados. Esto se hizo por medio de un problema de la evaluación, en la que los estudiantes tenían que analizar la trayectoria entre tres residencias, utilizando el software y una comparación entre la métrica euclidiana y de los catetos. Los resultados mostraron que lo conocimiento de este geometría, adquirido hasta ahora, fue suficiente y pertinente a la solución correcta del problema.

Palavras chave: geometria del taxi, investigación matemática, escuela secundaria, categorías.

Introdução

Geometria talvez seja o ramo das matemáticas que ofereça o maior número de possibilidades de resolver os problemas das pessoas para uma melhor forma de viver e habitar o planeta. Os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN, no Brasil, orientam para seu ensino no nível básico. Neles se encontra o seguinte: "Para atender as demandas do trabalho contemporâneo é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula" (Brasil, 1998, p.34). Em relação à Geometria, o documento indica que esta área é um campo no qual, trabalhar com as noções geométricas pode contribuir para que ocorra a aprendizagem de números bem como de medidas uma vez que isso estimula o aluno a "observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc." (p.51).

Duval (2011), ao tratar da revolução semiótica para a representação e conhecimento, afirma que "A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso por nós mesmos" (p.15). O conhecimento em Geometria, oriundo dos gregos, nos parece ainda persistir nos bancos escolares e na formação dos futuros professores de Matemática em instituições brasileiras, como apontam algumas de nossas pesquisas, especialmente no que diz respeito a outras geometrias que não a de Euclides.

Dessa forma, investigar junto a um Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, sobre tais geometrias tem sido a área de interesse do segundo autor, tendo encontrado guarida no interesse da primeira autora em estudar uma dessas geometrias, a saber, a Geometria do Taxi, na qual se leva em consideração uma métrica não euclidiana, a denominada métrica dos catetos. Apresentamos neste artigo, um recorte da dissertação de mestrado, em andamento, dessa mestranda, no qual descrevemos e analisamos a aplicação de uma das atividades de sua pesquisa realizada junto a estudantes do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Santa Cruz do Sul, no estado do Rio Grande do Sul, no Brasil.

Participaram da pesquisa um total de 26 alunos de uma turma em que a investigadora é a própria docente. A pesquisa, de cunho qualitativo, teve como objetivo geral "Investigar quais as contribuições que a Geometria do Táxi pode oferecer para a construção de conceitos referentes à Geometria Analítica por alunos de terceiro ano do Ensino Médio". O método de coleta de dados consistiu em registros escritos dos alunos em diários de campo, bem como construções realizadas utilizando um software de Geometria Dinâmica, além do diario de campo da investigadora. A fim de elaborarmos as atividades de forma coerente e condizente com os alunos foi aplicado, inicialmente, um questionário, segundo o qual, pudemos delinear o perfil de conhecimento que

os estudantes apresentavam. Ao final de todas as atividades foi aplicado um segundo questionário, segundo o qual, foi possível analizar o reflexo produzido na sua aprendizagem, após a realização das mesmas.

A Geometria do Taxi se desenvolveu a partir da necessidade humana de resolver determinados problemas para os quais os conhecimento de Geometria Euclidiana não davam conta. Foi desenvolvido pelo russo Hermann Menkowski (1864-1909). Nessa, o papel de medida ou de métrica precisa ser extrapolado para além euclidiano o que, sem sombra de dúvidas, gera muitos conflitos cognitivos uma vez que não é de uso frequente na escola. Entretanto, este é um conhecimento do indivíduo no seu dia a dia, ao deslocar-se em uma cidade urbanizada, em que o trajeto mais curto entre dois pontos, quase nunca é dado pela medida de um segmento de reta.

Dessa forma, define-se métrica dos catetos como sendo a função definida por (Y,Y) = |Y| - |Y| + |Y| - |Y|

$$_{1}(X,Y) = |x_{1} - x_{2}| + |y_{1} - y_{2}|,$$

onde $X = (x_1, y_1)$ e $Y = (x_2, y_2)$ são pontos do \mathbb{R}^2 . Essa, é representada como na figura 1, pela soma das medidas dos segmentos XP e PY e não por XY como na Geometria Euclidiana.

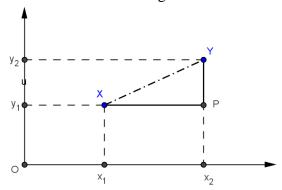


Figura 1. Métrica dos catetos.

