Los problemas de aligación[1]

Bernardo **Gómez** Alfonso
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia
España
b.gomez@uv.es

Resumen

Se estudian aquí los enfoques metodológicos en la enseñanza de los problemas de aligación transmitidos por la tradición escolar recogida en los libros de texto históricos y actuales. Es una investigación cualitativa, de tipo histórico epistemológico, usando la metodología del análisis de textos. Se da cuenta de los problemas de aligación, su tipología, contextos, lecturas analíticas y métodos de resolución, desde su aparición en las antiguas culturas hasta nuestros días.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, pensamiento numérico y algebraico, resolución de problemas, aligación.

Introducción

Desde muy antiguo se conoce una gran variedad de problemas descriptivos de matemáticas (término usado por Swetz, 2012) asociados a aspectos de la vida cotidiana, que se han usado para dar a conocer reglas extraordinarias (e. g. regla de dos, regla de tres, de falsa posición, etc.), métodos especiales y disposición prácticas de los datos, más o menos olvidados por las restricciones propias del modelo actual de la enseñanza obligatoria. La mayoría de estos problemas se conocen por el nombre que la tradición les ha asignado, unas veces vinculado a un rasgo superficial del enunciado como el contexto, las acciones involucradas, los agentes que intervienen, o la demanda o pregunta; y otras veces vinculados a la regla práctica que los resuelve. Entre la amplia variedad de estos problemas se estudian aquí los problemas de aligación, más conocidos como problemas de mezclas y aleaciones

Los antecedentes de estos problemas se remontan a las antiguas culturas matemáticas, mesopotámicas, egipcia, china e hindú anteriores a Cristo. Se pueden encontrar ejemplos en las distintas colecciones de problemas clásicos que han llegado hasta nuestros días, por ejemplo, en los 85 problemas compilados hace más de tres mil años en el Papiro Rhind (1650 a. C.), en los 247 problemas del *Jiuzhang suanshu* (los nueve capítulos) del arte matemático Chino (100 d.

[1] Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación, referencias: EDU2011-27168 y EDU2009-10599

C.), o en los epigramas y enigmas de la Antología Griega recapitulados por Metrodoro (500 d. C.). Su estreno en Occidente parece situarse en las colecciones de matemáticas recreativas de Beda (s. VIII): De *Arithmeticis Prepositionibus*; y de Alcuino: *Propositiones ad acuendos juvenes* (775), redactados para una escuela de jóvenes talentos fundada por Carlomagno (Swetz, 1989, p. 333), y siglos después en el *Liber Abaci* (Fibonacci, 1202). Desde entonces su popularidad ha sido tal que han estado presentes en los libros de enseñanza de las matemáticas sin solución de continuidad hasta nuestros días, con un enfoque pedagógico que consiste en presentarlos como un subproducto de otros aprendizajes para mostrar su aplicabilidad, pero raramente como un objeto de estudio por sí mismos.

El objetivo de esta comunicación es aportar claridad y generalidad metodológica en relación con los problemas de aligación. Para centrar el estudio se ha procedido a una revisión de textos, históricos y actuales, tomado como unidades de análisis la tipología de los problemas, sus contextos, las lecturas analíticas y sus métodos de resolución.

Marco teórico

Cuando se quiere indagar cómo se han configurado las matemáticas de enseñanza en diferentes momentos de la historia hay que acudir al análisis de los libros de texto del pasado como medio de instrucción, ya que solo éstos pueden aportar información sobre su planificación y puesta en práctica, al ser las únicas fuentes documentales primarias y los únicos registros disponibles.

Para ese análisis es útil servirse de las metodologías del análisis histórico y epistemológico, y del Análisis Didáctico (ver Rico y Fernández 2013, para más detalle de esta última metodología) propias de la Didáctica de las matemáticas. Para el análisis histórico y epistemológico se necesita de una aproximación global, ya que estudiar textos aisladamente, o comparar varios textos de una misma época entre sí, es insuficiente, en la medida que tiende a desconsiderar las raíces y fuentes de las concepciones vertidas en el texto, su contexto social y cultural, y las particularidades propias del sistema educativo de la época. Es en este sentido en el que adquiere importancia efectuar una buena selección de libros de texto representativos de las grandes etapas en que se puede dividir la historia de las ideas matemáticas objeto de estudio. A saber: el periodo antiguo, el anterior a la imprenta, el de las aritméticas comerciales, el de los grandes libros de autor anteriores al sistema escolar, el de los comienzos del libro escolar, y el de la enseñanza graduada en sus diversos planes de estudio (ver Gómez, 2011).

