



Una propuesta didáctica para el estudio del tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal

Bolívar Alonso **Ramírez** Santamaría
Sección de Matemática, Sede Occidente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
bolivar.ramirezsanamaria@ucr.ac.cr

Resumen

La presente investigación tiene como propósito fundamental el diseño, validación e implementación de una unidad didáctica que permita fortalecer el proceso de la enseñanza y aprendizaje del tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal dirigido a estudiantes de diferentes ingenierías, como la industrial, eléctrica, química, civil, telecomunicaciones, entre otras. Lo novedoso de esta propuesta es que usa software educativo, además de aplicaciones y utilidades de los temas a la ingeniería y diferentes ramas científicas. La unidad fue valorada ante un grupo de profesores con experiencia en la educación superior, para posteriormente ser validada en un curso de Álgebra Lineal (MA1004) de la Universidad de Costa Rica. Para ello se usó un grupo experimental y un grupo control. También, participaron docentes de la Universidad de Costa Rica como observadores externos y se dispónía de diferentes técnicas de recolección de información como cuestionarios, guías de observación y exámenes. Se llega a la conclusión principal que la propuesta realmente beneficia el interés, la motivación y la comprensión de los educandos durante el estudio del tema de Espacios Vectoriales.

Palabras clave: unidad didáctica, enseñanza, aprendizaje, álgebra lineal, espacios vectoriales.

Introducción

Actualmente, el trabajo del docente de Matemática en la educación superior no solo se enfoca en la suposición de transmitir los conocimientos demandados en los programas de los diversos cursos de una forma magistral y positivista, pues, de acuerdo con Costa, di Domenicantonio, Prodanoff, Tolosa, y Guarepi (2008), “En los últimos años se ha venido observando una tendencia de cambio en el modelo de enseñanza y aprendizaje...” (p. 1), esto en

el sentido que también se debe procurar que el educando use tecnologías y realice interrelaciones y aplicaciones de los nuevos contenidos adquiridos.

En esta misma dirección, y en particular, al referenciar el curso de Álgebra Lineal (MA1004) de la Universidad de Costa Rica, se observa que este procura que los discentes sean competentes para aplicar las nuevas estructuras cognitivas a sus respectivas disciplinas (Carta al estudiante de Algebra Lineal, II Ciclo del 2014). Más aún, Ortiz, Rico, y Castro (2008) aseguran que esta asignatura "...propicia una riqueza de aplicaciones en la modelización de situaciones del mundo real" (p. 182).

Sin embargo, según Boza (1998), a los estudiantes "...muchas veces se les pide que aprendan los rudimentos del algebra lineal, como si ella fuera un fin en sí misma, sin tomar en cuenta que esta disciplina se desarrolló en buena medida para satisfacer demandas de la física, la geometría y las ecuaciones diferenciales" (p. 23). Es así, como muchos docentes de Matemática, atendiendo a una pedagogía tradicional, al dar el curso de Álgebra Lineal, únicamente enseñan de manera instrumental y conductista los diferentes temas de este curso (Uzuriaga, Arias, y Manco, 2010), sin darles mayor contextualización y mucho menos aplicaciones a la vida cotidiana, a la realidad y al mundo tecnológico.

Igualmente, Uzuriaga et al. (2010) mencionan que se está ante un problema de metodología y no de contenidos, además que

"No existe claridad en todos los docentes sobre la importancia que tiene el álgebra lineal como asignatura de ciencias básicas en la formación de un ingeniero, desconociendo el aporte que hace la matemática al desarrollo del pensamiento del alumno y las herramientas que proporciona al modelado y soluciones de aplicaciones en la ingeniería" (p. 290).

En este sentido, los educadores de Matemática, sin perder el rigor que esta ciencia exige, deben desarrollar y buscar metodologías que le permitan al estudiante, dentro de sus expectativas, darse cuenta de la relevancia que les aporta los conocimientos matemáticos que brinda el Álgebra Lineal para resolver y generalizar situaciones que se le presentaran en su desarrollo profesional.

