Desafíos para llegar a la generalización de un problema.

Candelaria **González** Polo
Escuela Normal de Atlacomulco
México
candit apolo@gmail.com
Sara **Arteaga** Rivera
Benemérita Escuela Normal de Maestros
México
arteagasa@yahoo.com.mx

Resumen

En un estudio exploratorio de resolución de problemas con estudiantes de Educación Básica Primaria fue evidente que los niños dominan hábilmente los algoritmos de la suma y resta, pero no van más allá de obtener el resultado. Situación que, según reportes de investigación, tiene su origen en los docentes que centran su atención en la tarea de verificar el nivel de mecanización de los algoritmos de las operaciones que poco tienen que ver con los procesos de generalización de las propiedades de los números y sus operaciones. Como resultado del estudio, se realizó un proyecto bajo la forma de investigación acción para trabajar problemas que permiten a los niños aprender a partir de los conocimientos previos, dar sentido y significado a los objetos matemáticos, pensar por sí mismos, disfrutar y desear seguir aprendiendo matemáticas y lograr que la generalización forme parte de sus aprendizajes cotidianos.

Palabras clave: resolución de problemas, Educación Básica, conocimientos previos, objetos matemáticos, algoritmos.

Introducción

Durante el ciclo escolar 2012-2013 se desarrolló la propuesta japonesa denominada *Estudio de Clases* incluida en el curso Aritmética: su aprendizaje y su enseñanza (2012) en sus tres etapas, con estudiantes de Licenciatura en Educación Primaria en México. En el mencionado estudio se obtuvieron importantes hallazgos para desarrollar en el ciclo escolar 2013-2014 un proyecto de resolución de problemas con un grupo de primer grado de Educación Básica Primaria en México.

El estudio de clases es una estrategia japonesa que empezó a finales del siglo XIX y tomó su forma actual a principios del siglo XX. Es una estrategia que Japón comparte con el mundo, específicamente con países en vías de desarrollo con historia propia, y contextos distintos para "ampliar y enriquecer la cooperación hacía la educación básica" (JICA, 2005). La experiencia japonesa consta de tres etapas. En la primera etapa se consideran los propósitos y la forma de presentación del contenido; se incluyen conocimientos, habilidades, actitudes y valores que se pretende que los alumnos aprendan; se desarrolla un plan de clase donde se especifica el inicio, desarrollo y cierre de la misma, para alcanzar sus propósitos de acuerdo al contenido de la unidad que será enseñada en donde el maestro predetermina ciertas conjeturas a las posibles respuestas de los alumnos y a las preguntas que puedan surgir en relación al propósito. También es importante el manejo del pizarrón, elemento fundamental en el Estudio de Clases, ya que lo plasmado en él, es parte de los insumos para la etapa de reflexión y evaluación. Para el estudio exploratorio se diseñó un plan de clase considerando principios didácticos sugeridos desde 2008 por la Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación [DGESPE] y validados a priori con base a criterios establecidos.

En la segunda etapa del Estudio de Clases, se pone en práctica el plan de clase en condiciones reales de trabajo docente, en está, es importante que el maestro se prepare para cualquier contingencia en el aula, pues las respuestas de los niños son impredecibles. En el estudio exploratorio, se llevó a cabo el plan de clase con dos grupos de segundo y uno de cuarto grado de Educación Básica Primaria. La clase en el primer grupo de segundo grado fue conducida por una docente en formación y asistieron como observadores: docentes en formación, directores de escuelas primarias, profesores de segundo grado de otras escuelas primarias, profesores con perfil en el área de matemáticas, administradores educativos de la Escuela Normal y profesores invitados. En el segundo grupo de segundo grado de Educación Básica Primaria una alumna en formación condujo la clase y estuvieron como observadores dos estudiantes en formación, la profesora del grupo y un docente con especialidad en matemáticas. Para el grupo de cuarto grado, cada uno de los veinte docentes en formación atendió a un niño de manera particular, considerando las recomendaciones obtenidas durante las dos experiencias con los grupos de segundo grado. En esta última experiencia, cada docente en formación diseñó su propio material didáctico y desarrolló su particular estrategia para el logro del propósito con el niño a su cargo.