Muito embora ela tenha sido desenvolvida antes, adquiriu notoriedade por volta de 1952, quando da publicação do livro de Karl Menger: "Você vai gostar de Geometria", a partir do qual recebeu a denominação atual. Veloso (1998) utiliza, como exemplo dessa geometría, o trajeto realizado por um motorista de táxi, para levar um cliente do Elevador de Santa Justa até a igreja de São Nicolau, da seguinte forma:

se um motorista de táxi apanha um cliente junto do Elevador de Sta. Justa (seja o ponto A) e este lhe diz que quer ir para a Igreja de S. Nicolau (seja o ponto B), a distância que vai percorrer no trajecto (supondo que não existem ruas reservadas a peões nem sentidos únicos) não é dada pela fórmula da distância euclidiana \overline{AB} entre os dois pontos – pois o motorista não pode "ir a direito, atravessando os prédios" – mas pela soma de duas distâncias em direções perpendiculares [...] (p. 327)

Por outro lado, ao tratar das conexões da Matemática com o cotidiano do aluno, assim se manifestam Kaleff e Nascimento (2004):

[...] a Geometria do Táxi pode ser apresentada, com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno, pois esta se apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço das "ruas". Desta forma, confrontado com esta nova Geometria, o aluno pode ser levado a

perceber que existem outras Geometrias além da Euclidiana, possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos. (p. 13)

A partir desses pressupostos, a pesquisa utilizou atividades de localização por meio de representações em papel quadriculado. Posteriormente, foi empregado o software GeoGebra para obter localizações em sistemas de coordenadas para, usando os recursos do *google maps*, explorar com mais profundidade localizações em ambientes ao redor da escola e das residências dos estudantes. Destacamos para esta comunicação a última atividade realizada, a qual discutiremos em sua totalidade neste artigo.

A atividade investigativa e sua descrição

Realizadas atividades de localização de pontos, as quais exploraram o cotidiano dos alunos e o ambiente escolar e familiar dos mesmos, concluímos a investigação com uma atividade que teve por objetivo avaliar se houve aquisição de conhecimentos básicos sobre a Geometria do Táxi. Esta atividade foi realizada utilizando o software GeoGebra. A investigadora propôs aos alunos que analisassem a respectiva construção.

Descrição da atividade

A figura 2 representa o trajeto realizado por Júlia para ir até a casa de sua amiga Priscila e o trajeto realizado por Júlia para ir até a casa de sua amiga Cláudia.

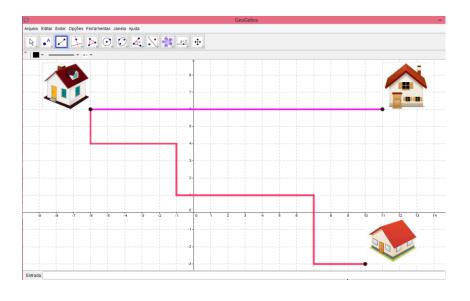






Figura 2. Trajetórias dos deslocamentos entre as residências.

Sabendo que cada unidade de lado de quadradinho representa 250 metros, determine:

- a) a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila.
- b) a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia.

A solução esperada pela investigadora é a seguinte:

```
a) a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila | 10 + 6| + |-3 - 6| | 16| + |-9| | 16 + 9 = 25 unidades | 25 \times 250 = 6250 metros | 25 \times 25
```

Esperávamos que, ao resolver a atividade, inicialmente o aluno identificasse as coordenadas x e y de cada ponto que representa a casa de cada uma das meninas, Júlia, Priscila e Cláudia. Posteriormente, ele deveria identificar o caso apresentado no item a) como sendo um exemplo de aplicação da Geometria do Táxi e, no item b), como sendo uma aplicação de distância, de acordo com a Geometria Analítica Euclidiana. Finalmente, esperávamos que o aluno resolvesse, com êxito, os cálculos necessários para determinar a distância apresentada em cada situação.

Realizaram a avaliação todos os 26 alunos que haviam participado das oficinas que abordaram o uso do software GeoGebra e sua aplicação no processo de compreensão dos conceitos inerentes à Geometria do Táxi.