Por otro lado, muchos de los temas de Álgebra Lineal en la educación superior pueden ser muy abstractos para el estudiantado. Particularmente, Kú, Trigueros y Oktac (2008) opinan que los educandos no llegan a interiorizar adecuadamente los contenidos asociados al tema de Espacios Vectoriales, y que esto puede repercutir en su rendimiento académico. Además, concluyen que existe una necesidad de trabajar desde una perspectiva pedagógica para sanar estas dificultades que se están presentando en el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema en cuestión.

Azofeifa (2009), respecto al aprendizaje y enseñanza del concepto de Espacio Vectorial, recalca que

...muchas veces levantamos un edificio muy lujoso en definiciones y teoremas, correlaciones y ejercicios difíciles, bien rebuscados, sin embargo, muy pobres en motivaciones, explicaciones conceptuales y aplicaciones. Tal vez ni siquiera tenemos idea por qué lo hacemos ni para qué. Podría ser para cumplir un programa bastante amplio y exigente. Así también con mucha más razón, menos el estudiante tendrá una visión y motivación... (p. 180).

En relación con lo anterior, se deben buscar otros caminos didácticos y metodológicos que puedan generar en los discentes una mayor motivación y comprensión en los contenidos que involucra el tema de Espacios Vectoriales. De esta forma, surge el siguiente problema:

¿Se puede facilitar la comprensión del tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal utilizando las aplicaciones de este tópico en ramas de la ingeniería y de la tecnología, además de recursos informáticos?

Antecedentes

Es importante subrayar que existen bastantes trabajos acerca de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal o contenidos afines a ésta, sin embargo, existen muy pocas investigaciones que traten el tema de Espacios Vectoriales desde una perspectiva pedagógica.

Se inicia con el trabajo realizado por Moreno (2001), el cual pretende facilitar a los estudiantes la comprensión y memorización del tema de Espacios Vectoriales por medio de una analogía, esto mediante el uso de los colores primarios y sus respectivas mezclas, sin dejar de lado la rigurosidad matemática de los contenidos tratados.

Por otro lado, existe un proyecto elaborado por Ortega (2002), en el cual se estudia el comportamiento de una estrategia didáctica que incorpora el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal, cuyas estrategias consisten en que el estudiante, con ayuda de dicho programa, indague y concluya sobre propiedades de ciertos temas sin que el docente se las haya dado previamente.

Por su parte, Montero, Martínez, Moran, Alías, y Rodríguez (2004) desarrollaron una aplicación multimedia llamada ALGTEC, la cual pretende acercar al educando de ingeniería con temas de Álgebra Lineal y a algunas de sus aplicaciones en el mundo tecnológico, es decir, "...poner al alcance del alumno una aplicación que pretende hacerle entender a un mejor cómo determinados conceptos algebraicos son la base de conceptos asociados a aplicaciones técnicas" (p. 2).

Otro trabajo de enorme valor es el elaborada por Costa et al. (2008), que implementaron estrategias que mejoran el aprendizaje del concepto de campo vectorial, apoyándose con el software matemático Maple. El objetivo primordial que perseguían era que el estudiante, desde la visualización de campos vectoriales, sea capaz de reconocer campos de uso común en física e interpretar aplicaciones de estos. Al final, estos autores concluyen que un 62% de los estudiantes alcanzaron un amplio conocimiento, y con mayor significancia, de los campos vectoriales y sus aplicaciones.

Por último, Kú et al. (2008), quienes apoyados en la teoría APOE (acción-proceso-objeto- esquema), presentan un conjunto de construcciones mentales que los discentes pueden desarrollar para la comprensión del concepto de base de un espacio vectorial. En este trabajo se construyó una entrevista para generar datos de las posibles construcciones mentales, que ellos llaman una descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial.

Fundamentación teórica

Dentro del marco teórico de la investigación, se fundamenta teoría sobre unidades didácticas, aplicaciones y el uso de la tecnología.

Unidades Didácticas

En la enseñanza y aprendizaje formal se suele hablar sobre unidades didácticas, cuya conceptualización está profundamente ligada al pensamiento del profesor (Fernández, Elortegui, Rodríguez, y Moreno, 1999). De esta forma, Area (1993) se refiere a la unidad didáctica como "...un segmento o porción de enseñanza y aprendizaje significativo, con entidad en sí mismo configurado en torno a un tema, centro de interés o eje organizador. Puede variar en su longitud, extensión o relevancia" (p. 34).