La tercera etapa del Estudio de Clases consiste en la evaluación y reflexión de lo acontecido durante la *clase;* la reflexión sucede inmediatamente después de haber concluido la clase. Durante esta fase, en plenaria, el maestro que conduce la sesión de trabajo, expone su experiencia, las dificultades y fortalezas vividas durante la clase en función a los propósitos, los contenidos y los resultados de aprendizaje esperados. Posteriormente los observadores participan con los resultados de su observación para analizar y hacer sugerencias acerca de la clase y cómo mejorarla. En el primer grupo del estudio exploratorio, la evaluación y reflexión se llevó a cabo en una mesa redonda en la que se expusieron y se hicieron las recomendaciones emanadas de una guía de observación previamente asignada; en el segundo grupo se filmó la clase y se analizó con los docentes en formación en una sesión plenaria con base en la guía de observación y se obtuvieron conclusiones. Y con el grupo de cuarto grado, los estudiantes en formación informaron sobre sus hallazgos. Entre los comentarios y reflexiones obtenidos sobresalieron los siguientes: se evidenció en el primer caso, que los niños obtienen los resultados de las sumas y restas acertadamente pero dejan hasta allí el proceso; que el exceso de imágenes y figuras en el material utilizado dificultó su eficiencia; y que el desorganizado uso del pizarrón privó de estrategias para desarrollar los procesos de inducción matemática necesarios para el logro del propósito. Es relevante mencionar que en el Estudio de Clases el uso adecuado del pizarrón significa organizar la información de forma que apoye hallar patrones para llegar a la generalización. En el segundo caso, los niños resolvieron varias de las sumas y restas incluidas en los materiales a resolver sin distinguir algún patrón que revelara generalidades, y hubo también un desorganizado uso del pizarrón y en el tercer caso los niños operaban hábilmente las sumas y restas pero no llegaban más allá de obtener el resultado. Después de cada experiencia se consideraron las debilidades presentadas y se reorientaron en el plan de clase, en los materiales utilizados tanto grupales como individuales y en el uso del pizarrón.

A partir de las tres experiencias, se identificó que los niños manejan correctamente los algoritmos de la suma y la resta, pero difícilmente logran descifrar la “magia” implícita en los planteamientos propuestos. En reportes de Block D., Dávila M. y Martínez P. (1995) y la experiencia muestra que si la educación matemática que han recibido los niños no va más allá de la mecanización de algoritmos y que si los docentes consideran que aprender matemáticas es desarrollar hábilmente un algoritmo convencional, es casi imposible que los estudiantes hagan matemáticas por sí mismos, disfruten desarrollar procesos matemáticos, deseen seguir aprendiendo con base a sus conocimientos previos y lleguen a generalizaciones, es decir, aprendan matemáticas. Bajo estos planteamientos pensamos que el éxito para llegar a la generalización de un problema y lograr que los niños sientan el deseo de aprender matemáticas por ellos mismos depende de las condiciones y del tipo de problemas que se manejan con los niños en el salón de clases generados a partir de buenas preguntas para esperar buenas respuestas por parte de los alumnos.

A partir de los resultados del estudio exploratorio descrito y los reportes de investigación, se diseñó un proyecto bajo la forma de investigación acción con características propuestas por Elliott (2005), para reflexionar sobre la propia práctica y a la vez impulsar el desarrollo profesional de los docentes con procesos de enseñanza que promuevan el aprendizaje para la comprensión; con el propósito de trabajar con problemas abiertos con los niños de primer grado de Educación Básica Primaria, para suscitar en los niños aprender a partir de los conocimientos previos, dar sentido y significado a los objetos matemáticos, a pensar por sí mismos, el disfrute de sus aprendizajes y la identificación de patrones para obtener generalizaciones.

Desarrollo

Definimos un problema abierto, aquel desafío que principalmente da origen a múltiples soluciones y a un entendimiento generalizado al comprender la idea matemáticamente. En el proyecto llevado a cabo con el grupo de primer grado de Educación Básica Primaria durante el ciclo escolar 2013-2014, se buscó que los problemas a trabajar con los niños tuviesen las características descritas en los problemas abiertos.