Para el análisis didáctico de los libros de texto de un determinado contenido matemático se necesita delimitar unidades y subunidades de análisis que den cuenta de los aspectos conceptuales, estructurales, procedimentales, metodológicos y representacionales. En el caso particular de que el objeto de estudio sea una determinada familia de problemas, son unidades básicas para su análisis: los tipos de problemas, sus contextos, acciones y agentes; y la lectura analítica de los enunciados que los autores han dejado reflejadas en sus textos y que sustentan las reglas, fórmulas y métodos de resolución

La lectura analítica

En sentido estricto la lectura analítica se refiere al planteamiento algebraico del problema; es decir, a poner el problema en ecuación. Pero para ello no hay reglas fijas, ya que no siempre las condiciones de la cuestión pueden ser simbolizadas en el mismo orden en que se presentan en el problema mediante la traducción inmediata del lenguaje ordinario al simbólico, porque están

envueltas en el enunciado de tal manera que es difícil descubrir su relación y sucesión, en ese caso hay que hacerse cargo de todas las condiciones que explícita o implícitamente contenga la propuesta, y desenvolver las relaciones que las cantidades desconocidas tengan entre sí y con las cantidades conocidas (Lacroix, 1821, p. 25). Por eso, y con carácter general se entiende que la lectura analítica del enunciado de un problema no es simplemente traducirlo al lenguaje algebraico, sino que es más bien reducirlo a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades (Puig, 2003, p. 99).

La lectura analítica es el comienzo del método cartesiano donde a las cantidades que se buscan se les asignan letras llamadas incógnitas y de ella se obtienen las ecuaciones de cuya transformación se siguen las fórmulas. De modo que, mientras que la ecuación es lo que resulta al igualar dos expresiones algebraicas que representan la misma cantidad, obtenidas al describir la relación aritmética que unas cantidades representadas con expresiones algebraicas tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica (Puig, 2003, p. 100), la fórmula (que se deduce de la ecuación) es la lista de operaciones que resulta al describir la relación aritmética de las cantidades conocidas, expresadas en términos generales, entre sí y con las cantidades desconocidas que se buscan. Cuando la lista de operaciones que hay que realizar con las cantidades conocidas, para obtener las desconocidas, se expresa en términos particulares, sin dar razón de las mismas se llaman reglas. Cuando las lecturas analíticas conducen a la ecuación se entenderá que son lecturas algebraicas, y cuando conducen a la fórmula, sin pasar por la ecuación, se entenderá que son lecturas aritméticas.

Los problemas de aligación

Bajo el nombre de regla de aligación se conoce el procedimiento general para resolver los problemas relacionados con las mezclas. Por mezcla se entiende la unión de varias sustancias de distinta calidad y precio; si son metales se llama aleación, y si son líquidos y sustancias, como por ejemplo la mezcla de agua y sal se llama disolución. En la actualidad parece ser que el término aligación está en desuso y se prefiere hablar directamente de problemas de mezclas y aleaciones.

Se tienen dos clases de vino, una vale 12 d, y la otra 15 d. se quieren mezclar para que valgan 13 d. Pregunta. ¿Cuánto vino hay que poner de cada clase? (Stifel, 1544, p. 266 dcha.).

Un hombre tiene dos suertes de oro, uno es de ley 17 quilates, y el otro es de 23 quilates, quiere hacer oro de 22 quilates de ley, preguntase cuanto oro tomará de cada suerte para que juntas las dos cantidades, y ligada una con la otra, sea oro de ley de 22 quilates (Santa Cruz, 1625, p. 222 dcha.).

Calcular la cantidad de sal que hay que añadir a una disolución de 342 g. al 5% para elevar su concentración al 10% (Luis Vives, 1950, p. 122).

Contextos y agentes

Antecedentes de los problemas de aligación se encuentran en determinados problemas curiosos, en los contextos de compras y repartos, como los que aparecen en la colección de Alcuino (775), donde no hay ninguna mención explícita a mezclas o aleaciones.

Dijo un mercader: quiero comprar cien cerdos por cien denarios; sin embargo pagaría 10 denarios por un macho, 5 por una hembra y uno por dos lechones. Diga, aquel que sepa, ¿cuántos machos, cuántas hembras y cuántos lechones debe haber de forma que no sobre ni falte ninguno? (Alcuino, 5, 804, p. 1145).

Cierto paterfamilias disponía de 20 sirvientes. Ordenó que les fueran repartidos 20 modios de maíz

del siguiente modo: que los hombres recibieran tres modios, las mujeres dos y los niños medio modio. Diga, quién pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños debe haber? (Alcuino 32, 804, p. 1154).

Más adelante, con la aparición de las aritméticas comerciales se impusieron los contextos que hacen referencia explícita a las mezclas, preferentemente de alimentos o bebidas, y a la fundición de metales nobles como el oro y la plata.