Fernández et al. (1999) escriben que "...la unidad didáctica es un conjunto de ideas, una hipótesis de trabajo, que incluye no sólo los contenidos y los recursos necesarios para el trabajo diario, sino unas metas de aprendizaje, una estrategia que ordene y regule en la práctica educativa los diversos contenidos del aprendizaje..." (p. 13). Además, estos autores insisten en que el desarrollo de la unidad didáctica está íntimamente relacionado con la forma de pensar del docente o grupo de docentes que la elaboren.

Además, García (2009) establece que la unidad didáctica es:

"Un conjunto integrado, organizado y secuencial de los elementos básicos que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje (motivación, relaciones con otros conocimientos, objetivos, contenidos, método y estrategias, actividades y evaluación) con sentido propio, unitario y completo que permite a los estudiantes, tras su estudio, apreciar el resultado de su trabajo" (p. 1).

Se puede observar las definiciones anteriores tienen aspectos en común. En fin, una unidad didáctica busca organizar la práctica de la enseñanza y aprendizaje de manera eficiente, precisa, ordenada, estructurada, articulada y completa. Para planificar dicho proceso se usan elementos del currículo, de forma ordenada, como: los contenidos, los objetivos, las pautas metodológicas y la evaluación.

Las unidades didácticas presentan una amplia variedad de características, por lo que diversos autores tienen sus aportes al respecto. A continuación se presenta, de acuerdo con Area (1993), Rodríguez (2004) y Corrales (2010), un compendio de estas características:

- Es una unidad de trabajo que articula los objetivos, los contenidos, la metodología y la evaluación, por lo que tiene un carácter unitario.
- Es un instrumento de trabajo o de planificación que permite al docente organizar su práctica educativa para articular unos procesos de enseñanza y aprendizaje de calidad.
- Es ajustada al grupo y al estudiante, en el sentido que responde a las características concretas y a la diversidad de los educandos a los que se dirige.
- Es un conjunto de experiencias de aprendizaje relacionadas con un eje organizador que contiene la concreción de los contenidos a desarrollar y las actividades que deben realizarse.
- Es completa pues debe de ser un conjunto en el que cada una de sus partes estén debidamente pensadas, organizadas, entrelazadas y acabadas dándole solidez y empaque a dicha unidad didáctica.
- Las unidades didácticas pueden tener diferentes duraciones, autores, lugares, ejes organizadores, ambientes o grados de definición o terminación de su diseño.
- Las unidades didácticas se desarrollan con base en un tema en específico.

Una perspectiva pedagógica de las aplicaciones de la Matemática y el Álgebra Lineal

Dentro de un enfoque contextual de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, se supone que la mente del estudiante busca, de forma natural, el significado de los nuevos conocimientos en el contexto, es decir, en el ámbito donde la persona se encuentra.

También, las aplicaciones de la Matemática, dentro de un marco pedagógico, permiten que el educando establezca relaciones entre la teoría y el contexto del mundo real, esto con el fin de darle a los conceptos matemáticos un cierto sentido y utilidad.

Con ello, se persigue que el aprendizaje se refuerce cuando los conceptos se presentan en un contexto de relaciones que son familiares o conocidas para el estudiante. Según Mora (2003), este tipo de situaciones didácticas tienen que ver con actividades significativamente importantes para los jóvenes.

De hecho, en relación con García (2004):

Es conocida entre los profesores de matemática la frase formulada por muchos estudiantes en una clase *profesor y para qué sirve esto*, por lo que la poca motivación de muchos alumnos para el aprendizaje de la Matemática tiene una relación directa con las dificultades de sus profesores para explicar por qué se enseña uno u otro tema, y en virtud de ello, para presentar problemas prácticos sencillos que justifiquen su utilidad... (p. 8).

En este sentido, el Álgebra Lineal tiene importantes y diversas conexiones con áreas dentro y fuera de la Matemática, de hecho, siguiendo esta línea, Paredes, Iglesias, y Ortiz (2009) consideran que "...el estudiante debe adquirir habilidades para seleccionar métodos apropiados para la aplicación de la Matemática en diferentes áreas de la vida ..." (p. 88).