Se inició con el plan “La Descomposición de un Número Par y su Consecutivo”, a dos meses del inicio del ciclo escolar. El propósito de esta experiencia fue identificar que para un número par n y para su consecutivo $n+1$ que es impar, existen $\frac{n}{2}$ descomposiciones diferentes. El tema se ubicó en el eje “sentido numérico y pensamiento algebraico” de primer grado del plan de estudios de Educación Básica Primaria.

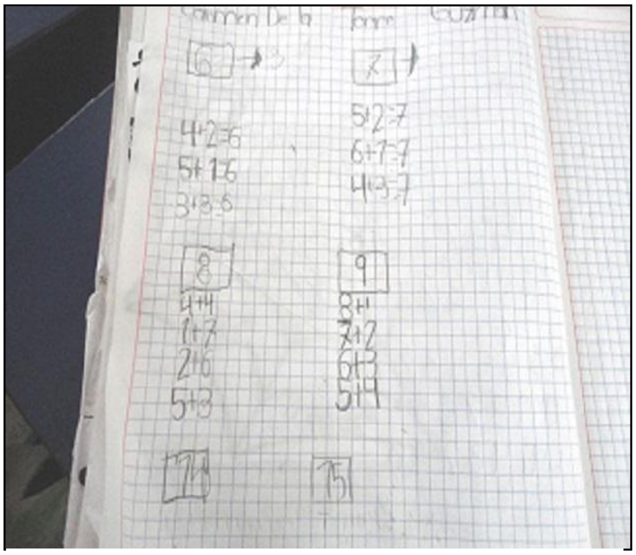

Figura 1. Ejemplo de descomposiciones hechas por los niños.

En la etapa de inicio del plan se solicitó a los niños responder ¿en cuántas formas diferentes se pueden descomponer el número 6? Se recalcó que las descomposiciones fuesen de dos números solamente. De manera individual los niños hicieron sus descomposiciones: 3 y 3, 4 y 2, 5 y 1 y en el pizarrón se fueron colocando en orden. Durante las intervenciones de los niños se les indicó que descomposiciones como 4, 2 y 2, 4 se considerarían como una porque solo se invierten los dígitos. Un alto porcentaje de los niños aún no sabía leer y a pesar de ello hacían sus propuestas mostrando nociones de la suma y habilidad en la descomposición de los números. Después de agotar las participaciones se les cuestionó ¿cuántas descomposiciones diferentes existen?, e inmediatamente después se les solicitó ¿en cuántas formas diferentes se puede descomponer el consecutivo del número 6 o sea el 7? Los mismos cuestionamientos se hicieron con otros dos números pares y sus consecutivos. Posterior a estos primeros ejemplos colocados en orden en el pizarrón, se invitó a los niños a observar los procesos presentados y se les hicieron cuestionamientos como ¿ven algo sorprendente en los resultados?, ¿qué magia encuentran en estos ejemplos?

En la etapa de desarrollo, se solicitó a cada niño seleccionar un número par menor que 30 y su consecutivo para encontrar las descomposiciones diferentes posibles. En orden se colocaron en el pizarrón los ejemplos planteados por los niños y nuevamente se les solicitó identificar regularidades.

En la etapa de cierre se les mostró a los niños ejemplos donde ellos tenían que encontrar sin desglosar el número de descomposiciones diferentes que tiene cada número par y su consecutivo. Por ejemplo se mostró a los niños el número 24 y se pretendía que ellos respondieran que tiene 12 descomposiciones diferentes, luego se mostró el 25 para que respondieran lo que habían aprendido. Durante los 50 minutos de la clase no se llegó a la generalización esperada, pero se identificaron regularidades como hallar las descomposiciones a partir de ordenar los números de mayor o menor y viceversa.

Durante todo el proceso se procuró orientar a los niños al logro del propósito con la visión prospectiva de buscar lo que le falta a una cierta cantidad para llegar a otra al saber que para n *y* para el consecutivo $n+1$ que es impar, existen $\frac{n}{2}$ descomposiciones diferentes que pueden utilizar.

En esta sesión se mejoró el uso del pizarrón al colocar en orden los ejemplos de forma que permitieran a los niños visualizar regularidades. Se consideraron todas las posibilidades presentadas por los niños para encontrar el número de descomposiciones y de esa forma, se promovió la colaboración de todos a aprender juntos. Cuando algún niño repetía el ejemplo de descomposición solamente se aclaraba que diera nuevos ejemplos y de esa forma se le dio relevancia a todas las participaciones. Si alguna participación era dudosa, se presentaba al grupo y los mismos niños exponían sus razones y reorientaban la respuesta.