Para analisarmos as soluções apresentadas pelos alunos utilizaremos o processo de categorização, definido por Bardin (2011):

a categorização é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (unidade de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão dos caracteres comuns destes elementos(p. 117).

Foram determinadas seis categorias, as quais descrevemos na sequência.

Categoria A: o aluno não consegue diferenciar Geometria do Táxi da Geometria Analítica

Nessa categoria, encontramos aqueles que não conseguiram identificar quando é possível aplicar a ideia de distância, do ponto de vista da Geometria do Táxi, ou quando se aplica esse conceito de acordo com a Geometria Analítica Euclidiana. Apresentamos o que cada um dos três alunos registrou.

Maiara - Primeiro tiramos as coordenadas do gráfico e depois calculamos a distância.

Laura - Procurei o x e o y. Calculei a distância e coloquei no módulo.

Carlos - Eu precisava ter estudado mais, pois tenho dificuldade.

A partir desses três registros, podemos observar que dois alunos conseguiram identificar as

coordenadas dos pontos utilizados na resolução da questão. No entanto, utilizaram a lei errada para determinar a distância, pois deveriam ter observado que o trajeto realizado por Júlia para ir de sua casa até a casa da Priscila representa uma aplicação da Geometria do Táxi. Já o trajeto realizado por Júlia até a casa de Cláudia representa uma aplicação da Geometria Analítica, pois esse trajeto é retilíneo.

Categoria B: o aluno contou os "quadradinhos"

Identificamos nessa categoria apenas um aluno, o qual chamaremos de Cássio. Ele descreve que a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila tem 25 quadradinhos. Forneceu a distância em metros, calculando 25 vezes 250, ou seja, 6250 metros. A distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia é dada por 17 vezes 250, que é igual a 4250 metros.

Por fim, Cássio comenta: "Foi uma questão fácil de realizar, pois exige somente multiplicar".

Neste caso, verificamos que o aluno conseguiu resolver a atividade proposta, mesmo que não tenha utilizado a estratégia que esperávamos. Tínhamos por objetivo principal nessa atividade verificar se os alunos conseguiam diferenciar situações que representavam a distância do ponto de vista euclidiano da distância descrita pela Geometria do Táxi.

Categoria C: o aluno não realizou a atividade

Identificamos, nessa categoria, três alunos, Ariana, Gláucia e Cristiano, os quais não realizaram nenhuma etapa daquelas esperadas para a solução.

Como esses alunos deixaram a parte destinada à escrita dos comentários em branco, não conseguimos identificar o momento em que a dificuldade realmente se encontrou ou onde houve uma laguna com relação à aprendizagem dos conceitos que foram objetos da avaliação.

Categoria D: o aluno identifica a diferença entre distância definida pela Geometria Euclidiana e a definida pela Geometria do Táxi, porém teve dificuldade na realização das operações necessárias.

Nessa categoria, podemos identificar quatro alunos, Maria, Pedro, Marina e Joice, os quais, embora soubessem que, segundo a Geometria Euclidiana, a distância entre dois pontos descreve um segmento de reta e que, de acordo com a Geometria do Táxi, descreve os catetos de um triângulo retângulo, esses alunos tiveram dificuldades em resolver operações como adição, multiplicação e obtenção do módulo dos números que representam a solução da atividade.

Maria realizou essa questão da seguinte forma:

distância da casa de Júlia até a casa de Priscila
$$|10+6|+|-3-6|$$
 $|2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}|$ $|16|+|-9|$ $|16+(-9)=7 \text{ unidades}$ $|17 \times 250=4250 \text{ metros}|$ distância da casa de Júlia até a casa e Cláudia $|2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}|$ $|2\sqrt{(11+6)^2+(-6+6)^2}|$ $|2\sqrt{17^2+0^2}|$ $|2\sqrt{289}|=17 \text{ unidades}|$

Ela comentou: "Eu calculei a distância de um ponto ao outro."

No item a) o correto seria:

16 + 9 = 25 unidades,

 $25 \times 250 = 6250 \text{ metros}.$

Portanto, podemos verificar que Maria não identificou que o módulo de -9 é 9, ou seja, ou ela se equivocou, ou ainda não sabe o suficiente sobre a função modular.