Pero, estas aplicaciones suelen ser omitidas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal en la educación superior, y sumado la complejidad del lenguaje y la alta abstracción de los conceptos de esta rama de la Matemática, conlleva a que los educandos no se involucren de forma activa y consciente en las clases (Azofeifa, 2009).

Gómez (2003) refuerza la proposición anterior pues menciona que las aplicaciones quedan en un segundo plano durante el acto educativo.

La tecnología como insumo didáctico

La relevancia del Álgebra Lineal para las aplicaciones se ha desarrollado en forma proporcional al incremento de la informática. Es por ello que "La ciencia del cómputo está así intrincadamente ligada al álgebra lineal, a través del crecimiento explosivo del procesamiento en paralelo y de los cálculos en gran escala" (Lay, 2012, p. 2).

Es por ello que actualmente los ingenieros trabajan en problemas mucho más complejos que involucran el álgebra lineal y cálculos numéricos a gran escala, los cuales son extremadamente difíciles (por no decir imposibles) de resolver, por lo que se acude a software especializados que los solucionen.

Esto justifica el hecho que los estudiantes de ingeniería que cursan Álgebra Lineal deben conocer herramientas informáticas que permitan desarrollar estos cálculos, con el fin de que en su futura labor profesional puedan recurrir a éstas.

Más aún, "...la tecnología tiene en el álgebra un terreno de aplicación para beneficio de los estudiantes y profesores. El uso de la computadora y un software de cálculo simbólico abren la atractiva posibilidad de experimentar con la matemática" (Paredes et al., 2009, p. 88).

Tampoco el objetivo es realizar de aprendizaje completamente virtuales, sino, acercar e interesar al estudiante al uso de software de cálculo simbólico y numérico adecuados para el curso de Álgebra Lineal, con el fin de enriquecer la labor educativa, en el sentido de valorar la importancia de la motivación y de la experiencia vivencial para obtener aprendizajes significativos y perdurables.

Algunos paquetes computacionales que se pueden usar con este fin son Scilab, Mathematica, Derive, Maple, Matlab, Maxima, entre otros.

Elementos metodológicos de la investigación

El desarrollo de la investigación se fundamenta en el enfoque mixto; es decir, un enfoque donde se recolectan, analiza y vinculan datos cuantitativos y cualitativos en una misma investigación, centrándose más en uno de estos o dándoles la misma importancia, con el fin de responder al planteamiento del problema (Hernández, Fernández, y Baptista, 2010).

En cuanto a las técnicas e instrumentos para recolectar la información, se destacan la observación y el cuestionario. Para todos los cuestionarios, se plantearon preguntas abiertas y cerradas. Éstas últimas utilizaban un escalamiento Likert, definido éste como un conjunto de ítems que se presentan en forma de afirmaciones para medir la reacción del sujeto en cinco categorías (Hernández et al., 2010). Las cinco categorías (o indicadores) van desde totalmente desacuerdo (con una puntuación de 1) hasta totalmente de acuerdo (con una puntuación de 5). Posteriormente, las puntuaciones o resultados obtenidos se promedian para realizar un análisis en el intervalo [1,5], donde 1 representa una opinión o aptitud muy desfavorable y 5 representa una opinión o actitud muy favorable para una afirmación positiva.

Las etapas de la investigación se generalizan, de forma cronológica, en las siguientes:

Etapas 1

Diseño y elaboración de la Unidad Didáctica en el tema de Espacios Vectoriales, en la cual se utiliza software educativo y aplicaciones a la ingeniería y la tecnología, las cuales permiten visualizar y modelar los tópicos estudiados. Dicha unidad consta de 10 capítulos; el primero corresponde a la introducción y elementos esenciales de la unidad (introducción, objetivos, tiempo probable y conocimientos previos). Un segundo capítulo hace relación al uso del software (el paquete usado es Mathematica 9, del cual la Universidad de Costa Rica posee licencia para uso de profesores y estudiantes) y la última sección compete a una lista de ejercicios que evalúan los conocimientos teóricos adquiridos al finalizar la unidad. En los demás capítulos se desarrollan los conceptos, actividades y evaluación referentes al tema de estudio y se caracterizan por tener un orden curricular estricto (título, objetivos específicos, contenido actividad introductoria, desarrollo y evaluación). Por último, la unidad posee al final todas las referencias utilizadas para su esbozo.

