



Generando sólidos de revolución en la formación inicial de maestros

Teresa F. **Blanco**

Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Santiago de Compostela
España

teref.blanco@usc.es

Juan D. **Godino**

Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada
España

jdgodino@gmail.com

Resumen

En esta comunicación se presentarán los resultados obtenidos al proponer una actividad sobre generación de sólidos de revolución a una muestra de 400 estudiantes para profesores de primaria. El análisis de las respuestas muestra el uso que hacen de los diferentes tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales así como los errores y dificultades con las que se encuentran para poder resolver la tarea con éxito. A la vista de los resultados obtenidos y teniendo en cuenta que estas actividades están presentes en textos de primaria, cabría plantearse una mayor formación sobre el reconocimiento de objetos y procesos implicados en tareas de visualización que requieren, además, una representación plana del sólido generado.

Palabras clave: educación, matemática, didáctica, formación, sólidos de revolución, visualización.

Introducción

Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) sostienen que uno de los ingredientes más importantes para realizar con éxito tareas de geometría tridimensional es la habilidad para manipular diferentes modos de representación de objetos tridimensionales. Esto contrasta con el hecho de que dichos convencionalismos, necesarios para la correcta interpretación de los distintos modos de representación y que no son triviales, no se enseñen ni estén presentes en el currículo de la escuela tradicional.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar que los futuros profesores de

educación primaria tienen importantes carencias a la hora de generar sólidos debido, en parte, a esa falta de formación para poder producir e interpretar representaciones gráficas de cuerpos tridimensionales.

En el proceso de comprensión del concepto subyacente a una representación plana, hay que recorrer dos pasos: el primero corresponde a la interpretación de la figura plana para así convertirla en un objeto tridimensional, y el segundo paso será interpretar ese objeto para convertirlo en el concepto geométrico objeto de estudio. Esto conduce, siempre que se manejen objetos espaciales y sea necesario representarlos mediante figuras planas, al planteamiento de un problema relacionado con la capacidad de visualización espacial de los estudiantes, y con su habilidad para dibujar representaciones planas de objetos tridimensionales, o para interpretar correctamente las representaciones elaboradas por otros. Por ello la capacidad de visualización espacial es uno de los (meta) conocimientos claves en este problema.

Siguiendo a Gutiérrez (1998), una representación plana es perfecta cuando transmite al observador la misma cantidad de información que el cuerpo tridimensional real que representa, y como no existe ninguna representación que cumpla esta condición, es necesario que los estudiantes sepan manejar varias de ellas (perspectiva ortogonal o vistas laterales, isométrica, ortogonal codificada), para de este modo poder seleccionar la más adecuada en cada situación. Además, parte de la información que se conserva al construir e interpretar una representación plana, se debe a que se han compartido ciertos códigos y claves, lo que motiva que determinados datos objetivos se interpreten siempre de la misma forma, lo que Parzysz (1988) llama “restitución de significado”. Cuando no se conocen esos códigos se produce, eventualmente, una lectura errónea de dichas representaciones.

En la siguiente sección describiremos la tarea que se ha presentado a los estudiantes y a continuación se describirán las respuestas obtenidas en términos de configuraciones cognitivas desde la teoría del enfoque ontosemiótico de la instrucción y el conocimiento matemático (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2007). Las siguientes secciones se ocuparán de los análisis cualitativo y cuantitativo de dichas configuraciones y, finalmente, se sintetizarán las conclusiones más destacadas de la actividad llevada a cabo.

Descripción de la tarea

La tarea se presenta como se ve en la Figura 1.

Dibuja, de forma aproximada, qué cuerpos obtendremos al hacer girar las siguientes figuras respecto de los ejes que se indican.

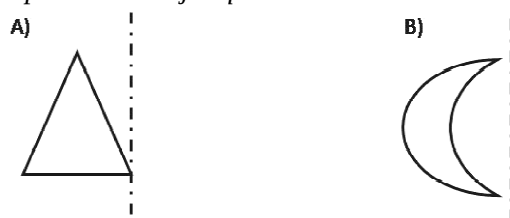


Figura 1. Tarea propuesta a los estudiantes para maestro.