Un mercader tiene un riel de plata que pesa 3 marcos, y es a 7 dineros de ley, y quiere lo subir que sea a 9 dineros de ley; pregunto, ¿cuánto tomará de plata fina de a 12 dineros, que mezclándola con la de a 7 dineros sea a 9 dineros de ley? (Ventallol, 1521, cap..13, fo 80).

Un mercader tiene 2 piezas de oro, el cual no sabe cuánto [cuántos marcos] pesa cada pieza, por más que sabe que el marco de la una pieza vale 23 ducados cada marco, y así mismo el marco de la segunda pieza vale 18. Este mercader, de estas dos piezas hizo una que pesó 40 marcos, después de juntadas en uno, y halló que valía cada marco veinte ducados. Demando cuánto pesaba cada pieza antes de que fuesen fundidas (Ortega, 1537, p. 176).

Un logrero ha mezclado 15 fanegas de trigo de a 23 reales la fanega con 12 fanegas de centeno a 19 reales la fanega ¿a qué precio ha de vender cada fanega del montón para no perder ni ganar? (Bails, 1790, p. 133 y 134).

¿Qué porciones de vino de a 16 reales y de a 9 he de mezclar para vender la mezcla a 13 reales? (Vallejo, 1841, p. 365).

El procedimiento para resolver los problemas de aligación también sirve para resolver otros problemas, diversos y en contextos diferentes. Por ejemplo los problemas de densidad, porque la densidad se puede asimilar al precio medio y proceder como si de éste se tratase.

Con dos líquidos de densidades 1,3 y 0,7 se ha formado una mezcla de densidad 0,9. Sabiendo que la cantidad total es de 30 m^3 se piden las cantidades de cada líquido (García, 1959, p. 110).

Tres libreros compraron 1250 libros de Aritmética por 375 francos; al primero, le correspondieron 500 libros; al segundo, 450; y al tercero, el resto, es decir, 300. Pregunta: ¿cuánto paga el primero, cuánto el segundo y cuánto el tercero (Silíceo, 1514, p. 266).

Un bancario tiene dos tipos de cambio: en uno 10 monedas hacen una corona, y en el otro, 20 monedas hacen una corona. Una persona desea cambiar una corona por 17 monedas. ¿Cuántas monedas de cada tipo deben darle? (Euler, 1882, p. 202).

Hállese el promedio del peso de cuatro pavos que pesan respectivamente 10 libras, 11 libras, 12 libras y 13e libras (Wentworth, 1900, p. 259)

Un coche recorre un trayecto AB a una velocidad media de 60 km/h, y el trayecto de vuelta a una velocidad media de 40 km/h. Halla la velocidad media del trayecto (SM. 1998, p. 55).

La nota media de matemáticas en la clase de 1º A es 5.4 y la de 1º B es 6.4. ¿Cuántos estudiantes hay en cada grupo si en total son 50, con una nota media de5,88 (Anaya, 2005, p. 104).

Tipos de problemas

La estructura aritmética de los problemas de aligación y similares es la de calcular un promedio; esto es, el número que en una adición se puede sustituir por los sumandos sin alterar la suma, que como se sabe se obtiene hallando el cociente de la suma por el número de sumandos. Según cuál sea la demanda o pregunta se distinguen dos tipos principales de problemas de aligación. Cuando lo que se busca es el promedio la aligación se llama “medial” y cuando se buscan los sumandos “alternada”.

Medial: Se mezclan c kg de café a p ptas. Kg con c’ kg a p’ ptas. y con c’’ kg a p’’ ptas. ¿A cómo resulta el precio de la mezcla (García, 1959, p. 108).

Alternada. Se quiere formar una mezcla de T kg de café a P ptas. el kg con dos clases distintas. El precio de la primera es p ptas. el kg y el de la segunda p’ ptas. el kg. ¿Cuántos kg habrá de cada clase? (García, 1959, p. 109).

En el contexto de las Aleaciones, estos dos tipos se concretan en hallar la ley de aleación de un metal noble (cantidad de metal noble por unidad de peso, expresada hoy en milésimas o quilates) y hallar las cantidades que hay que fundir de cada metal.

Medial: Se han fundido 2 lingotes de oro: el primero pesa 3 kg., 45 gr., y su ley es 800 milésimas; el 2º pesa 1 kg., 20 gr., y es a ley de oro de 670 milésimas. ¿Cuál es la ley de la aleación? (Dalmau, 1827, p. 172).

Alternada: Un hombre tiene 150 pesos de oro, ley 20 quilates y un grano, quiérele juntar tanta cantidad de oro, ley 23 quilates y 2 granos, que haga oro de 22 quilates. Preguntase cuánto tomará del de 22 quilates y 2 granos, para que juntos y ligados el oro de ambas suertes, sea de ley 22 quilates (Santa Cruz, 1625, p. 223 dcha.).