Etapa 2

En esta etapa se procede con la valoración de la Unidad Didáctica ante ocho profesores de Matemática con experiencia en educación superior y que además hayan impartido cursos de Álgebra Lineal. Para esta etapa se usó un cuestionario con preguntas abiertas y cerradas.

Etapa 3

Aquí se realiza la validación de la Unidad Didáctica, para lo cual se usan dos grupos de Álgebra Lineal (MA1004) de la Universidad de Costa Rica, uno denominado experimental (con 20 estudiantes), donde se implementa la unidad, y otro llamado grupo control (con 30 estudiantes), donde no se implementa la unidad, esto con el fin de realizar las respectivas comparaciones. Para establecer si los grupos eran comparables, se hizo un estudio en cuanto al porcentaje de asistencia, edad, género, tipo de institución de educación secundaria de procedencia, situación laboral, cantidad de repitentes, cantidad de horas de estudio que dedica al curso de Álgebra Lineal, cantidad de cursos matriculados, entre otros criterios. En esta etapa se utilizan cuestionarios (entre estos, dos cuestionarios para medir, respectivamente, la aptitud y opinión antes y después de usar la unidad), un examen corto y la participación de observadores externos en el grupo experimental, para lo cual también se construye una guía de observación. La validación tardó dos semanas, con cinco horas clases por semana distribuidos en dos días, siendo en total cuatro clases.

El curso de Álgebra Lineal (MA1004) de la Universidad de Costa Rica es un curso dirigido a diferentes ingenierías, que se caracteriza por ser un curso de cátedra, por lo que se emplean los mismos exámenes para todos los grupos. En este curso se trabaja los temas de Sistemas de Ecuaciones Lineales, Matrices, Determinantes, Geometría Vectorial, Rectas y Planos, Espacios Vectoriales, Ortonormalidad y Proyecciones, Transformaciones Lineales, Valores y Vectores Propios y Curvas y Superficies Cuadráticas.

Etapa 4

En ésta se procede con el análisis y triangulación de todos los resultados obtenidos con los instrumentos de recolección de información. Seguidamente se establecen las conclusiones y limitaciones.

Discusión de los resultados obtenidos

Valoración de la unidad didáctica

Para el cuestionario usado con el fin de valorar la Unidad Didáctica ante ocho profesores de Matemática, las preguntas cerradas mediante el escalamiento Likert reflejan que el promedio por pregunta y por docente es 4,69 en cuanto a las afirmaciones dadas, lo cual permite inferir que realmente la unidad desarrollada puede ser una herramienta pedagógica que favorezca el estudio del tema de Espacios Vectoriales, en el sentido que puede ayudar a mejorar la motivación, interés y comprensión del educando al estudiar el tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal dirigido a diferentes ingenierías. Además, se realizan correcciones y sugerencias hechas por los docentes valoradores, entre ellas escribir más ejercicios que involucren

aplicaciones, arreglos de formato y mejorar el capítulo 9 sobre espacio fila y espacio columna de una matriz.

Validación de la unidad didáctica

En cuanto a la validación de la unidad didáctica, primero los estudiantes del grupo experimental completaron un cuestionario para conocer la opinión y actitud de ellos antes de estudiar en clase el tema de Espacios Vectoriales mediante la Unidad Didáctica. Dicho cuestionario lo completaron 20 educandos. Los resultados son los siguientes:

Para la primera afirmación “Las actividades de clase empleadas en los temas estudiados hasta ahora en Álgebra Lineal (MA1004) han beneficiado mi aprendizaje de la teoría”, obtiene una puntuación promedio de 3,25. Esto quiere decir que los educandos se sienten con un nivel de conformidad sobre las actividades desarrolladas hasta ahora en el curso.

Además, para la segunda proposición “Los ejemplos y ejercicios planteados hasta ahora en el curso Álgebra Lineal (MA1004) me han ayudado a la comprensión según el desarrollo teórico”, tiene un resultado medio de 3,15, lo cual permite establecer que también los alumnos se encuentran en un estado de conformidad casi neutral con esta aseveración.