Dicha tarea tiene dos objetivos claros: crear una imagen mental de un objeto tridimensional y dibujar una representación plana de tal objeto. Para el primer objetivo, los estudiantes deben producir imágenes mentales dinámicas y visualizar una forma

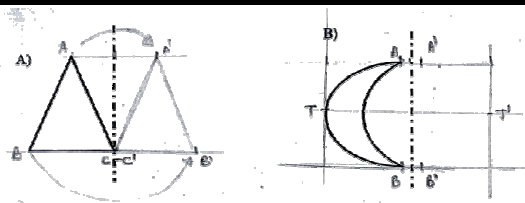
geométrica en movimiento. El segundo objetivo conlleva la acción de realizar una representación ostensiva de la solución (perspectiva, por niveles, ortogonal, etc.). Aunque de entre las diferentes formas de dibujo de sólidos, la perspectiva aún siendo la más natural y frecuente, es la más difícil de realizar con corrección. Esto se debe a que hay varias componentes, de distinto carácter, asociadas a la dificultad de los estudiantes para hacer dibujos en perspectiva: evolutiva, destreza de dibujo y cultural.

El marco teórico que se ha utilizado para el análisis de las respuestas es el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) en el que Godino y colaboradores llevan trabajando desde hace varios años (Godino & Batanero, 1994; Godino et al., 2007). Desde este marco teórico, analizar los objetos y procesos que ponen en juego los estudiantes cuando están realizando una tarea de visualización y razonamiento espacial supone hablar de configuraciones cognitivas (Fernández, Godino & Cajaraville, 2012). Se han detectado nueve configuraciones cognitivas asociadas a esta tarea, cada una con elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos específicos. Así mismo, se han recogido los errores, dificultades y conflictos relacionados con la generación de cuerpos de rotación, muchos de ellos vinculados directamente con alguna de las nueve configuraciones obtenidas.

Configuraciones cognitivas asociadas

A continuación se describirán brevemente las nueve configuraciones asociadas a la tarea descrita en la Figura 1.

Configuración cognitiva 1 (CC1). Interpretación del eje de rotación como eje de simetría. Justificación gráfica basada en las simetrías que produce la concepción del eje de rotación como eje de simetría axial y contemplada, en algunos casos, como “dar la vuelta”, es decir, un giro de 180° alrededor del eje en el que sólo se contemplan los estados inicial y final (Figura 2). Se distinguen, dentro de esta configuración, dos procedimientos diferentes.



Transcripción:

A) Con la ayuda de un compás (en este caso lo hacemos visualmente) se coge la distancia desde el eje de simetría a los vértices de la figura, proyectándolas al otro lado, obteniendo los vértices simétricos. Uniéndolos obtendremos la figura.

B) Dibujamos un rectángulo y lo proyectamos usando el método anterior. Dibujamos una línea perpendicular al eje desde donde se produce el punto de tangencia. Con la ayuda de una regla de elipses (en este caso a mano alzada), dibujamos la figura. Otro método sería hallar los centros de los arcos y trazarlos desde sus proyecciones.

Describe o procedimiento ou estratégia que utilizas para chegar a tua resposta

A) Con la ayuda de un compás (en este caso lo hacemos visualmente) se coge la distancia desde el eje de simetría a los vértices de la figura, proyectándolas al otro lado, obteniendo los vértices simétricos. Uniéndolos obtendremos la figura.

B) Dibujamos un rectángulo y lo proyectamos usando el método anterior. Dibujamos una línea perpendicular al eje desde donde se produce el punto de tangencia. Con la ayuda de una regla de elipses (en este caso a mano alzada), dibujamos la figura. Otro método sería hallar los centros de los arcos y trazarlos desde sus proyecciones.

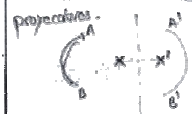
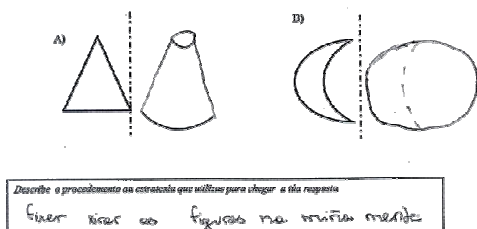


Figura 2. Configuración cognitiva CC1.