La diferencia entre uno y otro tipo de problema es que el precio medio es lo que se busca en la aligación medial y es una cantidad conocida en la alternada; y que las cantidades que entran en la mezcla y sus precios son cantidades conocidas en la medial mientras que las cantidades que han de mezclarse, conocidos los precios, es lo que se busca en la alternada. Esta es una de las razones por lo que se dice de ambos tipos de problemas que son inversos. En la aligación inversa también pueden incluirse los problemas en los que se busca averiguar los precios de las componentes cuando se conocen las cantidades mezcladas y el precio de la mezcla.

En los libros escolares actuales los problemas de aligación se integran en el bloque del álgebra, en el capítulo dedicado a las ecuaciones primer grado, porque esta es la estructura algebraica que se desprende al asignar las letras a las cantidades desconocidas en la formulación del promedio.

Lecturas analíticas

La resolución de los problemas de aligación se sustenta en la condición esencial de toda mezcla. Si se atiende a los precios, esta condición se suele enunciar, diciendo que después de hecha la mezcla debe resultar el mismo precio que por separado, o lo que es lo mismo, que el total de las cantidades ha de valer lo mismo antes y después de la mezcla. Mientras que si se atiende a las ganancias y pérdidas se enuncia diciendo que lo que se gana con el de menor valor ha de compensar lo que se pierde con el de mayor valor, o lo que es lo mismo, la pérdida que resulta por la mezcla de unas cantidades ha de ser igual a la ganancia que producen otras.

La lectura analítica de esta condición da lugar a la relación entre cantidades (I):

$$\text{I)}\quad Ap + Bq = (A+B)P_m$$

A y B son las cantidades mezcladas, p y q es el precio de la unidad para cada una de ellas y P_m es el precio medio o por unidad de mezcla.

Lectura analítica de los problemas de aligación medial o directa

En los problemas de aligación medial, el promedio por el que se pregunta viene dado por la razón entre el valor total de las cantidades mezcladas, según sus precios respectivos, y la cantidad total de unidades mezcladas.

$$Ap+Bq = (A+B)P_m \rightarrow P_m=(Ap+Bq)/(A+B)$$

La formulación de esta razón es: Para sacar el precio medio se multiplica cada género por el precio a que se pagó, se suman unos con otros los productos; claro está que su suma será el valor de toda la mezcla. Por consiguiente con partir este valor por la suma de todos los géneros, el cociente será el precio medio o común de todos (Bails, 1790, p. 133). La disposición práctica puede ser en columnas, como se ilustra en el ejemplo siguiente:

Un logrero ha mezclado 15 fanegas de trigo de a 23 reales la fanega con 12 fanegas de centeno a 19 reales la fanega ¿a qué precio ha de vender cada fanega del montón para no perder ni ganar?

Las 15 fanegas de trigo y las 12 de centeno son 27 fanegas
15 fanegas de trigo a 32 reales son … . 480
12 de centeno a 19 reales son … … … 228
Suma. … … … … … … … … … … … . 708

Por tanto, pues, 708 por 27, y el cociente 26 1/6, o 26 reales 7 maravedís es el precio a que se podrá vender cada fanega de la mezcla sin perder ni ganar" (Bails, 1790, p. 133 y 134).

Al utilizar la letra *x* para denominar la cantidad desconocida en la relación (I) (el precio medio) se obtiene la expresión lineal: $Ap+Bq = (A+B)x$, de la cual se sigue la fórmula que da la solución directamente, sin más que despejar la *x* y sin necesidad de operarla, por eso este tipo d problemas de aligación, que no necesitan una lectura algebraica, se les conoce hoy como problemas de aligación directa. Su planteamiento general es en los siguientes términos:

Se mezclan c kg de café a p ptas. Kg con c' kg a p' ptas. y con c'' kg a p'' ptas. ¿A cómo resulta el precio de la mezcla. Llamemos: x= ptas. que vale el kg de mezcla o precio medio. Cantidad total mezclada c+c'+c''. Valor total de la mezcla (c+c'+c'')x. Valor de c kg a p ptas. kg cp. Valor de c' kg a p' ptas. kg c'p'. Valor de c'' kg a p'' ptas. kg c''p''

Ha de verificarse: $(c+c'+c'')x = cp + c'p'+ c''p''$. Ecuación literal de primer grado que resuelta da:

Precio medio = $x = \frac{cp+c'p'+c''p'}{c+c'+c''}$ (García, 1959, p. 108).