Pedro realizou a questão da forma que segue.

a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila	a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia
10 + 6 + -3 - 6	$\sqrt[2]{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
16 + -9	$\sqrt[2]{(11+6)^2+(-6+6)^2}$
16 + (+9) = 25 unidades	$\sqrt[2]{17^2 + 0^2} = \sqrt[2]{289} = 17 \text{ unidades}$
250 x 25	17 x 250 = 4250 metros
250 + 500	
5250 metros	

Podemos perceber, na solução da esquerda, que sua dificuldade esteve na multiplicação. Em seu comentário, Pedro ressalta: "No primeiro se aplica a teoria do táxi (não euclidiana), na segunda se aplica a teoria euclidiana. Na teoria não euclidiana o trajeto não é uma reta e na euclidiana é uma reta."

A seguir apresentamos a resolução de Marina.

a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila	a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia
10 - 6 + -3 - 6	$\sqrt[2]{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
4 + -9	$\sqrt[2]{(11+6)^2+(-6+6)^2}$
4 + 9 = 13 unidades	
$13 \times 250 = 3250 \text{ metros}$	$\sqrt[2]{17^2 + 0^2} = \sqrt[2]{289} = 17 \text{ unidades}$
	$17 \times 250 = 4250 \text{ metros}$

Verificamos que o erro dessa aluna está em compreender que 10 - (-6) = 10 + 6 = 16. Acreditamos que ela não tenha percebido que a coordenada de x_1 é -6, pois descreve: "Primeiro localizei o x e o y de cada caso e depois utilizei as equações, logo depois multipliquei os resultados por 250. Cheguei à conclusão que, por mais que tenha mais esquina, Priscila mora mais perto de Júlia do que a Cláudia."

Solução apresentada por Joice:

a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila	a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia
10 + 6 + -3 - 6	$\sqrt[2]{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
16 + -9	$\sqrt[2]{(11+6)^2+(-6-6)^2}$
16 + 9 = 25 unidades	$\sqrt[2]{17^2 + (-12)^2} =$
$25 \times 250 = 6250 \text{ metros}$	$\sqrt[3]{100} + (12) = \sqrt[3]{289 + 144} = \sqrt[3]{433} = 20 \text{ unidades}$
	$20 \times 250 = 5000 \text{ metros}$
Não euclidiana, porque não é uma reta	Euclidiana, porque é uma reta

Na segunda solução apresentada por Joice podemos verificar que o equívoco foi semelhante ao apresentado por Marina na primeira, ou seja, na resolução de operações com números inteiros. Podemos perceber, ainda, que ela conseguiu diferenciar cada uma das geometrias nas quais estudamos.

Categoria E: o aluno apresentou a solução correta

Os alunos classificados nesta categoria são aqueles que apresentaram a solução esperada, a do início dessa análise, os quais demonstraram ter compreendido que, quando o trajeto realizado pode ser representado por um segmento de reta, temos um exemplo de distância euclidiana.

Quando esse trajeto apresenta "esquinas", "pode ser representado por um L", de acordo com as palavras dos alunos, temos uma aplicação da Geometria do Táxi.

Alguns dos comentários escritos pelos alunos classificados nessa categoria são os seguintes:

Laura - Primeiramente identifiquei os pontos, após usei a geometria do táxi para resolver a letra a) e usei a forma euclidiana para resolver a letra b). Ao final, já tendo o resultado obtido das duas formas, multipliquei eles por 250 metros, que representa cada unidade, obtendo assim a distância em metros de cada letra.

Jorge - Observando a figura se vê que no caso a) forma um L, então apliquei a Geometria do Táxi. E, na segunda forma uma reta, fiz a distância normal.

Matheus - Para descobrir a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila usei a Geometria Não-Euclidiana, pois não é apenas uma reta, tem várias esquinas. Para descobrir a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia, usei a Geometria Euclidiana, pois é apenas uma reta.

Os demais comentários, não foram muito diferentes dos aqui apresentados, pois descreviam como necessário para a solução dessa atividade as três etapas a seguir.

- 1^a) Identificar as coordenadas dos pontos utilizados.
- 2ª) Identificar qual das geometrias se aplicava em cada caso, para poder aplicar a forma de obter a distância correta.
- 3ª) Multiplicar os resultados obtidos por 250, assim teriam como unidade de medida dessas distâncias o metro.

Identificamos um total de onze alunos, nessa categoria.