Configuración cognitiva 2 (CC2). Representación gráfica de los cuerpos resultantes sin apoyo físico de los ejes dados. En este caso se representan los cuerpos de revolución, pero sin utilizar el eje para construir un plano de simetría del cuerpo (Figura 3).



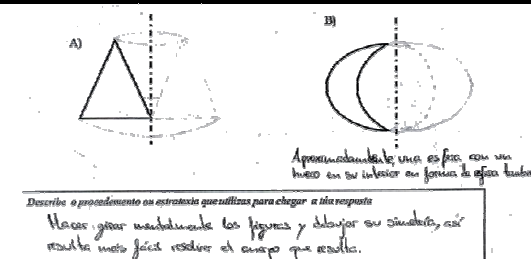
Transcripción:

Lo hice girar en mi mente.

Describe o procedimiento ou estratégia que utilizas para chegar a tua resposta
Fizer ficar as figuras na minha mente

Figura 3. Configuración cognitiva CC2.

Configuración cognitiva 3 (CC3). Marcar circunferencias para conferir un efecto tridimensional. Justificación apoyada en el uso de representaciones gráficas, dibujando las figuras simétricas a las dadas y las circunferencias de las partes superior e inferior para dar el efecto tridimensional (sensación de volumen) (Figura 4).

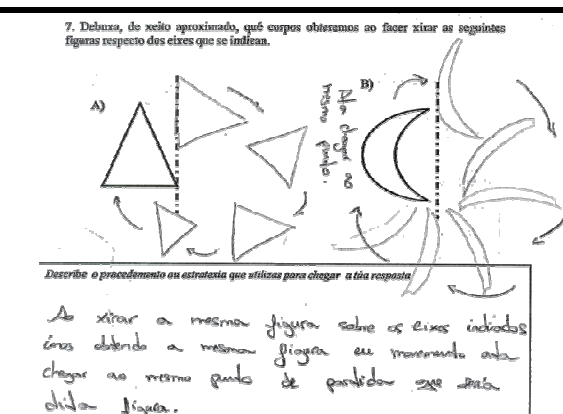


Transcripción:

Hacer girar mentalmente las figuras y dibujar su simétrica, así resulta más fácil resolver el cuerpo que resulta. Aproximadamente una esfera con un hueco en su interior en forma de esfera también.

Figura 4. Configuración cognitiva CC3.

Configuración cognitiva 4 (CC4). Rotaciones libres en el plano. Justificación gráfica aplicando un giro en el plano a cada una de las figuras alrededor de uno de sus vértices o bien rotándolas simplemente sin fijar el centro de giro. En muchos casos el objetivo principal es pasarlos por completo al otro lado del eje. Se aplican a las figuras todos los giros, de igual o diferente amplitud, que se consideren necesarios para la resolución (Figura 5).

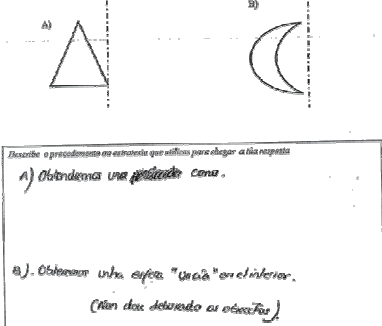


Transcripción:

Si giras la misma figura sobre los ejes indicados vamos obteniendo la misma figura en movimiento hasta llegar al mismo punto de partida que sería dicha figura.

Figura 5. Configuración cognitiva CC4.

Configuración cognitiva 5 (CC5). Ausencia de representación gráfica. Se describen verbalmente los cuerpos resultantes y las acciones llevadas a cabo para obtenerlos (Figura 6). Se intenta describir la acción mental realizada sin apoyarse en representaciones gráficas (ostensivas).

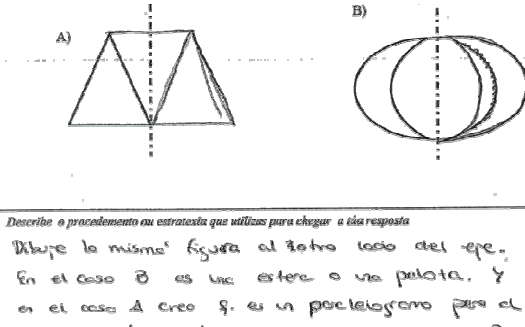


Transcripción:

A) Obtenemos un cono
 B) Obtenemos una esfera “vacía” en el interior.
 (no doy dibujado los objetos)

Figura 6. Configuración cognitiva CC5.