Lectura analítica de los problemas de aligación alternada o inversa

Igual que en los problemas de aligación medial, en los problemas de aligación alternada las cantidades por las que se pregunta se desprenden de la relación fundamental (I), pero ahora vienen dadas por la razón inversa de las diferencias de sus precios al precio medio.

$$Ap + Bq = (A+B)P_m \rightarrow A(p-P_m)=B(P_m-q) \rightarrow \frac{B}{A} = \frac{(P_m-q)}{(p-P_m)}$$

En el capítulo 11, apartado 6, del *Liber abaci*, denominado "de alear dinero", Fibonacci introduce esta regla. Primero la enuncia, después la aplica a un ejemplo, justifica el resultado y finalmente la extiende a otros problemas derivados o subtipos del caso general.

Si se tienen dos dineros, uno de los cuales es mayor y otro menor que el dinero que se quiere obtener, se puede hacer sin (necesidad de añadir) ni cobre ni plata, escribiendo debajo de los dos dineros en orden inverso las diferencias entre las onzas de plata del dinero que quiere hacer con las de los dos dineros.

Por ejemplo, si uno tiene dinero de 2 onzas, y dinero de 9 onzas, con los que quiere hacer dinero de 5 onzas. Escribe el 2 y el 9 en una línea, y debajo de ésta y entre ellos escribe el 5, como se muestra [en el cuadro de la derecha]; después la diferencia entre el 2 y el 5, que es 3, se escribe arriba del 9; y en orden inverso, la diferencia entre el 5 y el 9, que es 4, se escribe encima del 2, y tendrás la proporción; esto es, que del dinero menor pones 4 partes, y del mayor 3.

3	4
Onz p.	Onz. P.
9	2
	5

Tanto como excede la plata en 3 libras del dinero mayor, tanto le falta a la plata en 4 libras del dinero menor. Así, por ejemplo, en cada libra del dinero mayor la plata excede 4 onzas, que es la diferencia que hay entre el 5 y el 9; luego en tres libras la plata excede tres veces 4 onzas, que son 12 onzas, y 12 resulta del 3 puesto encima del 9, multiplicado por el 4 colocado encima del 2; y en una libra del dinero menor la plata se queda corta en 3 onzas, que es la diferencia que hay entre el 2 y el 5; luego en 4 libras del dinero menor la plata se queda corta en tres veces cuatro onzas, que son 12, que es lo que resulta de multiplicar el 4 está por encima del 2 por el 3 que está por encima del 9. Por eso se ponen 4 libras del dinero menor por cada 3 libras del dinero mayor. De modo similar, con cualquier parte o partes con que se pongan las 4 libras del dinero menor, hay que poner la misma parte o partes de las tres libras del dinero mayor. La proporción del dinero menor al mayor ha de ser siempre 4 a 3 (Fibonacci, 1202, p. 238 y 239).

Más adelante, en los libros de los siglos posteriores, la regla se presenta de modo razonado a partir de la proporción $\frac{B}{A} = \frac{(P_m - q)}{(p - P_m)}$, como se muestra en el siguiente ejemplo:

¿Cuántas fanegas de trigo de a 55 reales y de trigo d 47 reales se han de mezclar, para que la fanega de trigo valga 50 reales?

Sean *x* las fanegas de trigo de a 55 reales, *y* las fanegas de trigo de a 47 reales: digo que

$$x : y : : 50 - 47 : 55\text{-}50$$

En efecto, cada fanega que se tome, para mezclar, de trigo de a 55 reales, produce una pérdida de 55-50 reales; luego las *x* fanegas producen la pérdida de (55-50)×*x* reales. Cada fanega de a 47 reales da una ganancia de 50 – 47 reales; luego las *y* fanegas dan (50-47)×*y* reales de ganancia. Mas como queremos que el valor total de las fanegas que entran en la mezcla, sea el mismo antes y después de mezclarse, la pérdida que producen las unas debe ser igual a la ganancia que dan las otras; luego (55-50)×*x*= (50-47)×*y*. De donde resulta la proporción x:y :: 50-47 :: 55–50 (Cortázar, 1863, p. 163).

Esta razonamiento explica la disposición práctica tradicional, ya sea en filas (como en Fibonacci) o en columnas: Se ordenan los precios de las especies o géneros, de mayor a menor (o de menor a mayor), arriba y abajo, o a la izquierda y derecha, del precio medio que está a la izquierda en otra columna, o abajo en otra fila. Se ponen las diferencias invirtiendo su posición, a la derecha o encima, porque la razón entre las diferencias es la razón inversa que se busca. La solución que se obtiene no es única, ya que se trata de una razón.