Categoria F: o aluno não utilizou a escala

Identificamos, nesta categoria, as soluções apresentadas por quatro aluno, Martina, Jonas, Marcelo e Paulo. A partir dessas soluções e seus respectivos comentários, verificamos que esses alunos diferenciaram cada uma das geometrias estudadas, conseguiram aplicar com sucesso as leis necessárias. No entanto, não conseguiram realizar a etapa na qual se esperava que fizessem a conversão de unidades para metros.

Exemplo de solução apresentada nesta categoria:

a distância da casa de Júlia até a casa de	a distância da casa de Júlia até a casa de
Priscila	Cláudia
10 + 6 + -3 - 6 16 + -9 16 + 9 = 25 unidades	$\sqrt[2]{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\sqrt[2]{(11+6)^2 + (-6+6)^2}$ $\sqrt[2]{17^2 + 0^2} = \sqrt[2]{289} = 17 \text{ unidades}$

O comentário registrado por Juliana ilustra bem o raciocínio desenvolvido pelos alunos enquadrados na categoria.

Juliana - Identifique as coordenadas de cada ponto, vi que no ítem a) é Geometria do Táxi, pois o caminho não é uma reta e, no b), é Geometria Euclidiana, pois nesse caso é uma reta. Calculei as distâncias.

Após analisarmos as soluções apresentadas para essa atividade, que teve caráter avaliativo, concluímos que a compreensão do conteúdo se deu de forma satisfatória, pois dos vinte e seis alunos que realizaram a avaliação, apenas nove não conseguiram resolvê-la da forma correta, seja por não diferenciar as geometrias envolvidas, por não ter realizado nada da atividade ou, ainda, por ter utilizado outra estratégia, no caso "contar os quadradinhos e multiplicar por 250".

Consideramos também que, desse conjunto de alunos, seis não atingiram o mínimo dos objetivos propostos para a avaliação, o que nos leva a acreditar que outros fatores possam tem influenciado na resolução da atividade.

Considerações finais

Apresentamos, nesta comunicação científica, um recorte de uma dissertação de mestrado em andamento, realizada pela primeira autora sob a orientação do segundo autor, cujo objetivo foi verificar se as atividades realizadas anteriormente proporcionaram aquisição de conhecimentos básicos a respeito de uma geometria não euclidiana, no caso, a Geometria do Taxi.

Os alunos a realizaram utilizando o software GeoGebra e a mesma contribuiu para que os alunos reforçassem conceitos de Geometria Analítica, como localização de um ponto no plano e a distância entre dois pontos. Buscou-se verificar como seria esta trajetória na Geometria Euclidiana e, a seguir, na Geometria do Taxi, segundo a qual a métrica envolvida é a dos catetos.

O emprego de problemas envolvendo a Geometria do Taxi proporciona atividades práticas, as quais, geralmente, não são abordadas no quotidiano escolar associado à vivência dos estudantes. Com este tipo de problematização acreditamos estar cumprindo aos objetivos emanados das Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM – no que se refere ao ensino de Geometria no Ensino Médio (Brasil, 2006, p. 75):

o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.

Dessa forma, acreditamos ter cumprido o objetivo da investigação, uma vez que, pelas manifestações dos estudantes em seus diários de bordo, conseguiram utilizar recursos da Matemática e da Geometria para obter orientações no espaço, fazer leituras de trajetórias em atividades, posteriormente realizadas, utilizaram o *google maps*, o que resultou na aquisição de novos conhecimentos, proporcionando-lhes um olhar diferenciado para essa disciplina no cômputo do currículo do Ensino Médio.

Referências e bibliografia

- Bardin, L. (2011). Análise de conteúdo. São Paulo: Edições 70. p. 229.
- Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental.* Brasília: MEC/SEF, 148 P.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. (2006). *Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília.
- Duval, R. (2011). Ver e Ensinar a Matemática de Outra Forma entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas (Vol. 1). Tânia M.M.Campos (Org.). São Paulo: PROEM.
- Kaleff, A. M., & Nascimento, R. S. (2004). *Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi*. Boletim Gepem, 44,11-42. Rio de Janeiro, dezembro.
- Veloso, E. (1998). *Geometria do motorista de táxi. Geometria: temas actuais: materiais para professores* (pp. 327-341). Lisboa: Instituto da Inovação Educacional.