Configuración cognitiva 6 (CC6). Representación de la sección plana frontal del cuerpo tridimensional perpendicular al plano de visión. Es necesario el uso de códigos verbales para poder interpretar la solución (Figura 7).

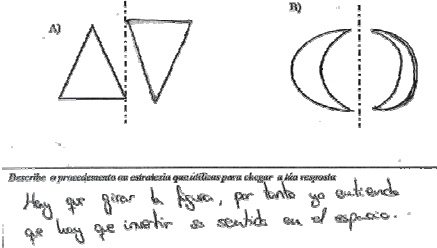


Transcripción:

Dibujé la misma figura al otro lado del eje.
 En el caso B es una esfera o una pelota. Y en el caso A creo q. es un paralelogramo pero al girarlo no tengo claro que podría ser, ¿un cono?

Figura 7. Configuración cognitiva CC6.

Configuración cognitiva 7 (CC7). Justificación gráfica aplicando un giro de 180° y una traslación. Se basa en aplicar a las cada una de las dos figuras una composición de movimientos: simetría central o giro de 180° y traslación (Figura 8).

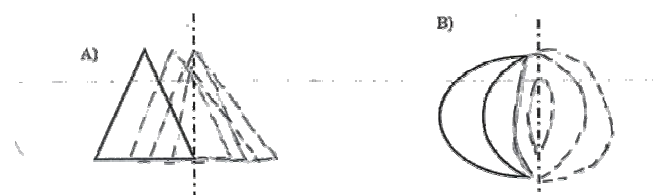


Transcripción:

Hay que girar la figura, por tanto yo entiendo que hay que invertir su sentido en el espacio.

Figura 8. Configuración cognitiva CC7.

Configuración cognitiva 8 (CC8). Creación de un continuo de imágenes.
Representación gráfica de diferentes vistas en perspectiva de las figuras planas en el espacio a medida que van girando alrededor de los ejes. Requeriría la coordinación e integración de todas esas imágenes para la reconstrucción de la imagen global del cuerpo generado (Figura 9).



Transcripción:

Creo que lo primero es una pirámide y la B) una esfera. Los dibujos no están muy significativos pero visualizándolo mentalmente parece ser el resultado.

Describe o procedimiento ou estratégia que utilizas para chegar a tua resposta

Creo q o primeiro é uma pirâmide e a B uma esfera. Os desenhos não estão moi significativos, pero visualizándoo mentalmente parece ser o resultado.

Figura 9. Configuración cognitiva CC8.

Configuración cognitiva 9 (CC9). Representación gráfica de la planta y el alzado de los cuerpos resultantes (Figura 10).

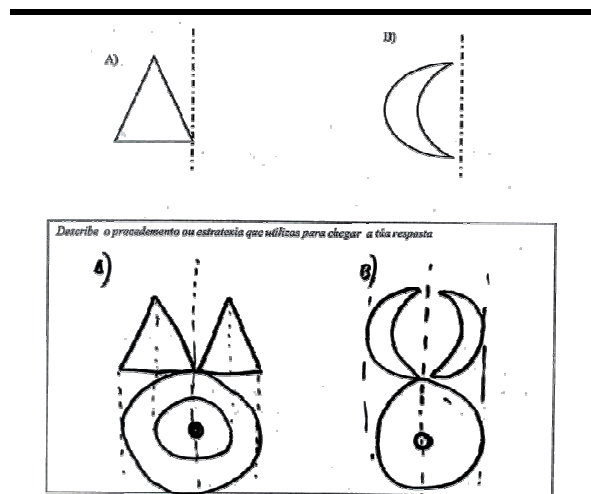


Figura 10. Configuración cognitiva CC9.

Análisis cuantitativo y cualitativo de las configuraciones cognitivas

Se considerará que una respuesta está “incompleta” cuando falten algunos elementos en su descripción o en su representación, por ejemplo, cuando no se indican los agujeros que se forman, pero su estructura exterior general sea correcta. Se dirá que es “incorrecta” cuando el resultado es un cuerpo de revolución que no coincide con el correcto o bien cuando se ha llevado a cabo una acción distinta de la solicitada que produce una figura en una dimensión menor.