En columnas			En filas	
p	$P_m - q$	P_m el precio medio	$P_m - q$	$p - P_m$
P_m		p el precio mayor		
q	$p\text{-}P_m$	q el precio menor	p	q
			P_M	

Cuando la mezcla es de más de dos componentes se reduce el caso al de dos, para lo cual se hallan "por la regla anterior las cantidades que se deben tomar de dos especies cuyos precios comprendan al precio medio; se hallará igualmente las cantidades de otras dos especies cuyos precios comprendan al precio medio; y así se continuará, hasta que se conozcan las cantidades que deben tomarse de todas las especies" (Cortázar, 1863, p. 167). Por ejemplo, si son tres las componentes, habría dos cuyo precio sería mayor o menor que el medio. Se toman las diferencias que van de cada precio particular al precio medio y se apuntan alternadas, a la derecha de las componentes. Cuando al lado de un precio hay varias diferencias, se suman. En el caso de que haya dos precios menores que el medio la razón de las cantidades que hay que tomar es la de la tabla siguiente:

	P_a	$(P_m-P_b)+(P_m-P_c)$
P_m		
	P_b	P_a-P_m
	P_c	P_a-P_m
		$\frac{(Pm-Pb)+(Pm-Pc)}{Pa-Pm}$

Los ejemplos siguientes ilustran los casos de tres y cuatro componentes

Supongamos que hay tres clases de te: uno de a 80 reales la libra, otro de a 60 reales y otro de a 57, y que se pregunte en qué razón se han de mezclar para que se pueda vender a 72 rs. la libra. Dispondremos los términos en esta forma (A) y hallo que por cada 8 libras de a 60 y de a 57 que mezcle, deberé mezclar 27 del de a 80 rs. (Vallejo, 1821, p. 321 y 322)

A

80 … 12+15

72

60 … 8

57 … 8

¿Cuántas libras de café de a 11 reales, de a 9 reales, de a 6 reales, de a 5 reales y de a 2 reales se deben mezclar, para que resulte café a 8 reales?

11 … … 2 … … 6
9 … … … 3
8
6 … … .3
5 … … … 1
2 … … … … …

Resulta que se pueden mezclar 2 libras de a 11 reales con 3 libras de 6 reales, y se tendrán 5 libras de a 8 reales; 6 libras de a 11 reales con 3 libras de a 2 reales, y se tendrán 9 libras de a 8 reales; 3 libras de a 9 reales con 1 libra de a 5 reales, y se tendrán 4 libras de a 8 reales. Luego mezclándolas todas, tendremos 18 libras de a 8 reales (Cortázar, 1863, p.167).

Al asignar las letras *x*, *y*, … a las cantidades que se buscan, de la relación fundamental (I) se sigue la ecuación lineal que resuelve el problema:

$$px + qy = (x+y)P_m \; ; \; (p-P_m)x=(P_m-q)y$$

La lectura analítica de esta ecuación lineal dice que las cantidades de los componentes de la aligación están en razón inversa o alterna a las diferencias entre los precios y el precio medio:

$$x/y=(P_m-q)/(p-P_m)$$

En consecuencia, si no se aportan más datos el planteamiento general de la aleación alternada es indeterminado, ya que admite una infinidad de soluciones. Para que estos problemas sean determinados se necesita aportar datos adicionales al enunciado, lo que se puede hacer de dos maneras: si el dato adicional es la cantidad de algunas de las componentes la aligación alternada se llama parcial, y si se el dato adicional es la cantidad total de la mezcla la aligación se llama total.

Aligación alternada o inversa Total y Parcial

En la Aligación Total se trata de determinar las cantidades en que entran los componentes de la mezcla conocidos los precios de las componentes, el precio medio de la mezcla y la cantidad total de la mezcla. En la Aligación Parcial se trata de determinar la cantidad con que entra una de las componentes de la mezcla, sabiendo los precios de las componentes, el precio medio, y las cantidades con que entran el resto de las componentes.

Total. De pólvora de 8 grados, de 5 y de 3, se quieren hacer 68 arrobas de a 7 grados: se pregunta lo que se ha de poner de cada una (Justo, 1782, p. 145).

Parcial. Un tratante quiere mezclar 10 fanegas de trigo de a 60 reales la fanega con trigo de a 42 reales y trigo de a 28 reales la fanega para vender el montón a 48 reales la fanega, ¿cuántas fanegas de cada una de las últimas suertes de trigo han de entrar en la mezcla (Bails, 1790, p. 138).

La lectura aritmética de los problemas de aligación parcial y total combina el procedimiento general con dos o más reglas de tres, porque en estos casos hay que prorratear (repartir proporcionalmente) la cantidad total o parcial conocida en la razón en que entran las cantidades en la mezcla.