En una segunda sesión se trabajó en el mismo eje "sentido numérico y pensamiento algebraico", el plan "restas mágicas" cuyo propósito era identificar que la cantidad de restas posibles *ab-c=d* es igual a *d*. Este problema lo han presentado los japoneses como un ejemplo del Estudio de Clases. En nuestro caso, el plan, la puesta en práctica y el análisis es parte de lo que hemos venido trabajando en nuestros contextos.

De inicio se solicitó a los niños construir una resta de un número de dos cifras menos un número de una cifra cuyo resultado sea 3.

$$\begin{array}{rr} & \square\,\square \\ - & \square \\ \hline & 3 \end{array}$$

Los niños hacían sus propuestas y en el pizarrón se colocaron en orden las posibilidades ofrecidas 10-7=3, 11-8=3, 12-9=3. Las propuestas se colocaban de acuerdo al algoritmo convencional de la resta Posteriormente se solicitó construyeran restas con las mismas condiciones cuyo resultado fuese 5. En cada ejemplo el profesor preguntaba ¿qué observan?, ¿pueden hallar algo mágico en cada caso?, e insistía en cuestionar si había algo sorprendente en los resultados. Con estos ejemplos, los niños predijeron que en el primer caso había 3 posibilidades y en el segundo 5. Pero eso no era suficiente para llegar a una generalización, por lo que en la etapa de desarrollo se solicitó al grupo construir restas del mismo tipo cuyo resultado fuese 1, 4, 6 y 8. Se colocaron los ejemplos en orden en el pizarrón para que en grupo los niños pudiesen hallar las regularidades presentadas. Durante estas dos etapas se solicitó a los niños explicaran cuál era el secreto. Concluyeron que había otros casos de restas cuyo resultado era alguno de los números expuestos, pero se modificaba la regla de usar números de dos cifras menos un número de una cifra. Se cuestionó además al grupo si las regularidades expuestas se cumplen para casos como

$$\begin{array}{rr} & \square \\ - & \square \\ \hline & 6 \end{array}$$

Los niños exponen sus razones, explican en qué condiciones se cumple cierto patrón y comienzan a inferir generalizaciones a partir de las regularidades encontradas.

En el cierre de la clase el profesor mostró ejemplos esperando que los niños sin hacer operaciones encontraran el número de restas posibles de acuerdo al resultado o en las que indicaran si se cumple o no la regularidad previamente hallada. A diferencia de las clases previas, se logró en buenos términos los aprendizajes esperados. Los niños identificaron que el número de restas posibles de un número de dos cifras menos un número de una cifra es igual a la resta dada con la visión prospectiva de la resolución de problemas de resta que permitan iniciar el análisis del valor posicional de números de hasta de dos cifras, sin usar el algoritmo convencional.

Una tercera sesión consistió en abordar el plan “Restas Equivalentes”. Se planteó en la etapa de planificación, el propósito de que los niños identificaran y aplicaran la propiedad matemática a-b=(a ± c)-(b ± c). En la fase de inicio del plan de clase se sugirió a los niños jugar a “adivina adivinador”. El juego consiste en plantear una resta, que los niños piensen un número y lo sumen al minuendo y sustraendo, que ejecuten la resta con las cantidades resultantes y el profesor adivine el resultado. Una variedad es pensar un número y en lugar de sumarlo, ahora restarlo al minuendo y sustraendo”; en este caso considerar restricciones como $c \leq b$, para evitar desviar el propósito de la clase a otros conjuntos de números. Desde el inicio se procuró plantear situaciones interesantes y divertidas a los niños para promover el deseo de seguir aprendiendo matemáticas por ellos mismos.

Figura 2. Aplicación de la propiedad aprendida.

Para la etapa de Desarrollo se diseñó un material impreso con planteamientos que en nuestra opinión demandaban de los niños encontrar el “truco” con el que se llegaría al propósito establecido. En la etapa de cierre, el docente en formación mostraría operaciones como (8+56)-(4+56)= $\boxed{}$ para que el niño aplicara la propiedad aprendida y adivinara el resultado lo más rápido posible. El plan se desarrolló con la visión prospectiva de que los niños pudiesen usar la propiedad matemática a-b=(a ± c)-(b ± c) para resolver restas que requieren de la composición y descomposición de números al construir restas equivalentes que no requieren transformación.