En la

Tabla 1 se muestra el porcentaje de respuestas en relación a cada una de las opciones que se han extraído del análisis de las respuestas realizado.

Tabla 1

Frecuencia y porcentaje de respuestas

	Frecuencia	Porcentaje
CC (A correcta B correcta)	16	4,00
CI (A correcta B incompleta)	14	3,50
CIn (A correcta B incorrecta)	0	0,00
IC (A incompleta B correcta)	0	0,00
II (A incompleta B incompleta)	23	5,75
IIn (A incompleta B incorrecta)	0	0,00
InC (A incorrecta B correcta)	1	0,25
InI (A incorrecta B incompleta)	68	17,00
InIn (A incorrecta B incorrecta)	253	63,25
BIn (A sin contestar y B incompleta)	2	0,50
Ns/Nc (No sabe, no contesta)	23	5,75
Total	400	100,00

El análisis cuantitativo de las configuraciones muestra una cuya frecuencia destaca sobre las demás (Tabla 2): la configuración CC1.

Tabla 2

Configuraciones cognitivas asociadas a la tarea

	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
CC1	Eje de rotación como eje de simetría.	196	49,00
CC2	Representación gráfica sin apoyo ostensivo de los ejes dados.	66	16,50
CC3	Marcar elipses para conferir efecto tridimensional.	21	5,25
CC4	Rotaciones libres en el plano.	23	5,75
CC5	Ausencia de representación gráfica.	17	4,25
CC6	Representación de la sección plana frontal	21	5,25
CC7	Giro con traslación.	9	2,25
CC8	Creación de un continuo de imágenes.	10	2,50
CC9	Planta y alzado de los cuerpos resultantes.	5	1,25
NC/NE	No argumentar la opción elegida o dejar la respuesta en blanco/No entiende	32	8,00
Total		400	100,00

La consideración del eje como eje de rotación para generar sólidos tridimensionales se encontró en una amplia variedad de configuraciones: CC2, CC3, CC5, CC6, CC8 y CC9. Sin embargo, este conjunto de configuraciones entendidas globalmente no alcanzan un porcentaje muy elevado en cuanto a frecuencia (35%), contrastando con el grupo anterior de configuraciones en las que se presentan figuras planas como solución a la tarea y que suponen un 57% de la muestra.

El apoyo ostensivo consistente en el empleo de los ejes como guías para obtener las

representaciones gráficas de los cuerpos resultantes se recoge en todas las configuraciones salvo en la CC2 y en la CC5.

Si se restringe el estudio a aquellas configuraciones que involucran objetos tridimensionales, se puede establecer un grupo de que intentan ofrecer una representación gráfica global del cuerpo generado, mediante la representación en perspectiva, como son las configuraciones CC2, CC3 y CC8 (la CC5 permite crear una imagen mental pero no presenta de forma ostensiva una representación de la misma). La configuración CC8 presenta una particularidad con respecto a las otras dos que se traduce en que el observador ha de coordinar e integrar todo el continuo de imágenes para producir un único cuerpo. Esta última configuración impregna de dinamismo la imagen mental.

Sin embargo, las configuraciones CC6 y CC9 ofrecen distintas vistas de representaciones ortogonales de los cuerpos generados y no una representación gráfica que evoque directamente (asociación directa con una imagen mental) un cuerpo tridimensional. En el caso de la configuración CC6, parece haber un intento de crear una imagen tridimensional a través de la representación gráfica utilizada, pero no se consigue al no dar sensación de profundidad. Este tipo de representación gráfica se ajusta a la etapa 2 (esquemática espacial) señalada por Mitchelmore (1978, 1980) para la representación de figuras regulares del espacio, donde las figuras se representan dibujando varias de sus caras ortogonalmente, incluyendo a veces caras ocultas. En la configuración CC9, donde no se busca el efecto volumen en la representación, está claro el uso de la habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales relativas a la identificación de las características de cada una de las figuras para representar sus proyecciones en el plano (vista frontal y aérea).