Total. De pólvora de 8 grados, de 5 y de 3, se quieren hacer 68 arrobas de a 7 grados: se pregunta lo que se ha de poner de cada una. Comparo los términos como aparece y se ha dicho, y tendré

8 … 2 y 4 = 6
7 5 … 1
3 … 1
8

sumando las diferencias, 8 arrobas de 7 grados, compuestas de 6 arrobas de 8 grados, 1 de 5, y otra de 3; pero como no han de ser 8, sino 68 las que se han de hacer, formaré esta regla de tres: 8 suma de las diferencias, a 68 cantidad que ha de resultar, así cada diferencia a la cantidad que se ha de tomar, esto es: 6 : x = 51; 8 : 68 :: 1 : x = 8 ½ ; 1: x = 8 ½ (Justo, 1782, p. 145)

Parcial. Un tratante quiere mezclar 10 fanegas de trigo de a 60 reales la fanega con trigo de a 42 reales y trigo de a 28 reales la fanega para vender el montón a 48 reales la fanega, ¿cuántas fanegas de cada una de las últimas suertes de trigo han de entrar en la mezcla.

60 6 20 26
48
42 12 12
28 12 12

Digo, pues, 26 : 10 : : 12 : R, o 13 : 5 : : 12 : 4^{fan} 7^{cel}. Entrarán por lo mismo en la mezcla 4 fanegas y unos 7 celemines (Bails, 1790, p. 138).

La lectura algebraica de estos problemas elude el prorrateo al incorporar directamente a la ecuación el dato adicional. En la aligación total esto da lugar a un sistema de dos ecuaciones lineales, inmediatamente reducible a una sola ecuación lineal:

$$px + qy = (x+y)P_m \; ; \; x+y=C \rightarrow px + q(C-x) = CP_m$$ (siendo C la cantidad total)

El siguiente ejemplo tomado de Stifel (1544) ilustra el procedimiento presentando los datos tabularmente, tal y como se acostumbraba hacer en el siglo XVI.

Se tienen dos clases de vino, una vale a 12 d [la unidad de medida], y la otra a 15 d [la unidad de medida]. se quieren mezclar para que valgan 13 d [la unidad de medida]. Pregunta. ¿Cuánto vino hay que poner de cada clase? Haz x la cantidad de vino de una clase, la otra será 1-x. Disponlo todo como en el ejemplo (Stifel, 1544, p. 266 dcha.). [Nota: Obsérvese que Stifel toma la cantidad total igual a 1].

cant		cant	
1	12	x	Hace 12x
1	15	1-x	Hace 15-15x

De 12x + 15-15x = 13 sale x=2/3

1	12	2/3	Hace 8

1	15	1/3	Hace 5

El planteamiento general de los problemas de aligación total es en los siguientes términos:

Total. Se quiere formar una mezcla de T kg de café a P ptas. el kg con dos clases distintas. El precio de la primera es p ptas. el kg y el de la segunda p' ptas. el kg. ¿Cuántos kg habrá de cada clase? Llamemos x = número de kg que hay de la primer. Número de kg que hay de la segunda T – x. Valor total de la mezcla TP. Valor de los x kg a p ptas. kg. xp. Valor de los (T-x) kg a p' ptas. kg. (T-x)p'.

Ha de verificarse, TP = xp + (T-x)p'. Ecuación lineal de primer grado que resuelta da:

TP = xp + Tp' + xp' $\rightarrow$ x = $\frac{T(P-p')}{p-p'}$. Conocido x se calcula T-x (García, 1959, p. 109).

En la aligación parcial la ecuación se obtiene directamente:

Parcial. ¿Cuántos litros de vino de 3 euros/L hay que mezclar con 40 litros de vino de 2 euros/L para obtener vino a 2,75 euros/L. Sol. *3x+40·2=(x+40)·2.75, x=120* litros de a 3 euros/UL (MacGraw-Hill, Matemáticas. ESO adultos)

A menudo los problemas de aligación presentan una interminación aparente, ya que se plantean con un sistema de ecuaciones de más incógnitas que ecuaciones. Es el caso del siguiente ejemplo:

Cierto obispo ordenó repartir 12 panes entre el clero. Previó así que cada sacerdote recibiera dos panes; un diácono medio y un lector la cuarta parte. Obrando así el número de clérigos y de panes resulta el mismo. Diga, quién quiera, ¿cuántos sacerdotes, diáconos y lectores debe haber? (Alcuino, 47, 804, p. 1155). [La lectura analítica da lugar a un sistema de dos ecuaciones que tendría infinitas soluciones: *x+y+z=12; 2x+y/2+z/4=12* $\rightarrow$ 2x+y/2+(12-x-y)/4=12 $\rightarrow$ 7x+y=36 si no se tuviera en cuenta que x, y, z son enteros <12; x=5, y=1, z=6]

Epílogo

Los problemas de aligación parecen tener cada vez menos importancia en la enseñanza actual, tal vez porque es obvio que los contextos de compra-venta de productos que se mezclan para obtener otros de un precio medio y las aleaciones de metales ya no son forman parte de la vida diaria, ni son de interés para el currículum obligatorio; sin embargo estos dos contextos clásicos perduran en los libros de texto actuales. En cualquier caso, el hecho es que hay otros contextos más cotidianos, más cercanos, o del ámbito de las ciencias, en los que es necesario saber calcular el promedio o aplicar los métodos de la aligación inversa, para ello, es necesario tener presente la condición fundamental de los problemas de aligación y saber hacer su lectura analítica, porque en ella se sustenta su enfoque de resolución, ya sea aritmético o algebraico.