Fue evidente el hallazgo de regularidades por parte de los niños y no solo la solución adecuada de las sumas y restas insertas en la actividad, a pesar de la deficiente promoción de la colaboración entre los mismos niños para el logro del propósito. Los niños disfrutaban de sus hallazgos, usaban estrategias como tachar o cancelar el valor de “c” para obtener el resultado, mostraban alegría cuando se tomaban en cuenta sus participaciones y se presentaban ante el grupo, llegaron a realizar más de 10 operaciones en sus notas sin usar el algoritmo convencional y sin necesidad de colocarles una serie de sumas y restas a ejecutar como regularmente se acostumbra. Recordemos que para estos momentos no se ha trabajado el

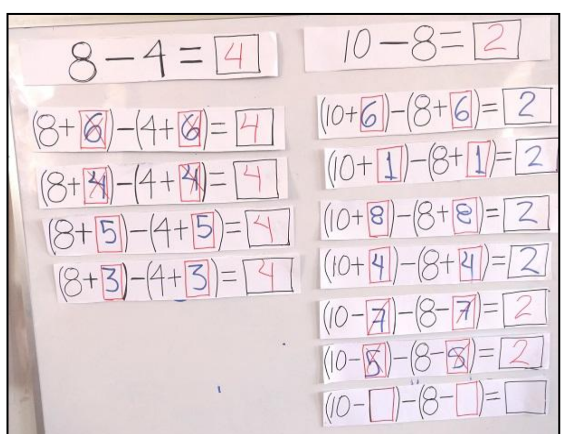

Figura 3. Procesos para promover la inducción matemática

algoritmo convencional de dichas operaciones. Esto muestra cómo los niños a partir de lo que saben le dan sentido a objetos matemáticos y al visualizar los ejemplos en conjunto pueden distinguir patrones que les permiten construir generalizaciones.

El tipo de problemas planteados en este documento permite varias soluciones y a su vez impulsa la participación de todos los niños en su solución a partir de sus saberes individuales. La amplia gama de soluciones bien organizada facilita visualizar las posibilidades para hallar patrones y llegar a generalizaciones. Bajo estas condiciones los niños explican sus razones por las que ciertas situaciones se cumplen y es cuando disfrutan sus propios procesos, le dan sentido a los objetos matemáticos y generan matemáticas por si mismos. Y entonces no parece haber final en las actividades porque surgen nuevos desafíos y nuevos aprendizajes interesantes por descubrir.

Conclusiones

Hemos mostrado a partir de ejemplos con problemas abiertos, que para llegar a la generalización y lograr que los niños sientan el deseo de aprender matemáticas por ellos mismos depende de las condiciones y del tipo de problemas que se manejan con los alumnos en el salón de clases. Trabajar con problemas abiertos permite acceder a una concepción distinta de la resolución de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática; genera reflexionar acerca de las ventajas y desventajas que tiene el considerar las producciones individuales de los niños para la construcción grupal del conocimiento matemático, incentiva disfrutar y desear seguir aprendiendo matemáticas y lograr que la generalización forme parte de los aprendizajes cotidianos de niños y profesores. La creación de nuevos ambientes de aprendizaje promueve resultados impresionantes.

Referencias Bibliográficas

Block, D., Dávila, M., & Martínez, P. (1995). Resolución de problemas: una experiencia de formación de maestros. *Educación Matemática, 7(3), 5-26.* DIE-CINVESTAV-IPN, Editorial Iberoamérica.

Elliott, J. (2005). *La investigación acción en educación* (5a ed.). Madrid: Edición Morata, S. L.

Instituto para la Cooperación Internacional. Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA). (2005). *La historia del Desarrollo de la Educación en Japón. Qué implicaciones pueden extraerse para los países en vías de desarrollo.* Shinjuku-ku, Tokio.

Secretaría de Educación Pública. (SEP)(2012). Dirección General de Educación Superior para profesionales de la Educación [DGESPE]. *Aritmética: su aprendizaje y su enseñanza* (1a ed.). México, D. F.