Parte de la información que se conserva al hacer e interpretar una representación plana se debe a que se han compartido ciertos códigos y claves (Parzysz, 1988), de manera que determinados datos objetivos se interpretan siempre de la misma forma. Así, todas las configuraciones “tridimensionales” presentadas deben seguir códigos de representación sin los cuales no se podría hacer una lectura correcta de las representaciones presentadas por los estudiantes. Por ejemplo, en la configuración CC3, dibujar las circunferencias de las bases es un código que confiere a la estructura un efecto tridimensional. En el caso particular de la configuración CC6 los códigos son insuficientes y por ello esta configuración se suele acompañar de un discurso verbal.

La configuración CC5 establece un trabajo exclusivamente mental sin apoyos ostensivos. A pesar de ello, pueden aparecer de forma aislada algunos elementos gráficos, como puede ser la representación de las figuras simétricas de las dadas con respecto a los ejes dados. Las respuestas de los alumnos indican su incapacidad para reproducir una representación gráfica de la imagen mental creada. La argumentación dada en esta configuración se ajusta al tipo de representación verbal identificada en los trabajos de Gorgorió (1998) y Gutiérrez (1998).

Análisis de errores

En la Tabla 3 se muestra la relación de errores asociados a esta actividad que se clasifican en conceptuales (C), procedimentales (P) y situacionales (S). Cabe destacar el bajo porcentaje de estudiantes que dan una representación correcta de los sólidos generados (4%). Habría que considerar que al depender las respuestas de la representación

gráfica realizada y no contar con entrevistas de los estudiantes, pudiese ocurrir que algunas respuestas de las opciones CI e IC contribuyeran a elevar dicho porcentaje. Los dos errores más frecuentes están concentrados dentro del tipo de error conceptual (1C y 3C) que corresponden a configuraciones que no ofrecen una figura tridimensional como solución a la tarea propuesta. En el bloque de los errores procedimentales sobresale el error 4P que supone el 14%, cuando se detecta en las dos figuras a la vez, al que hay que añadir el 11% cuando afecta sólo a una de las dos figuras, sobre todo a la figura B.

Tabla 3

Frecuencia y porcentaje de los tipos de errores

Tipo de errores	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
0	Sin errores	16	4,00
EB	Dejar sin contestar	23	5,75
1S	No comprender la tarea propuesta	4	1,00
1C	Considerar el eje de rotación como eje de simetría	113	28,25
2C	Girar en el plano las figuras	33	8,25
3C	Girar las figuras 180° en el espacio (simetría)	85	21,25
1P	No identificar los huecos que se generan	0	0,00
2P	Considerar sólo la figura que queda en el interior	5	1,25
3P	Dificultad para describir, visualizar o dibujar los cuerpos resultantes	9	2,25
4P	No considerar la distancia al eje (A y B)	56	14,00
5P	Describir las figuras como la imagen de la sección plana frontal	11	2,75
3P-4P	Figura A: error 3P / Figura B: error 4P	11	2,75
0-4P	Figura A: 0 / Figura B: error 4P	13	3,25
1P-4P	Figura A: error 1P / Figura B: error 4P	18	4,50
4P-1P	Figura A: error 4P / Figura B: error 1P	1	0,25
EB-4P	Figura A: sin contestar / Figura B: error 4P	1	0,25
EB-3P	Figura A: sin contestar / Figura B: error 3P	1	0,25
Total		400	100,00

Se observa en la Tabla 3 que hay un porcentaje casi imperceptible (1%) de estudiantes que hacen explícito el hecho de no haber comprendido la tarea propuesta (error 1S). Sin embargo, la base de las configuraciones CC1, CC4 y CC7 que se apoyan en los errores 1C, 2C y 3C indican que la acción que requiere la tarea no se ha llevado a cabo porque no se ha comprendido el objetivo de la misma.

El análisis de respuestas lleva a reconocer el error 2C (giro en el plano) como diferente, en esencia, del error 1C. En aquel no hay confusión sobre qué movimiento realizar, sino que lo que se observa es la aplicación del movimiento restringiéndolo al plano y no en el espacio. Es un error asociado y exclusivo de la configuración CC4. En este caso, es probable que la palabra “giro” actúe de distractor, al aplicar el significado que tiene el término en el contexto cotidiano.