La tercera declaración “Mi interés y motivación son muy buenos ante los temas de estudio vistos hasta ahora en el curso Álgebra Lineal (MA1004)” promedia un 3,55. Esta calificación refleja un interés y una motivación buena por parte de los estudiantes antes de iniciar el estudio del tema de Espacios Vectoriales con la Unidad Didáctica, pero es tendiente a lo neutral, en el sentido que tampoco es la más favorable.

Por otro lado, la cuarta afirmación “La metodología utilizada por el profesor hasta ahora en el curso Álgebra Lineal (MA1004) ha favorecido mi aprendizaje de los temas estudiados” tiene una media de 2,85, lo que permite establecer que los alumnos siguen estando casi que en un estado de conformidad, no obstante tampoco es favorable.

La quinta y última proposición “En general, conozco sobre aplicaciones y utilidades de Álgebra Lineal a la ingeniería, la tecnología y otras ramas científicas que me ayuden a mejorar mi comprensión de la teoría del curso estudiada hasta ahora”, tiene una calificación media de 2,45, la más baja de todas, y lo cual funda el hecho que en el curso no se hayan trabajado ejemplos que involucren actividades de este tipo.

El promedio ponderado total corresponde a un 3,05, que es casi neutral, afirmando la conformidad del estudiante hasta ahora en el curso de Álgebra Lineal. La aplicación de la unidad didáctica, entre otros aspectos, mejoró estos resultados.

En efecto, los mismos 20 educandos del grupo experimental completaron un cuestionario para conocer su opinión y actitud después de estudiar en clase el tema de Espacios Vectoriales mediante la Unidad Didáctica. Los resultados se muestran a continuación:

Para la primera afirmación “El uso de aplicaciones, utilidades y del software educativo durante el desarrollo teórico me permitió o un mejor aprendizaje de los conceptos vinculados al tema de Espacios Vectoriales”, se obtiene un promedio de 4,4, que en comparación con el resultado obtenido de 3,25 en la primera proposición del cuestionario anterior, se aumenta significativamente. En este sentido, después de aplicar la unidad, los alumnos del grupo experimental presentan una actitud muy favorable pues consideran que realmente su aprendizaje se beneficia con el uso de aplicaciones, utilidades y del software educativo.

En cuanto a la segunda declaración, “Los ejemplos y ejercicios de la Unidad Didáctica tienen un nivel significativo y adecuado según el desarrollo teórico, además de que me han permitido una mejor comprensión”, la calificación media es de 4,65. En contraste con la segunda proposición del anterior, la cual tiene un resultado de 3,15, se observa que realmente los discentes consideran que los ejemplos trabajados en la unidad son representativos para su aprendizaje, e inclusive, pueden beneficiar la comprensión de los tópicos estudiados.

La tercera enunciación corresponde a “Mi interés y motivación por el tema de estudio aumentó al conocer sobre diferentes aplicaciones y utilidades a diversas ramas científicas de los Espacios Vectoriales”, la cual promedia un puntaje de 4,45. En contraposición, la tercera afirmación del cuestionario anterior, tiene una media de 3,55, que a su vez es aceptable, pero aún así se mejora lo suficiente hasta alcanzar un nivel bastante favorable en el escalamiento Likert.

Esto también permite establecer que la actitud de los estudiantes es positiva a lo largo de las clases en que se implementó la unidad.

Por otro lado, la media de 4,7 le pertenece a la cuarta afirmación “La metodología utilizada por el profesor e inducida por la Unidad Didáctica favoreció mi aprendizaje del tema de Espacios Vectoriales”, lo que permite fundar que la metodología semi magistral inducida y recomendada por la unidad es del agrado de los estudiantes. En comparación, la cuarta proposición del cuestionario anterior tiene un resultado de 2,85, se nota que existe una brecha enorme a favor del uso de la unidad.

La quinta aseveración “En general, la Unidad Didáctica empleada para el estudio de Espacios Vectoriales y el conocer sobre las aplicaciones a la ingeniería, la tecnología y otras ramas científicas de dicho tema, me ayudo para una mejor comprensión de la teoría” posee un promedio de 4,7, y en contraste con la puntuación de 2,45 de la quinta afirmación del cuestionario anterior, se nota una enorme diferencia, en el sentido que los estudiantes sí consideran importantes conocer utilidades a la ingeniería y la tecnología de los temas que se estudian.