Como se ha intentado mostrar en esta comunicación, el análisis histórico epistemológico ha sido la metodología apropiada para revelar la riqueza del conocimiento matemático que en relación con los problemas de aligación ha configurado la humanidad.

Con ello se ha pretendido aportar generalidad y claridad metodológica para el provecho de los profesores. Ahora su reto es mantener viva esa riqueza de conocimientos, evitar que caiga en el olvido, y aprovecharla, adaptándola a las características de los estudiantes, de las necesidades de la vida y del currículum actual, para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Referencias y bibliografía

Alcuino (804). Propositiones ad acuendos juvenes. En J. P. Migne *Patrologiae Cursus Completus: Patrologiae Latinae*, Tomus 101, Paris, 1863, columnas 1143-1160.

Anaya. (2005). *Matemáticas 1. Aplicadas a las CC.SS. Bachillerato Educación*. Madrid: Grupo Anaya.

Bails B. (1790). *Arismética para negociantes*. Madrid: La viuda de Ibarra.

Cortázar, J. (1863). *Tratado de Aritmética* (16a ed.). Madrid: Imprenta de D. F. Sánchez.

Dalmáu, J. (1897). *Resumen de las lecciones de Aritmética aplicadas a las diferentes cuestiones mercantiles.* Gerona: Editorial Dalmau Carles Pla, S. A.

Euler, l. (1822). *Elements of algebra*. Londres. Harvard College Library.

Fibonacci [Leonardo Pisano] (1202). *Liber Abaci* (Trad al inglés en Sigler, 2002).

García, J. (1959). *Matemáticas tercer curso*. Alcoy: Editorial Marfil.

Gómez. B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilón*, *28*(1), 77, 9-22.

Jiuzhang suanshu (c. 100), traducido al inglés en Shen, Crossley y Lun, 1999.

Justo, J. (1782). *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*. Por D. Joachin Ibarra Impresor de Cámara de S.M.

Lacroix, S. F. (1821). *Curso Completo elemental de matemáticas puras* (Trad. de Josef Rebollo y Morales, Tomo II). Algebra. Madrid: Imprenta Real.

Luis Vives (1950). *Matemáticas cuarto curso por Edelvives*. Zaragoza: Luis Vives

McGraw-Hill (2005). *Matemáticas: Educación Secundaria para adultos*. MacGraw-Hill. España.

Metrodorus (c. 500). *Palatine collection, o Greek anthology* (Traducido al inglés en Page et al. 1916).

Ortega, J. (1537). *Compusición de la Arte de la Aritmética y juntamente de Geometría.* Sevilla: Jacom Combreger (1ª ed. 1512).

Page, T. E. et al. (eds.) (1916). *The greek anthology*. Loeb Classical Library, vol. 5, Harvard U. Press, Cambridge.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, & A. Vallecillos (Eds.). *Investigación en Educación Matemática*. *Actas del VII Simposio de la SEIEM* (pp. 97-108). Universidad de Granada: Granada.

Rico, L. & Fernández, A. (2013). Análisis Didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina, M. (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Santa Cruz, M. G. (1625). *Libro de Arithmetica especulativa, y practica, intitulado, el dorado contador, contiene la fineza y reglas de contar oro y plata, y los Aneajes de Flandes. Por moderno y compendioso estilo*. Madrid: impreso por la viuda de Alonso Martín.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Nueva York: Springer.

Silíceo (1514). Ars Aritmetica. En *Juan Martínez «Silíceo», «Ars Artimetica». Dividida en teórica y práctica*. Introducción (Traducción y notas de E. Sánchez, & J. Cobos. Cacéres). Universidad de Extremadura, servicio de publicaciones. 1996.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica Integra*. Norimberg: Johan Petreium.

Shen, K., Crossley, J. N., & Lun, A. (1999) *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*. Oxford: Oxford University Press.

S.M. (1998). *Matemáticas 3º Secundaria*. Sigma. Madrid: SM.

Vallejo, J. M. (1821). *Tratado Elemental de Matemáticas, escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Tercera edición corregida y considerablemente aumentada*. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Barcelona: Imp del gobierno político superior.

Ventallol, J. (1521). *Practica mercantivol*. Lyon: mestre Jean de la Place.

Wentworth, G. A. (1900). *Aritmética práctica*. Boston: Gin y Compañía.

Vinot, J. (1860) *Récréations mathématiques*. Paris: Larousse et Boyer