La diferencia entre el error 1C y el error 3C es muy sutil pues conduce a la misma solución de la tarea. El análisis de este error permite deducir que es provocado por la imagen que se les presenta, se toma la figura y se gira hacia el otro lado del eje, es decir, 180° en el espacio, pero no se gira “alrededor” de un eje. Se produce un conflicto entre la imagen presentada (que lleva hacia la realización de una simetría) y la palabra utilizada en

el enunciado (girar). La representación gráfica de la imagen es la opción que contó con más seguidores. Subyace aquí la idea de simetría como un movimiento que físicamente no se produce en el plano, sino que hay que “salirse del plano” para mover la figura y que se produzca un cambio de orientación (Jaime & Gutiérrez, 1996). En el sentido cotidiano de movimiento, el movimiento realizado es un giro de 180° , lo que conduce a este tipo de errores que también menciona Gorgorió (1998) en su trabajo.

Conclusiones

Este estudio ha puesto de manifiesto que, en general, los estudiantes se limitan a ajustar las imágenes conceptuales creadas a los prototipos que conocen, sin analizar las características y propiedades geométricas de los mismos.

Sólo el 30% de los estudiantes consideraron la solución como un cuerpo tridimensional, utilizando ciertas convenciones para el dibujo de objetos tridimensionales: dibujos en perspectiva (CC2, CC3), representaciones ortogonales (planta, alzado y perfil) (CC9), representación por niveles o cortes topográficos (CC6) y la representación a través de un continuo de imágenes (CC8). Sin embargo, no indican huecos ni otras características internas de las figuras. Muy pocos consiguen dotar plenamente a los cuerpos de profundidad y, por ello, la mayor parte de las representaciones son de tipo mixto, necesitando del apoyo verbal para comunicar la estructura del cuerpo generado. Sólo el 13,3% proporcionaron una solución clara.

En cuanto al tipo de sólidos generados, el 49,2% de los estudiantes han considerado que, en el caso de la figura A, el cuerpo resultante era un cono. En el caso de la figura B el cuerpo más frecuente ha sido una esfera (60,8%), sin especificar si era o no hueca o si tenía o no agujero. El 26,7% consideraron que se generaba un tronco de cono en el caso de la figura A y el 21,7% que en la figura B se generaba una esfera con un hueco dentro. Los porcentajes elevados en los dos primeros casos revelan que los estudiantes han reproducido un cuerpo de revolución conocido al presentárseles como figuras planas un triángulo y una semicircunferencia doble, sin reflexionar sobre el proceso que debían llevar a cabo, conclusión que concuerda con el trabajo de Cohen (2003).

Por último, los significados personales no concuerdan con el significado institucional, en el que las figuras que se generan son sólidos de revolución y que por tanto son el producto de hacer girar una curva alrededor de un eje, manteniendo todas las propiedades que definen un giro (equidistancia al eje de giro, etc.). Esto es corroborado por varios resultados que suponen un 57,7% del total. El primero es el que proporciona una idea de simetría en sus dos vertientes (aplicando las propiedades que definen el movimiento matemáticamente y la simetría vista como un movimiento que sale del plano y sitúa la figura al otro lado del eje girada 180°) y el segundo es el que se deriva de girar la figura dada en el plano. En cualquiera de las dos situaciones, la figura que se obtiene es una figura plana.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, este trabajo aporta información sobre la necesidad de revisar los planes de formación de maestros en el área de matemáticas, a fin de contemplar de manera explícita el desarrollo de la visualización espacial a lo largo de su formación, dado que promover dicha habilidad en la educación primaria es un objetivo que se contempla en las diversas orientaciones curriculares.

Referencias y bibliografía

- Cohen, N. (2003). Curved solid nets. En N. Pateman, B. J. Dourgherty, & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 229-236).
- Fernández, M^a. T., Godino, J. D. & Cajaraville, J. A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema*, 26(42B), 559-588.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *EMA*, 3(3), 193-220.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231.
- Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano* (Colección Educación matemática en Secundaria, 13). Madrid: Síntesis.
- Mitchelmore, M. C. (1978). Developmental stages in children's representation of regular solid figures. *The Journal of Genetic Psychology*, 133, 229-239.
- Mitchelmore, M.C. (1980). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11(2), 83-93.
- Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problem of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.
- Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2009). Level of sophistication in representing 3D shapes. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference*, (Vol. 4, pp. 85-392).