Además, el promedio general de la apreciación por pregunta y por estudiante es de 4,58, el cual se compara con su análogo del cuestionario anterior, que corresponde a 3,04, con lo que permite fortalecer la veracidad de la hipótesis de que la Unidad Didáctica empleada para estudiar Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal dirigido a educandos de ingeniería realmente puede beneficiar el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema en cuestión.

También, los comentarios hechos por los estudiantes en las preguntas abiertas del cuestionario para validar la unidad siempre fueron muy positivos y favorables hacia el uso de la unidad en clases de Álgebra Lineal para estudiar Espacios Vectoriales, siendo esto pruebas cualitativas que reafirman la hipótesis del párrafo anterior. Igualmente, los educandos hicieron algunas sugerencias, como de disponer de más tiempo para realizar más ejercicios y actividades de evaluación en clase, por lo que en la unidad el tiempo probable pasó de 10 horas lectivas a 15 horas lectivas.

Cabe destacar que hubo al menos dos observadores por clase durante las cuatro lecciones que se disponía para implementar la unidad didáctica, los cuales disponían de una guía de observación donde podían anotar cualquier observación o comentario y debían llenar preguntas

cerradas mediante un escalamiento Likert que medían el interés, la motivación y otros aspectos durante el inicio, desarrollo y cierre de la clase. Las puntuaciones siempre fueron arriba de 4, los comentarios siempre fueron constructivos y además permitieron hacer arreglos de formato y redacción a la unidad.

Dentro de la validación de la unidad se aplicó un mismo examen corto, que evalúa los contenidos teóricos de Espacios Vectoriales vistos en ambos grupos, tanto al grupo experimental y al grupo control. El promedio obtenido en el primer grupo corresponde a 60,68, y al segundo grupo es de un 46,98.

Abonado a lo anterior, también se consideró las notas de los alumnos de ambos grupos en el segundo examen parcial de Álgebra Lineal (MA1004), sólo en aquellas preguntas que evalúan contenidos de Espacios Vectoriales. Estos dos grupos realizan el mismo examen pues este curso de la Universidad de Costa Rica se caracteriza por ser un curso de cátedra, consecuentemente los exámenes son colegiados. En fin, los resultados son los siguientes:

En el grupo experimental, el promedio del segundo examen parcial es de un 49,11, mientras que la nota media en los puntos seleccionados de la evaluación es de un 71,40. En contraste, en el grupo control la calificación media en el segundo examen parcial es de un 49,03 y el promedio en los puntos seleccionados de la prueba es un 56,05. Entonces, a pesar de que ambos grupos poseen un promedio muy similar en el examen en cuestión, sí existe una diferencia significativa si sólo se consideran las preguntas que evalúan e tema de Espacios Vectoriales.

En general, las calificaciones anteriores, permiten establecer que la implementación de la unidad didáctica en el grupo experimental realmente sí beneficia la comprensión de los conceptos relacionados al tema de Espacios Vectoriales, pues el rendimiento académico promedio del grupo experimental posee una mejoría significativa en contraste con las calificaciones del grupo control.

Conclusiones

La implementación de actividades pedagógicas que utilizan aplicaciones y utilidades a la ingeniería y diversas ramas científicas, realmente favorecen el proceso de la enseñanza y aprendizaje del tema de Espacios Vectoriales en cursos de Álgebra Lineal, además de que beneficia la motivación y el interés de los estudiantes durante la clase.

Paralelamente, el uso del software educativo ayuda al estudiante a ejercitar conocimientos que ya posee en su estructura cognitiva previa, lo cual a su vez permite agilizar cálculos. También, por su carácter interactivo, admite desarrollar actividades intelectuales que propician un aprendizaje significativo, además que los paquetes computacionales son casi una necesidad cuando se deben resolver extensas y tediosas operaciones.

Al igual que el uso de las unidades didácticas en el proceso de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal que vinculen las ideas de los párrafos anteriores, permite captar y mantener el interés de los alumnos y a la vez estructura y regula la práctica educativa en cuanto a sus componentes curriculares, tales como contenidos, objetivos, metodología, evaluación y motivación.

En suma, y según los resultados de esta investigación, los estudiantes del grupo experimental y los observadores externos siempre mantuvieron una opinión y actitud positiva (tanto cuantitativa como cualitativa) hacia las actividades que involucraba la Unidad Didáctica empleada para el tema de Espacios Vectoriales, lo cual evidencia la importancia y el potencial de utilizar nuevas propuestas pedagógicas bajo una enseñanza contextualizada en contenidos de Álgebra Lineal.

De allí la relevancia que en todos los cursos de Matemática dirigidos a estudiantes de diferentes ingenierías, los docentes deben propiciar a los educandos de actividades de clase donde se visualicen (o inclusive modelen) las aplicaciones y utilidades de los tópicos estudiados o por estudiar, además del uso del software educativo.

Referencias y bibliografía

- Area, M. (1993). *Unidades didácticas e investigación en el aula*. España: Nagal.
- Azofeifa, C. (2009). *Aprendizaje del concepto de espacio vectorial*. Conferencia presentada en sexto congreso internacional sobre la enseñanza de la Matemática asistida por computadora en la Universidad Tecnológica de Costa Rica.
- Boza, J. (1998). Bosquejo histórico del Álgebra lineal. *Reflexiones. Universidad de Costa Rica*, 72, 23-36.
- Corrales, A. (2010). La programación a medio plazo dentro del tercer nivel de concreción. Las unidades didácticas. *Revista Digital de Educación Física*, 1(2). Recuperado de dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3175435.pdf
- Costa, V., di Domenicantonio, R., Prodanoff, F., Tolosa, E., & Guarepi, V. (2008). *Acciones interdisciplinarias entre Matemática y Física para mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo vectorial*. Buenos Aires: Editorial de la Universidad Nacional de Salta.
- Fernández, J., Elortegui, N., Rodríguez, J., & Moreno, T. (1999). *¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras?* Sevilla: DIADA.
- García, L. (2004). *La modelación matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial* (Tesis inédita de doctorado). Universidad Autónoma de Nuevo León, México.
- García, L. (2009). *Las unidades didácticas*. Madrid: BENED.
- Gómez, J. (2003). La modelización matemática: una herramienta válida en la enseñanza de las matemáticas universitarias. *SUMA*, 42, 37-45.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.
- Kú, K., Trigueros, M., & Oktac, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.
- Lay, D. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (3a ed.). México: Prentice Hall.
- Montero, J., Martínez, E., Moran, J., Alías, F., & Rodríguez, J. (2004). *ALGTEC: un complemento a la enseñanza del Álgebra Lineal en carreras de ingeniería de telecomunicaciones*. Conferencia presentado en el simposio nacional de la Unión Radio Científica Internacional (URSI). Recuperado de <http://www.educoas.org/virtualeduca/virtual/actas2002/actas02/414.pdf>
- Mora, D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Pedagógica*, 24(70), 181-272.
- Moreno, M. (2001, Junio). Los espacios vectoriales, el amarillo, el rojo y el azul. *SUMA*, 37, 75-82.
- Ortega, P. (2002). *La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico* (Tesis inédita de doctorado). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

- Ortiz, J., Rico, L., & Castro, E. (2008). La enseñanza del Álgebra Lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: un estudio con profesores en formación. *PNA*, 2(4), 181-189.
- Paredes, Z., Iglesias, M., & Ortiz, J. (2009). Los docentes y su formación inicial hacia el aula de Matemática. Una propuesta con modelización y nuevas tecnologías. *Revista Iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*, 7(1), 85-102.
- Rodríguez, M. (2004). Generalidades de la planificación de la unidad didáctica en temas de educación ambiental. *Biocenosis*, 18(1-2), 26-37.
- Universidad de Costa Rica. Escuela de Matemática. (II Ciclo del 2014). *Carta al estudiante del curso Álgebra Lineal (MA1004)*. San José, Costa Rica.
- Uzuriaga, V., Arias, J., & Manco, D. (2010, Abril). Diagnóstico y análisis de algunas causas que dificultan el aprendizaje del álgebra lineal en estudiantes de ingeniería. *Scientia Et Technica*, 16(44), 286-291.